Límites de espacios homogéneos discretos

Sergio Zamora

Penn State University

8 de abril de 2022

Límites de espacios homogéneos discretos

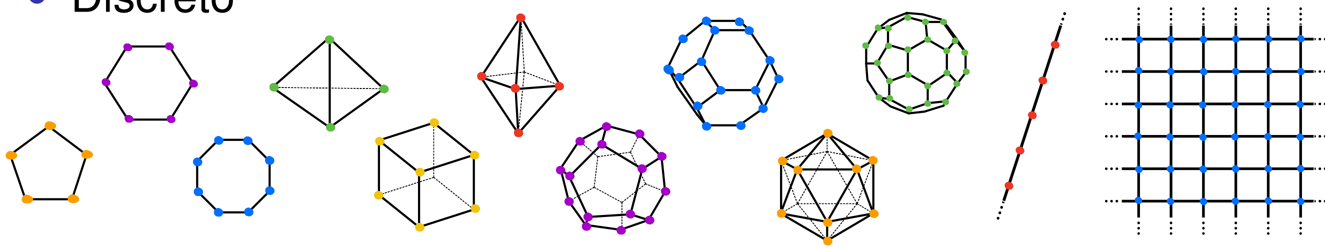
Contenidos

- Espacios homogéneos discretos vs continuos
- Aproximando espacios continuos con discretos
- Aproximando espacios dicretos con continuos
- Hoyos?

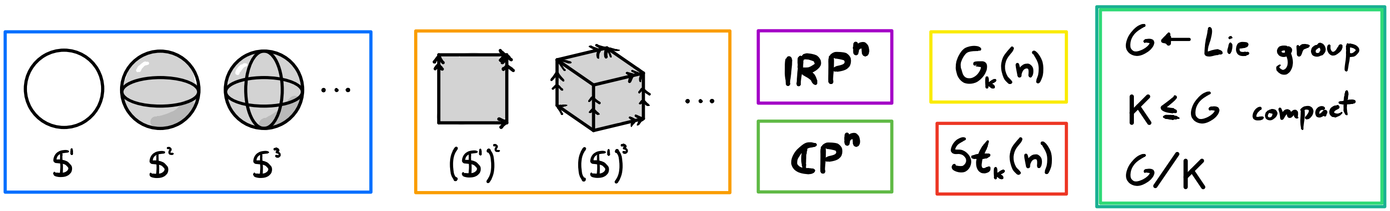
Espacios métricos homogéneos

Un espacio métrico X se llama homogéneo si el grupo $\mathrm{Iso}(X)$ actúa transitivamente. Hay dos sabores principales:

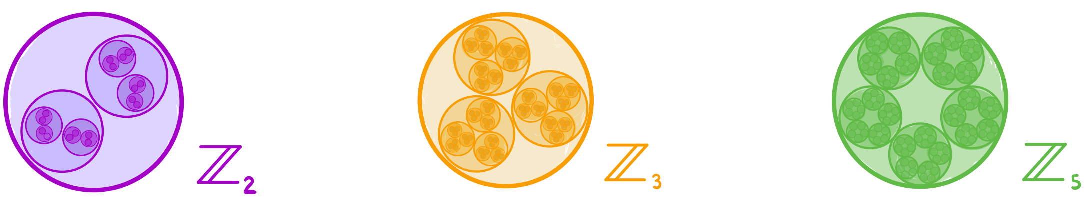
- Discreto



- Continuo



- No discreto ni continuo



Discreto vs continuo

Aproximaciones de objetos discretos por continuos

- Probabilidad: Teorema Central del Límite
- Teoría de Números: Teorema del Número Primo
- Ciencia de Datos: Homología Persistente

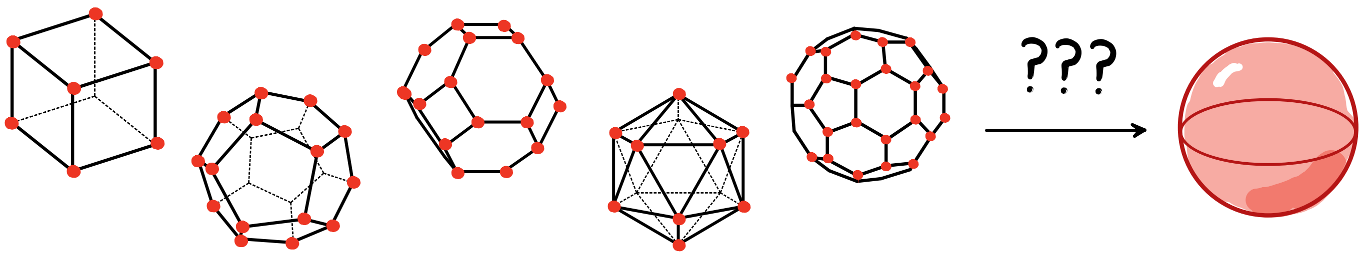
Aproximaciones de objetos continuos por discretos

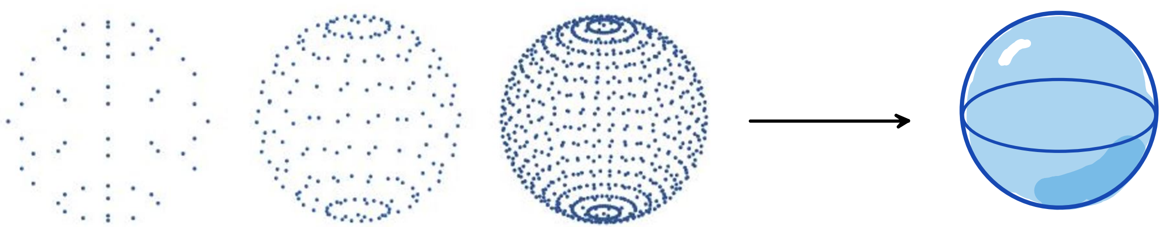
- Teoría Geométrica de Grupos: Gráficas de Cayley
- Teoría de Representaciones: Látices
- Ecuaciones Diferenciales: Métodos de Elemento Finito

Podemos discretizar $\mathbb{S}^2$?

Problema

¿Podemos aproximar $\mathbb{S}^2$ con espacios homogéneos discretos?





Convergencia de Hausdorff

Definición

Una isometría es una función $f : X \to Y$ tal que

- $\forall\ x_1, x_2 \in X$, $d(fx_1, fx_2) = d(x_1, x_2)$
- $\forall y \in Y$, $\exists\ x \in X$ tal que $fx = y$

Definición

Una ε-isometría es una función $f : X \to Y$ tal que

- $\forall\ x_1, x_2 \in X$, $|d(fx_1, fx_2) - d(x_1, x_2)| \leq \varepsilon$
- $\forall y \in Y$, $\exists\ x \in X$ tal que $d(fx, y) \leq \varepsilon$

Definición

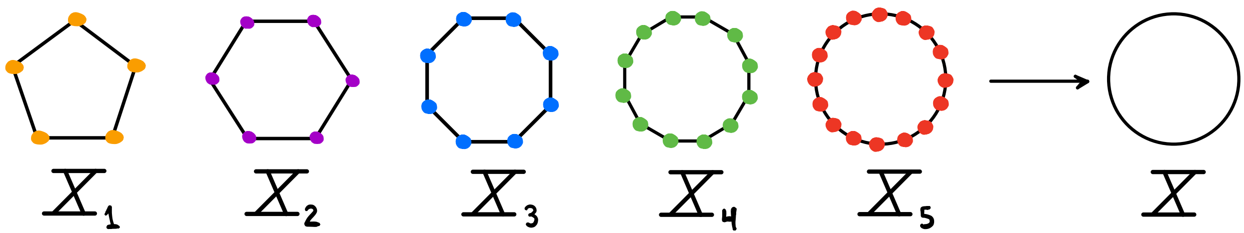
Decimos que una sucesión de espacios métricos compactos X_i converge a un espacio métrico compacto X si existe una sucesión de ε_i-isometrías $f_i : X_i \to X$ con $\varepsilon_i \to 0$.

Podemos discretizar variedades?

Teorema (Turing, 1938)

Si un espacio geodésico compacto de dimensión finita X se puede aproximar con espacios homogéneos discretos, entonces X es un toro con una métrica Finsler invariante.

Idea de la demostración:



$$\mathrm{Iso}(X_i) \to \mathrm{Iso}(X) \leqslant O(N)$$

$$\mathrm{Iso}(X_i) \preceq \mathrm{Iso}(X)$$

$$\boxed{\mathrm{Iso}(X_i)/K_i \leqslant O(N)}$$

$\exists\, K_i \trianglelefteq \mathrm{Iso}(X_i)$ small s.t.

$\exists\, \Gamma_i \leqslant \mathrm{Iso}(X_i)/K_i$ abelian of index $\leqslant C$.

Límites de espacios homogéneos finitos

Teorema (Gelander, 2012)

Si un espacio geodésico compacto X se puede aproximar con espacios homogéneos discretos, entonces X es un toro (posiblemente de dimensión infinita) con una métrica invariante.

Convergencia de Hausdorff no compacta

Definición

Una isometría punteada es una función $f : (X, p) \to (Y, q)$ tal que

- $fp = q$
- $\forall\, x_1, x_2 \in X$, $d(fx_1, fx_2) = d(x_1, x_2)$
- $\forall y \in Y$, $\exists\, x \in X$ tal que $fx = y$

Definición

Una ε-isometría punteada es una función $f : (X, p) \to (Y, q)$ tal que

- $d(fp, q) \leq \varepsilon$
- $\forall\, x_1, x_2 \in B^X\left(p, \frac{2}{\varepsilon}\right)$, $|d(fx_1, fx_2) - d(x_1, x_2)| \leq \varepsilon$
- $\forall y \in B^Y\left(q, \frac{1}{\varepsilon}\right)$, $\exists\, x \in B^X\left(p, \frac{2}{\varepsilon}\right)$ tal que $d(fx, y) \leq \varepsilon$

Convergencia de Hausdorff no compacta

Definición

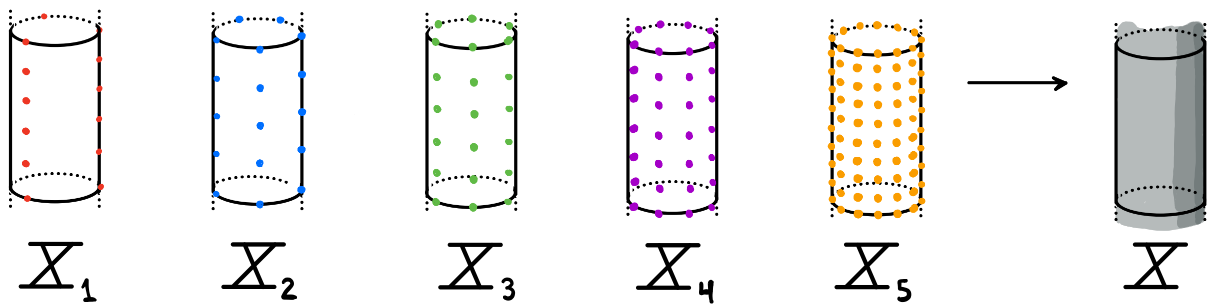
Decimos que una sucesión de espacios métricos punteados (X_i, p_i) converge a un espacio métrico punteado (X, p) si existe una sucesión de ε_i-isometrías punteadas $f_i : X_i \to X$ con $\varepsilon_i \to 0$.

Límites de espacios homogéneos discretos

Teorema (Breuillard–Green–Tao, 2012)

Si un espacio geodésico de dimensión finita X se puede aproximar con espacios homogéneos discretos, entonces X es un grupo de Lie nilpotente con una métrica sub-Finsler invariante.

Idea de la demostración:



$\mathrm{Iso}(X_i) \to \mathrm{Iso}(X)$

$\exists\, K_i \trianglelefteq \mathrm{Iso}(X_i)$ small s.t. $\boxed{\mathrm{Iso}(X_i)/K_i \leqslant G_i}$

$\exists\, \Gamma_i \leqslant \mathrm{Iso}(X_i)/K_i$ nilpotent of index $\leqslant C$.

Límites de espacios homogéneos discretos

Teorema (Zamora, 2019)

Si un espacio geodésico X se puede aproximar con espacios homogéneos discretos, entonces X es un grupo nilpotente que pertenece a una sucesión exacta corta

$$0 \to T \to X \to N \to 1,$$

donde N es un grupo de Lie nilpotente simplemente conexo, y T es un toro central (posiblemente de dimensión infinita).

Límites de espacios homogéneos discretos

Problema

Sea X_i una sucesión de espacios homogéneos discretos. Cuándo existe un límite continuo $X_i \to X$?

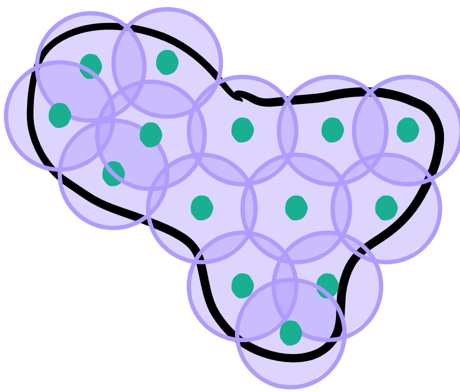
Teorema Arzelá–Ascoli

Teorema tipo Arzelá–Ascoli (Gromov, 1981)

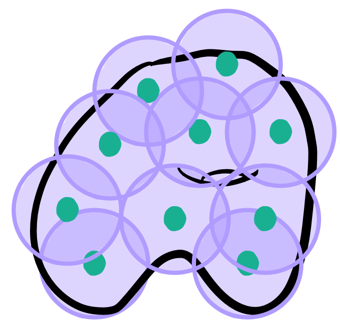
Una familia $\mathcal{A}$ en la clase de espacios métricos compactos es precompacta (toda sucesión tiene una subsucesión convergente) si y sólo si:

- Es uniformemente acotada: $\exists D > 0$ tal que $\forall X \in \mathcal{A}$, $\mathrm{diam}(X) \leq D$
- Es uniformemente totalmente acotada: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall X \in \mathcal{A}$, $\exists p_1, \ldots, p_N \in X$ tales que

$$X = \bigcup_{j=1}^{N} B^X(p_j, \varepsilon)$$



X



Y

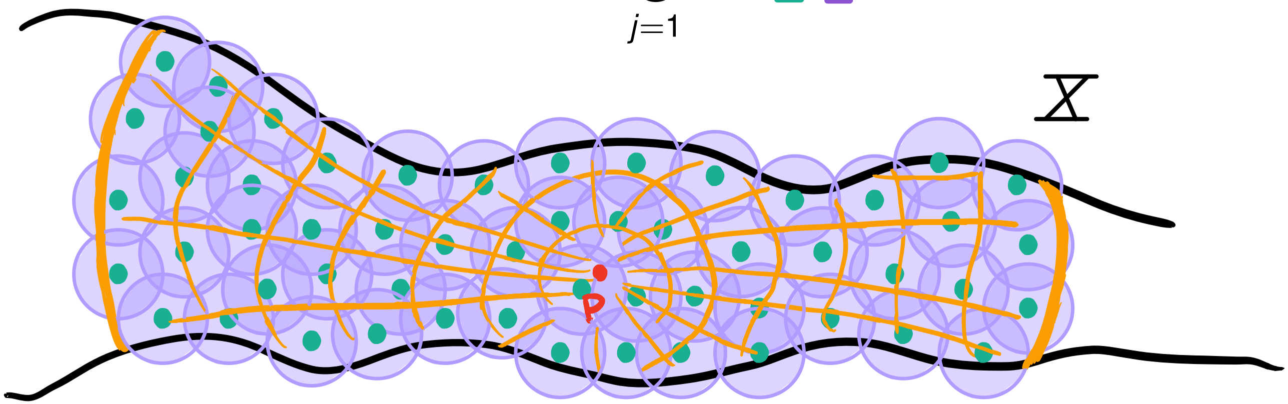
Teorema Arzelá–Ascoli

Teorema tipo Arzelá–Ascoli (Gromov, 1981)

Una familia $\mathcal{B}$ en la clase de espacios métricos punteados propios es precompacta (toda sucesión tiene una subsucesión convergente) si y sólo si:

- Es uniformemente totalmente acotada: $\forall \varepsilon > 0$ $\forall R > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall (X, p) \in \mathcal{B}$, $\exists p_1, \ldots, p_N \in X$ tales que

$$B^X(p, R) = \bigcup_{j=1}^{N} B^X(p_j, \varepsilon)$$



Límites de espacios homogéneos discretos

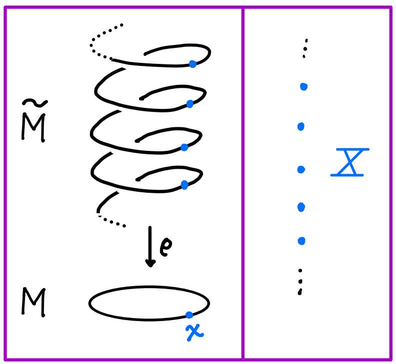
Problema

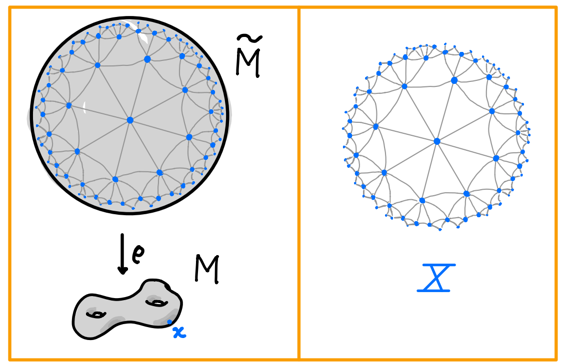
Sea X_i una sucesión de espacios homogéneos discretos. Cuándo existe un límite continuo $X_i \to X$?

Cubiertas de Galois

Ejemplo

Sea M un espacio geodésico compacto (e.g. variedad Riemanniana) de diámetro $\leq D$, $\rho : \tilde{M} \to M$ una cubierta de Galois, y $x \in M$. Entonces $X := \rho^{-1}(x) \subset \tilde{M}$ es un espacio discreto homogéneo. Decimos que un espacio métrico obtenido de esta manera es un espacio discreto de Galois con co-diámeto $\leq D$.





Problema

Sea X_i una sucesión de espacios discretos de Galois con co-diámetros $\to 0$. Cuándo existe un límite continuo $X_i \to X$?

Existencia de límites

Teorema (Gromov, 1981)

Sea X_i una sucesión de espacios discretos de Galois construida a partir de variedades Riemannianas con curvatura de Ricci $\geq k$, y dimensión $\leq n$. Entonces X_i tiene una subsucesión que converge a un espacio de dimensión $\leq n$.

Corolario (Gromov–Breuillard–Green–Tao)

Existen $\varepsilon(n), C(n) > 0$ tales que si M es una variedad Riemanniana de dimensión n, con curvatura de Ricci ≥ -1, y diámetro $\leq \varepsilon$, entonces $\pi_1(M)$ tiene un subgrupo nilpotente de índice $\leq C$ con a lo más C peldaños.

Existencia de límites

Teorema (Benjamini–Finucane–Tessera, 2012)

Sea X_i una sucesión de espacios discretos de Galois con co-diámetros $\delta_i \to 0$. Sea $\eta_i(r)$ el número de elementos en la bola de radio r en X_i. Si existen $r, s > 0$ tales que,

$$\liminf_{i\to\infty} [\eta_i(r)]^s \delta_i \to 0,$$

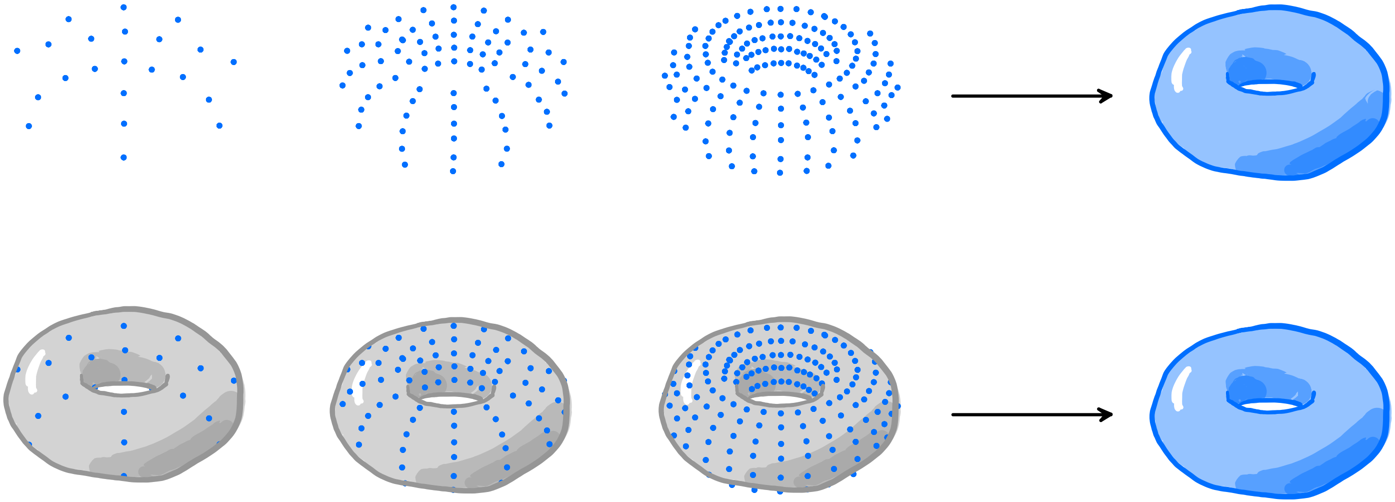
entonces X_i tiene una subsucesión que converge a un límite continuo de dimensión finita.

Corolario (Benjamini–Finucane–Tessera–Turing)

Sea M_i una sucesión de variedades Riemannianas compactas con $|\pi_1(M_i)| \nearrow \infty$, y $\tilde{M}_i$ sus cubiertas universales. Entonces para todo $p > 0$ se tiene

$$\frac{\operatorname{diam}(\tilde{M}_i)}{\operatorname{diam}(M_i)} = o\left(|\pi_1(M_i)|^p\right).$$

Estructura global de espacios discretos de Galois



Estructura global de cubiertas de Galois

Teorema (Zamora, 2020)

Sea (X_i, p_i) una sucesión de cubiertas de Galois de una sucesión de espacios geodésicos compactos Z_i con $\mathrm{diam}(Z_i) \to 0$. Si $X_i \to X$ para un grupo de Lie X, entonces existe una sucesión $\Lambda_i \leq \pi_1(X_i)$, tales que para i suficientemente grande, hay morfismos suprayectivos

$$\Lambda_i \longrightarrow \pi_1(X).$$

Corolario

Sea (X_i, p_i) una sucesión de cubiertas universales de una sucesión de espacios geodésicos compactos Z_i con $\mathrm{diam}(Z_i) \to 0$. Si $X_i \to X$ para un grupo de Lie X, entonces X es simplemente conexo.

Estructura global de cubiertas de Galois

Contraejemplo (Zamora, 2019)

Existe una sucesión de espacios homogéneos simplemente conexos contínuos que converge en la topología de Hausdorff a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$.

Contraejemplo (Zamora, 2021)

Existe una sucesión de cubiertas de Galois X_i de una sucesión de variedades Riemannianas Z_i con $\mathrm{diam}(Z_i) \to 0$ que converge a un grupo de Lie X con la propiedad de que $\beta_1(X_i) = 4$ para toda i, pero $\beta_1(X) = 6$.

Conjetura

Sea X_i una sucesión de espacios contínuos simplemente conexos con grupos discretos de isometrías Γ_i tales que $\mathrm{diam}(X_i/\Gamma_i) \leq C$. Si X_i converge a un espacio semi-localmente-simplemente-conexo X, entonces X es simplemente conexo.

Estructura global de cubiertas universales

Problema

Sea M_i una sucesión de variedades Riemannianas con diámeteros $\delta_i \to 0$, y supongamos que las cubiertas universales $\tilde{M}_i$ tienen diámetro 1. ¿Cuál es la "forma" de $\tilde{M}_i$? (describir el ultralímite $\lim_{i \to \alpha} \tilde{M}_i$)

Conjectura

La sucesión $\tilde{M}_i$ es estadísticamente trivial:
Si μ_i son medidas de probabilidad $\pi_1(M_i)$-invariantes en $\tilde{M}_i$, y $f_i : \tilde{M}_i \to \mathbb{R}$ son funciones 1-Lipschitz, entonces

$$\mathrm{Var}((f_i)_*(\mu_i)) \to 0$$

Teorema (Zamora, 2021)

Si $(f_i)_*(\mu_i) \rightharpoonup \mu$ para alguna probabilidad μ, entonces $\mathrm{supp}(\mu)$ es conexo, y

$$\mathrm{diam}(\mathrm{supp}(\mu)) < 1.$$

Referencias

Benjamini, I., Finucane, H., Tessera, R. (2017). On the scaling limit of finite vertex transitive graphs with large diameter

Breuillard, E., Green, B., Tao, T. (2012). The structure of approximate groups

Gelander, T. (2013). Limits of finite homogeneous metric spaces

Gromov, M. (1981). Groups of polynomial growth and expanding maps

Gromov, M. (2007). Metric Structures for Riemannian and non-Riemannian Spaces

Turing, A. (1938). Finite approximations of Lie groups

Zamora, S. (2021). Fundamental groups and group presentations with bounded relator lengths

Zamora, S. (2020). Limits of almost homogeneous spaces and their fundamental groups