¿Cuántas estructuras geométricas (diferentes) admite una superficie compleja?

E. Falbel (Jussieu)
I. Pasquineli (U. Bristol)

$(X, G) \to$ geometría

M ¿cuales geometrías admite?

¿se pueden clasificar? ¿como es el esp. clasifica?

$\rightsquigarrow$ Espacio de Deformaciones de M.

Q: ¿Quién es el espacio de Deformación para M?

1. § (G, X)-estructuras.

X una variedad y G grupo de Lie

$G \circlearrowright X$ transitiva:

Ejemplos:

- $X = \mathbb{R}^n$ (distancia estándar)

  $G = \underset{\text{Rot.}}{O(n)} \ltimes \underset{\text{translaciones}}{\mathbb{R}^n}$ <u>Euclidiana.</u>

- $X = \mathbb{R}^n$

  $G = GL(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ <u>Afín.</u>

<u>Proyectiva</u>

- $X = \mathbb{RP}^n = \mathbb{R}^n \setminus \{0\} / \sim \quad x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}.$ t.q. $y = \lambda x$

$G = PGL(n+1, \mathbb{R}) = GL(n+1,\mathbb{R})/\sim$

Sea M variedad.

<u>Dfn</u>| Un (G,X)-atlas en M. es un $(\mathcal{U}, \Phi)$

$$M = \bigcup_{U_\alpha \in \mathcal{U}} U_\alpha \qquad \text{y} \qquad \phi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow X$$

cartas.

$U_\alpha \cap U_\beta$ $\quad \phi_\alpha \phi_\beta^{-1}$ es localmente un elemento de G.

<u>Dfn</u>| Una (G,X)-est. en M es un (G,X)-atlas maximal.

Si M admite una (G,X)-est. se dice que es una (G,X)-variedad.

Ej: $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$ un dominio.

es $\underline{(O(n) \ltimes \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)}$ $\quad ((U(n) \ltimes \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n))$

- $\mathbb{Z}^n \curvearrowright \mathbb{R}^n$ por translaciones

  $E_1 := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ es una

- Σ sup. compacta de $g \geq 2$

$\pi_1(\Sigma) \hookrightarrow PGL(2, \mathbb{R})$

$\Sigma = \mathbb{H}/\Gamma$

Thm: Σ admite una $(\mathbb{RP}^2, PGL(3,\mathbb{R}))$

$\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{RP}^2$ — -estructura.

$\mathrm{Isom}(\mathbb{H}) \hookrightarrow PGL(3,\mathbb{R})$

$\pi_1(\Sigma) \hookrightarrow PGL(2,\mathbb{C})$ $\quad\Sigma$ admite un $(\mathbb{CP}^1, PGL(2,\mathbb{C}))$-estructura.

$\mathbb{H} \hookrightarrow \mathbb{CP}^1$

- Globalizar las (G,X)-estructuras.

$$\begin{tikzcd} \tilde{M} \arrow[d, "\pi"] \\ M \end{tikzcd}$$

M (G,X)-variedad $\quad\tilde{M}$ admite una (G,X)-estructura y $\pi_1(M)$ va actuar como (G,X)-automorfismo.

Proposición: Si M simplemente conexa (G,X)-variedad. Existe un morfismo $M \xrightarrow{f} X$.

<u>Thm</u> Sea M una (G,X)-variedad. y $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ y $\pi = \pi_1(M)$. Existe un par (dev, hol) que consite en un (G,X)-morfirmo $dev: \tilde{M} \longrightarrow X$ y morf. de grupos $hol: \pi \longrightarrow G$ tal que

$\gamma \in \pi$

$$\begin{tikzcd} \tilde{M} \arrow[r, "dev"] \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X \arrow[d, "hol(\gamma)"] \\ \tilde{M} \arrow[r, "dev"'] & X \end{tikzcd}$$

(π-equivariante)

Más aún, si (dev', hol') con las mismas caract.

$\exists\, g \in G$ tal que $dev' = g \circ dev$ ←

$$hol' = g\, hol\, g^{-1}!$$

<u>Dfn</u> Tal (dev, hol) el par desarrollador

hol es la rep. de holonomía.

Ejemplos: • $S^3 \setminus K_8$ $(\mathbb{H}^3, PGL(2,\mathbb{C}))$

- Grupos triangulares en $PGL(2,\mathbb{C})$.

$\mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}P^2$ y $GL(2,\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^2 \hookrightarrow PGL(3,\mathbb{C})$

Si M es $(\mathbb{C}^2, GL(2,\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^2)$ ent. también $(\mathbb{C}P^2, PGL(3,\mathbb{C}))$.

2. § Variedades Complejas.

Ej. • $\hat{\mathbb{C}}$

- Σ superficies Riemanianas.
- $\mathbb{C}/\Lambda$ Λ una lattice de $\mathbb{C}$

$dev: \tilde{M} \to X \} /$

$\mathcal{A}_{(G,X)}(M) = \{ \underline{(\mathrm{dev}, \mathrm{hol})} :$ dev: [illegible] $\}$
$\mathrm{hol}: \pi_1(M) \to G$ $/ G$
morfismo grupos.

$\underline{\mathrm{Hol}^\circ(M)}$ componente conexa del grupo de bihol. M.

$\underline{\text{Dfn}}$ $T_{(G,X)}(M) = {}_{\mathrm{Hol}^\circ(M)} \backslash \mathcal{A}_{(X,G)}(M)$

M una superficie compleja: conexa (compacta, o no)
$(\mathbb{C}^2, \mathrm{Bihol}(\mathbb{C}^2))$

- Afín $\quad X = \mathbb{C}^2 \quad G = \mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2) = GL(2,\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^2$

- Hyperbolico Complejo $\quad X = \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$

$\mathbb{C}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle \ (2,1)$

$V \subset \mathbb{C}^3 . \ \langle \cdot,\cdot \rangle|_{V \times V} < 0$

$\mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \downarrow \mathbb{C}P^2 \qquad V \downarrow \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} \simeq$ Bola en $\mathbb{C}^2$

$G = PU(2,1) \hookrightarrow PGL(3,\mathbb{C})$

$\langle gu, gv \rangle = \langle u, v \rangle$

- Proyectiva Compleja. $\quad X = \mathbb{C}P^2 \quad G = PGL(3,\mathbb{C})$

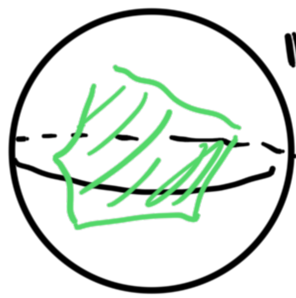
Ejemplo: • Toro complejo $\underset{\text{grupo aditivo}}{\mathbb{Z}^4} \curvearrowright \mathbb{C}^2$ $\underline{\text{traslaciones}}$

$M = \mathbb{C}^2 / \mathbb{Z}^4$ admite una estructura afín.

• Superficie de Hopf: $\langle g\rangle < GL(2,\mathbb{C})$ g sea una contraccion en $\mathbb{C}^2$. $S = \mathbb{C}^2\setminus\{0\}/\langle g\rangle$

admite una estructura afín.

• $\Gamma < PU(2,1)$ lattice cocompacta. $M = \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}/\Gamma$



$\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$

Thm [Klingler] salvo las $(\mathbb{CP}^2, PGL(3,\mathbb{C}))$-variedades biholomorfas a una superficie hip. comp, toda variedad proyectiva compleja conexa y compacta, es proy. isomorfa al $\mathbb{CP}^2$ o una superficie afín compleja

Thm| Si S es una superficie compleja y $\mathcal{T}_{\mathbb{C}^2, Aff(\mathbb{C}^2)}(S)$

• Si S es un toro complejo: entonces

$\mathcal{T}_{\cdot}(S)$ es biholomorfo a una variedad analítica de clases de isomorfismos de $\mathbb{C}$-alg. asoc. y conmut. de dim. 2.

- Si S una sup. Hopf, $\mathcal{T}(S)$ un punto.
  (sup. Inoue)

- Kodaira primero, $\mathcal{T}(S) \simeq \mathbb{C}$

- S fibrado base Σ_g $g \geq 2$, fibra curva elíptica y $b_1(S)$ imp.

  $\mathcal{T}(S) \simeq$ esp. vect. de $\dim_{\mathbb{C}}$ $4g-3$.

[Mok-Yeong] Si S sup. hiperbólica compleja
$\Rightarrow$ la estruct. proy. ind. est. hip. compleja es única.

$\Gamma < PU(2,1)$ lattices de Deligne-Mostow.

$\Gamma \backslash \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ (compacta, ó no)