# La sutil relación entre homología y homotopía

Omar Antolín Camarena (IMATE UNAM - CDMX)

# «Miden los hoyos»

- Cuando hablamos informalmente sobre los grupos de homotopía decimos que $\pi_n(X)$ «mide cuantos hoyos de dimensión $n$ tiene un espacio $X$».
- Decimos exactamente lo mismo acerca de $H_n(X; \mathbb{Z})$...
- Tenemos dos maneras diferentes de formalizar la misma intuición y aunque tienen una relación más o menos estrecha, también son bastante independientes.

# Relaciones entre espacios

Dos espacios $X$ y $Y$ pueden:

- ser homotópicamente equivalentes,
- tener grupos de homotopía isomorfos, o
- tener grupos de homología isomorfos.

# Clases de mapas

Una función continua $f : X \to Y$ puede ser:

- una equivalencia homotópica,
- una *equivalencia débil*, es decir, inducir isomorfismos $\pi_n(X) \to \pi_n(Y)$ para toda $n$, o
- una *equivalencia homológica*, es decir, inducir isomorfismos $H_n(X) \to H_n(Y)$ para toda $n$.

O puede ser:

- *nula* o *nulhomotópica*, es decir, homotópica a una constante,
- 0 en homotopía, es decir, inducir el homomorfismo 0 en todos los grupos de homotopía, o
- 0 en homología, es decir, inducir el homomorfismo 0 en todos los grupos de homología $H_n$ con $n > 0$.

# Lo cierto

# Invarianza homotópica

- Si dos espacios son homotópicamente equivalentes, entonces tienen grupos de homotopía isomorfos y tienen grupos de homología isomorfos.
- Si $f : X \to Y$ es una equivalencia homotópica, entonces induce isomorfismos en todos los grupos de homotopía y de homología, es decir es equivalencia débil y equivalencia homológica.
- Más sutilmente: una equivalencia débil es una equivalencia homológica.

# Whitehead y Hurewicz

## Whitehead

### Teorema

*Una equivalencia débil entre complejos CW es una equivalencia homotópica.*

### Teorema

*Una equivalencia homológica entre espacios simplemente conexos es una equivalencia débil.*

## Hurewicz

### Teorema

*El primer grupo de homología es la abelianización del grupo fundamental.*

### Teorema

*Para un espacio simplemente conexo, el primer grupo de homotopía distinto de cero ocurre en el mismo grado que el primer grupo de homología distinto de cero y estos grupos son isomorfos.*

# Contraejemplos

# Mismos grupos de homotopía, diferente homología

Consideremos $\mathbb{RP}^2 \times S^3$ y $S^2 \times \mathbb{RP}^3$.

- Ambos tienen grupo fundamental $\mathbb{Z}/2$.
- Ambos tienen cubriente universal $S^2 \times S^3$, así que tienen los mismo grupos de homotopía superiores.
- La homología la podemos calcular con el teorema de Künneth:
  - $H_*(\mathbb{RP}^2 \times S^3) = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2) \otimes (\mathbb{Z}, 0, 0, \mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2, 0, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2)$.
  - $H_*(S^2 \times \mathbb{RP}^3) = (\mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z}) \otimes (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2, 0, \mathbb{Z}) =$ $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2, 0, \mathbb{Z})$.

# Misma homología, diferentes grupos de homotopía

Consideremos $\mathbb{CP}^2$ y $S^2 \vee S^4$.

- Ambos tienen homología $(\mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z})$.
- Por la fibración $S^1 \to S^5 \to \mathbb{CP}^2$ sabemos que $\pi_n(\mathbb{CP}^2) \cong \pi_n(S^5)$ para toda $n \geq 3$.
  En particular, $\pi_3(\mathbb{CP}^2) = 0$.
- Podemos calcular $\pi_n(S^2 \vee S^4)$ con el teorema de Hilton–Milnor: $\Omega(S^2 \vee S^4) \simeq \Omega S^2 \times \Omega S^4 \times \Omega S^5 \times \cdots$.
  En particular $\pi_3(S^2 \vee S^4) \cong \pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$.

# Un poco más sobre ese ejemplo

Si solo quisiéramos ver que $\mathbb{CP}^2$ y $S^2 \vee S^4$ no son homotópicamente equivalentes, no necesitaríamos calcular sus grupos de homotopía. Bastaría observar que tienen anillos de cohomología no isomorfos:

- $H^*(S^2 \vee S^4) \cong \mathbb{Z}[a, b]/(a^2, ab, b^2)$ (con $|a| = 2$, $|b| = 4$).
- $H^*(\mathbb{CP}^2) \cong \mathbb{Z}[a]/(a^3) \cong \mathbb{Z}[a, b]/(a^2 - b, ab, b^2)$.

Ese mismo truco no funciona para distinguir $\Sigma\mathbb{CP}^2$ y $S^3 \vee S^5$, por ejemplo, porque cualquier espacio que sea suspensión cumple que $xy = 0$ siempre que $x, y$ tengan grado al menos 1.
Para distinguir esos podemos usar las operaciones de Steenrod.

## Mismos grupos de homología y homotopía, pero no equivalentes

Hay dos haces fibrados sobre $S^2$ con fibra $S^2$: el trivial $S^2 \times S^2$ y el que está dado por pegar los haces triviales sobre el hemisferio norte y sur usando la función de pegado en el ecuador $S^1$ dada por el elemento no trivial de $\pi_1(SO(3)) \cong \mathbb{Z}/2$.
Como el haz fibrado no trivial también tiene una sección los grupos de homotopía de su espacio total $X$ son los mismos que los que $S^2 \times S^2$.
Hay otra construcción de $X$ trivial como el cilindro doble de la fibración de Hopf $\eta : S^3 \to S^2$, o sea,

$$X = \big((S^3 \times [0,1]) \sqcup (S^2 \times \{0,1\})\big)/\sim$$

donde $(p, \epsilon) \sim (\eta(p), \epsilon)$ para $p \in S^3$ y $\epsilon \in \{0,1\}$.
Con esa descripción podemos ver que $X$ tiene la misma homología que $S^2 \times S^2$, pero diferente anillo de cohomología.

# Cero en homología pero no en homotopía

La fibración de Hopf $\eta : S^3 \to S^2$ es un ejemplo.
Si pensamos que $S^3 = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 : |w|^2 + |z|^2 = 1\}$ y que $S^2 = \mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, la fibración de Hopf está dada por $\eta(w, z) = w/z$.
Es fácil que para todo $p \in S^2$, $\eta^{-1}(p) \cong S^1$. De hecho $\eta$ es un haz fibrado con fibra $S^1$ y la sucesión exacta larga de grupos de homotopía nos dice que $\eta_* : \pi_n(S^3) \to \pi_n(S^2)$ es un isomorfismo para $n \geq 3$.
Por otra parte, $\eta_* : H_n(S^3) \to H_n(S^2)$ es 0 para $n > 0$, simplemente porque siempre un grupo o el otro es 0.

# Cero en homotopía pero no en homología

Podemos tomar $T = S^1 \times S^1$ y $S^2$ para este ejemplo.
La construcción clásica del toro es identificar los lados opuestos de un cuadrado. Si colapsamos todo el perímetro del cuadrado a un punto obtenemos una esfera, el colapso es una mapa $q : T \to S^2$.

- Por construcción $q_* : H_2(T) \to H_2(S^2)$ es un isomorfismo.
- $q_* : \pi_n(T) \to \pi_n(S^2)$ es 0 simplemente porque siempre un grupo o el otro es 0.

# Cero en homología y homotopía pero no nulhomotópica

Podemos obtener un ejemplo de esto combinando los dos anteriores.
Sea $q : (S^1)^3 \to S^3$ análogo al ejemplo anterior: colapsar el 2-esqueleto de $(S^1)^3$ a un punto.
Entonces $\eta \circ q : (S^1)^3 \to S^2$ es un ejemplo:

- Es 0 en homotopía porque $q$ lo es.
- Es 0 en homología porque $\eta$ lo es.
- Si la composición $\eta \circ q$ fuera nula, $q$ se factorizaría por la fibra homotópica de $\eta$, a saber $S^1$. Pero cualquier composición $(S^1)^3 \to S^1 \to S^3$ sería 0 en $H_3$ y sabemos que $q$ induce un isomorfismo en $H_3$.

# Equivalencia homológica pero no equivalencia débil

Por el teorema de Whitehead sabemos que no es posible hallar un ejemplo así con mapas entre espacios simplemente conexos.
La esfera homológica de Poincaré $P$ nos proporciona un ejemplo.
Para construirla, tomen un dodecaedro sólido e identifiquen las caras opuestas por medio de una rotación de $36^\circ$.
La homología de $P$ es la misma que la de $S^3$, y de hecho, el mapa $q : P \to S^3$ que colapsa la frontera del dodecaedro a un punto es una equivalencia homológica.
Pero $q$ no es una equivalencia débil, porque $\pi_1(P)$ es ¡el grupo de simetrías de rotación del dodecaedro!

¡Muchas gracias!