Tarea 2: Sucesión espectral de Serre

1 Espacios de lazos de esferas

1. Sea $n > 1$. En clase vimos que para $H_k(\Omega S^n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ si k es múltiplo de $n-1$ y 0 si no. Por el teorema de coeficientes universales, los *grupos* de cohomología son esos mismos. Encuentra el *anillo* de cohomología de ΩS^n.

2. Considera la estructura CW usual en S^1 (con una 0-celda y una 1-celda) y la correspondiente estructura producto en $(S^1)^3$. Sea $q : (S^1)^3 \to S^3$ la función que colapsa el 2-esqueleto y sea $\eta : S^3 \to S^2$ la fibración de Hopf.

   (a) Prueba que $\eta \circ q : (S^1)^3 \to S^3$ induce el homomorfismo cero tanto en homología (con cualquier grupo de coeficientes) como en grupos de homotopía, en todos los grados.

   (b) Prueba que, a pesar de eso, $\eta \circ q : (S^1)^3 \to S^3$ no es homotópica a una constante. *Sugerencia*: calcula cohomología de la fibra homotópica de $\eta \circ q$ y prueba que no coincide con la cohomología de la fibra homotópica de la función constante.

2 Grupos de homotopía de las esferas

1. Calcula $\pi_4(S^2)$.

3 Operaciones de Steenrod

1. ¿Puede haber un espacio X tal que su anillo de cohomología con coeficientes en $\mathbb{F}_2$ es $\mathbb{F}_2[x]$ con $\deg x = 3$? *Sugerencia*: La relación de Adem más simple dice que $\mathrm{Sq}^3 = \mathrm{Sq}^1 \mathrm{Sq}^2$.

4 Cohomología de grupos

1. Lista todas las clases de cohomología en $H^2(B\mathbb{Z}/2 \times B\mathbb{Z}/2; \mathbb{F}_2)$ con sus correspondientes extensiones centrales $1 \to \mathbb{Z}/2 \to E \to \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \to 1$. *Sugerencia*: Aprovecha los automorfismos de $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ para reducir el trabajo.

2. Calcula el anillo de cohomología $H^*(BQ_8; \mathbb{F}_2)$. Aquí Q_8 es el grupo formado por los ocho cuaternios $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$. Su centro es $\{\pm 1\}$ y $Q_8/\{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.

3. En clase vimos que $H^*(B\mathbb{Z}/4; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[x, y]/(x^2)$ con $\deg x = 1$, $\deg y = 2$. Nótese que en cada grado $H^n(B\mathbb{Z}/4; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2$, así que $\mathbb{Z}/4$ tiene cohomología mod 2 isomorfa a la de $\mathbb{Z}/2$ *como espacio vectorial graduado*, pero **no** *como anillo*.

   (a) Prueba que hay una cantidad no numerable de anillos graduados no isomorfos dos a dos tales que $A^n \cong \mathbb{F}_2$ para toda $n \geq 0$.

   (b) Calcula $H^*(B/\mathbb{Z}/2^k; \mathbb{F}_2)$ como espacio vectorial graduado usando el teorema de coeficientes universales, recordando que calculamos el anillo de cohomología entera.

(c) ¿Cuál es la estructura de anillo de $H^*(B/\mathbb{Z}/2^k;\mathbb{F}_2)$?

(d) ¿Qué morfismo induce la proyección $\mathbb{Z}/2^{k+1} \to \mathbb{Z}/2^k$?

5 Característica de Euler

Dado un campo k, definimos la característica de Euler de un espacio X como $\chi_k(X) := \sum_{i\geq 0}(-1)^i \dim_k H_i(X;k)$, siempre que esa suma tenga sentido: que todos los sumandos sean finitos y que solo un número finito de ellos sean distintos de 0.

Podemos definir también $\chi_{\mathbb{Z}}(X) := \sum_{i\geq 0}(-1)^i \operatorname{rango} H_i(X;\mathbb{Z})$, cuando los grupos de homología de X son finitamente generados. (Recuerden que un grupo abeliano finitamente generado es de la forma $\mathbb{Z}^{\oplus r} \oplus F$ con F finito y que r es llamado el rango.)

De hecho, podemos definir características de Euler para espacios vectoriales graduados o grupos abelianos graduados H_i, aunque estos no sean la homología de algún espacio.

1. Prueba que un complejo de cadenas (digamos, en espacios vectoriales) tiene la misma característica de Euler que su homología.

2. Prueba que para un complejo CW finito X, $\chi_{\mathbb{Z}}(X) = \chi_k(X) =: \chi(X)$ para cualquier campo k.

3. Prueba que dados complejos CW finitos X y Y, $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$.

4. Prueba que dada una sucesión fibrada $F \to Y \to X$ de complejos CW finitos, $\chi(Y) = \chi(F)\chi(X)$.