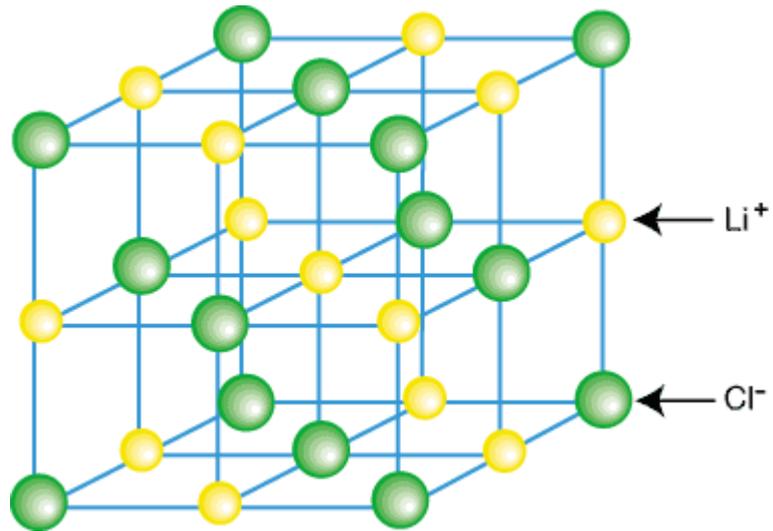


Características de Escala Libre en Redes  
Aleatorias  
Parte I

*Dolores Lara.  
Octubre, 2005.*

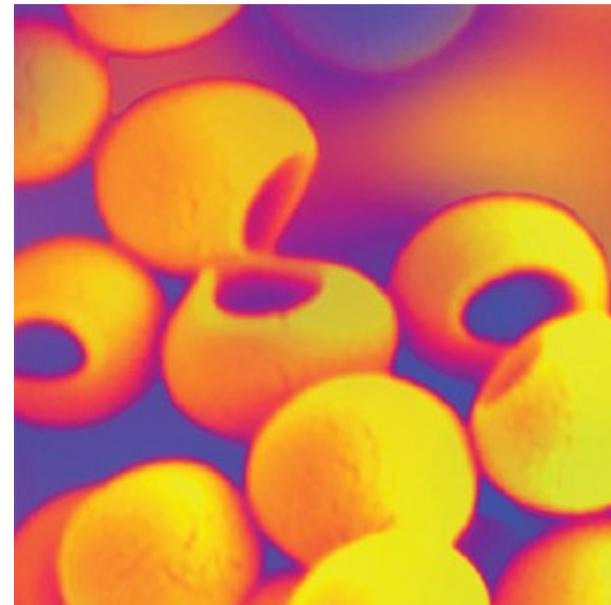
# Introducción



elementos idénticos

+

interacciones locales

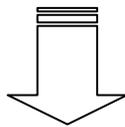


# Introducción (cont)

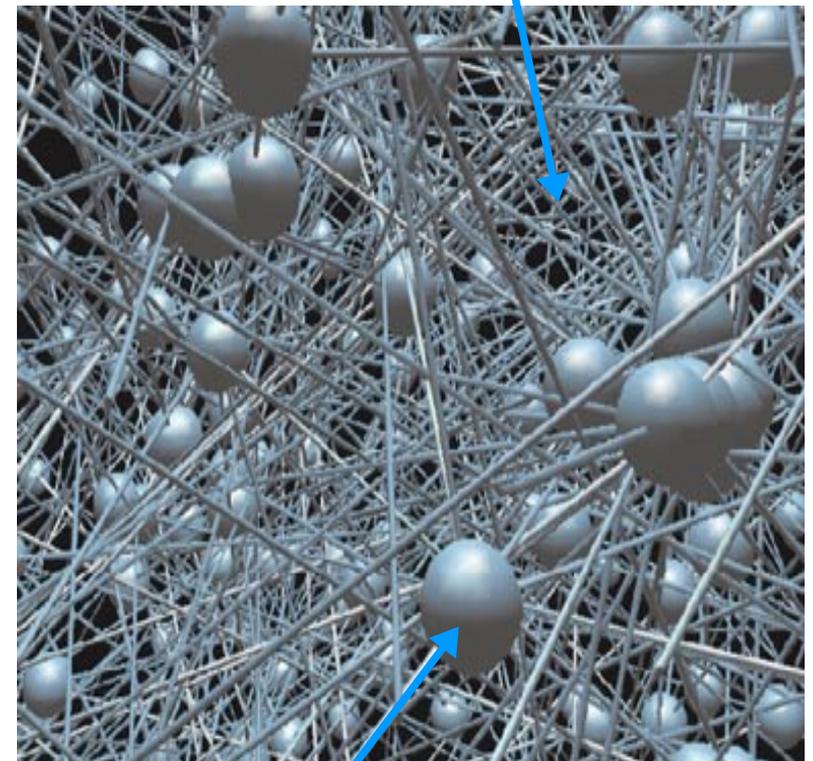
Sistema Complejo

muchos elementos **no idénticos**

conectados por interacciones  
**diversas y no locales**



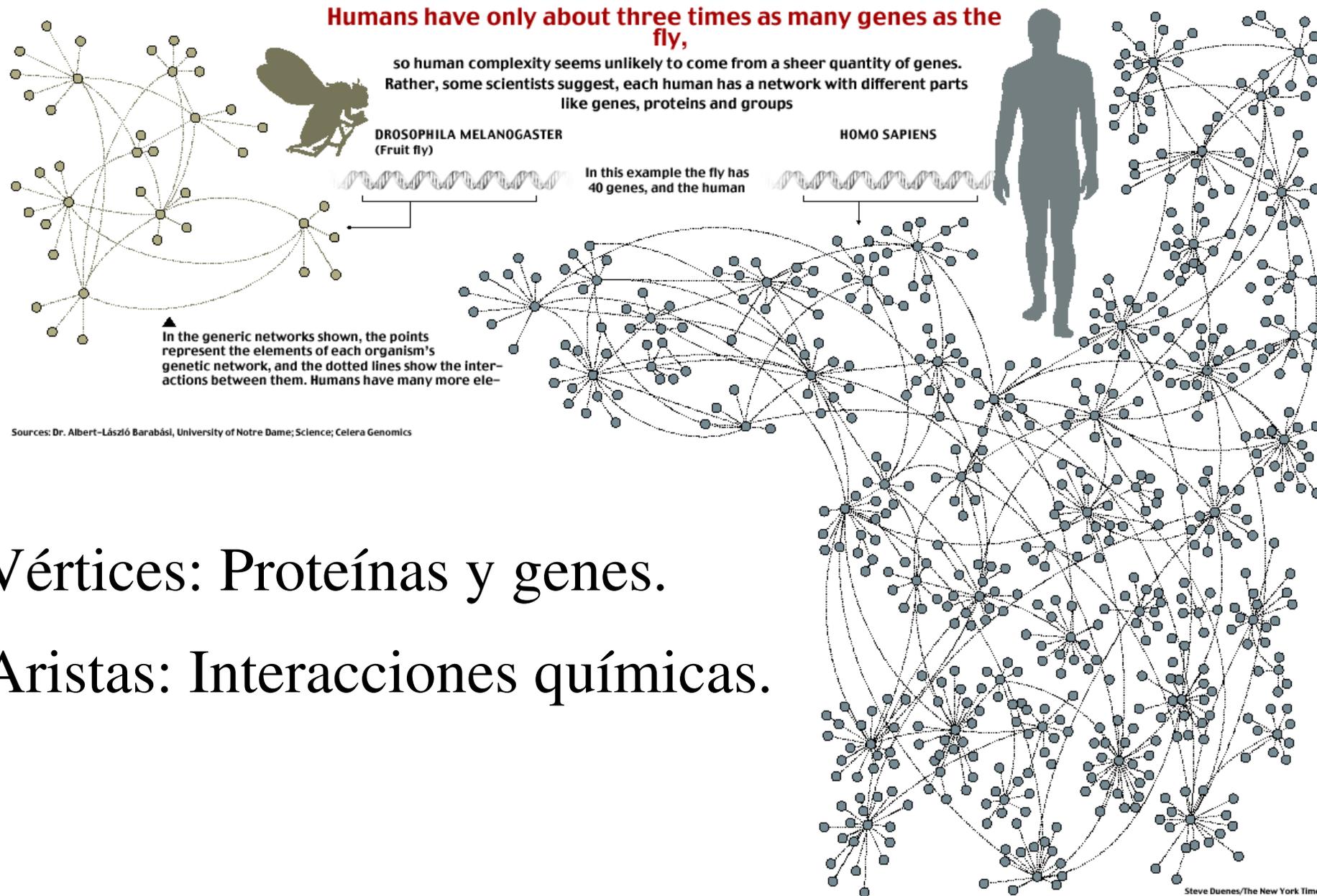
Redes Complejas



interacciones

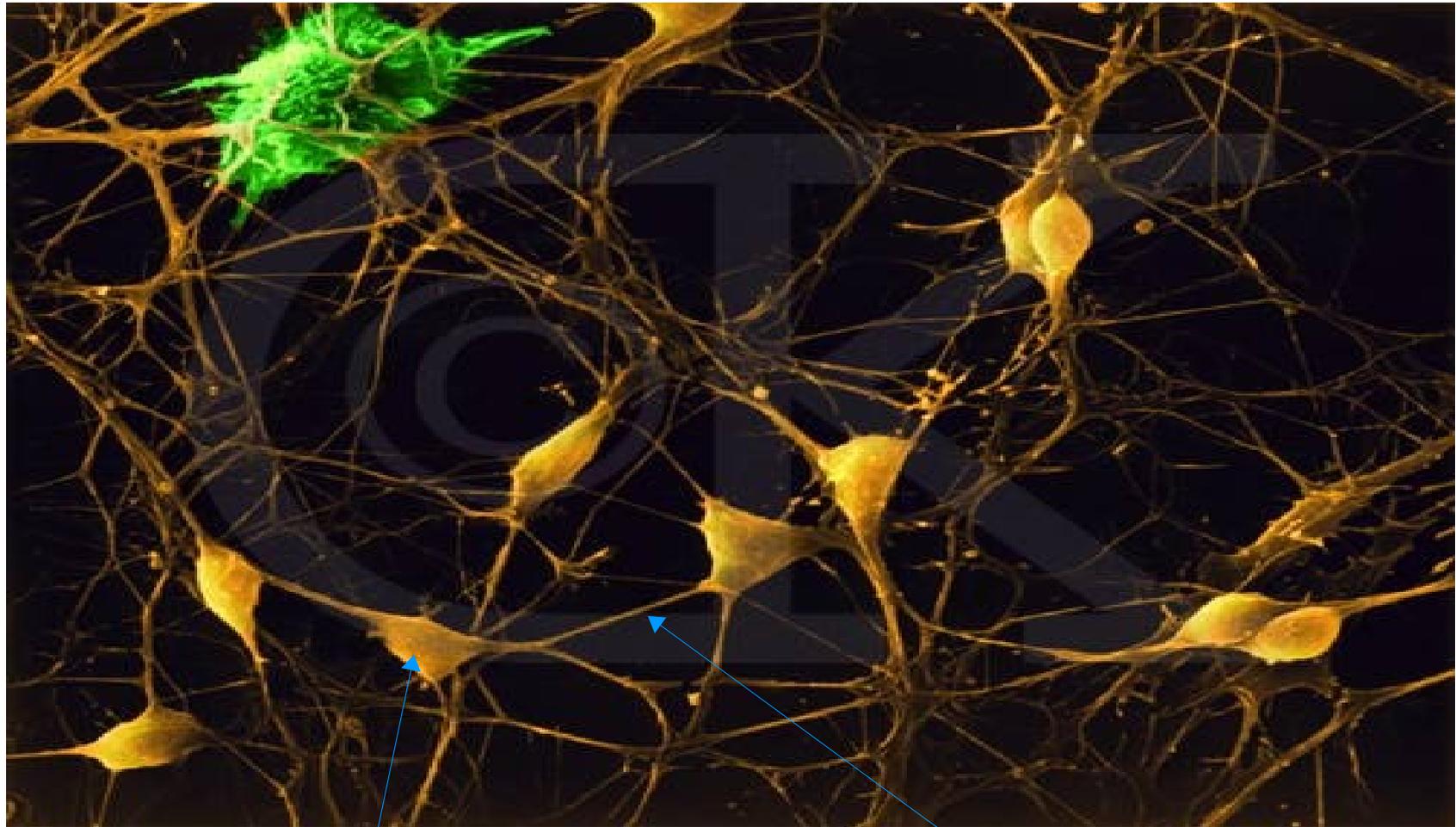
elementos

# Red Genetica



- Vértices: Proteínas y genes.
- Aristas: Interacciones químicas.

# Sistema Nervioso

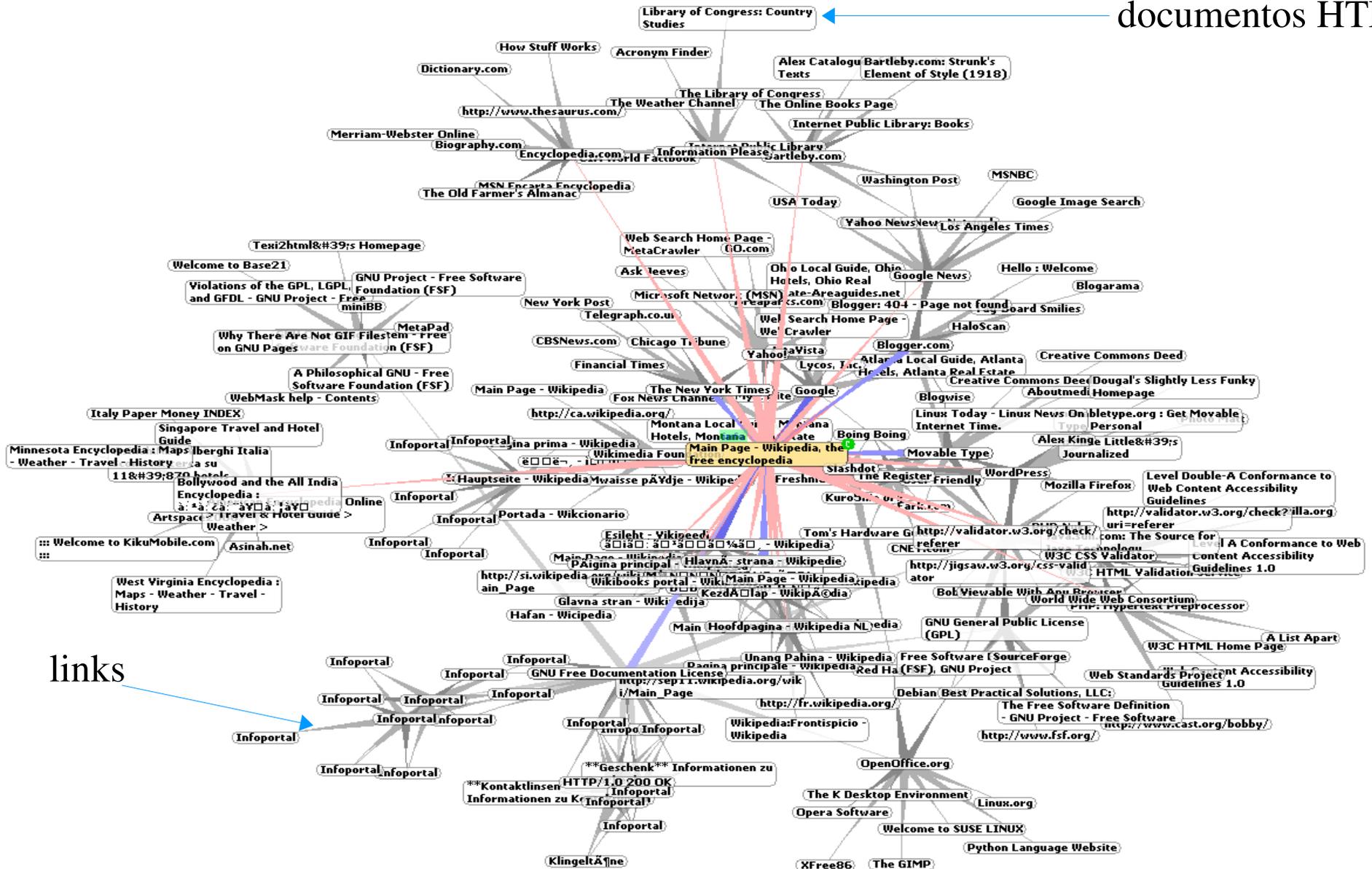


células nerviosas

axones

# World Wide Web

documentos HTML

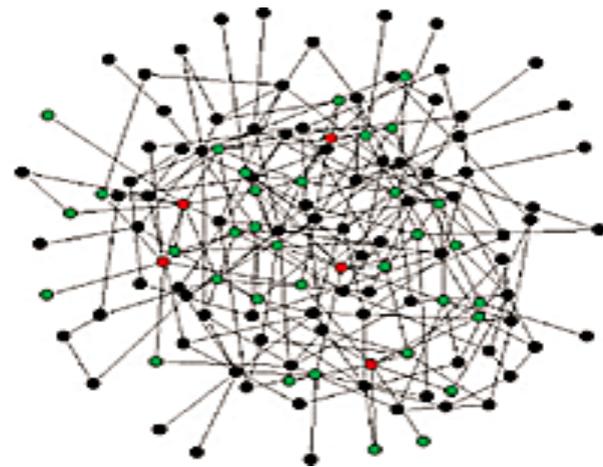


# Gráficas Aleatorias

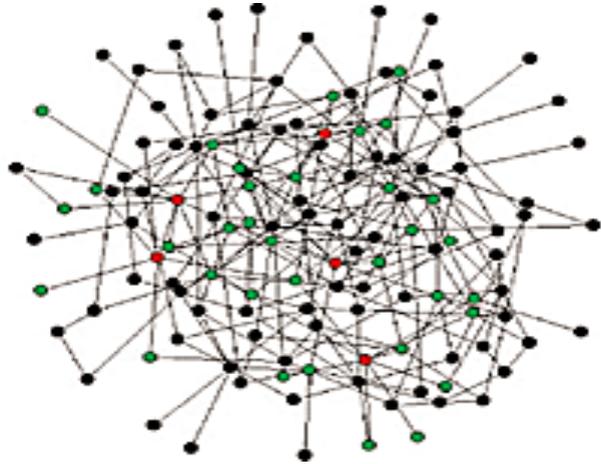
- Una gráfica aleatoria es una colección de puntos (vértices), con líneas (aristas), uniendo pares de ellos de manera aleatoria.



Con mayor numero de aristas.  
Conectados a 27% de toda la red.



# Gráficas Aleatorias (cont)



Gráfica Aleatoria

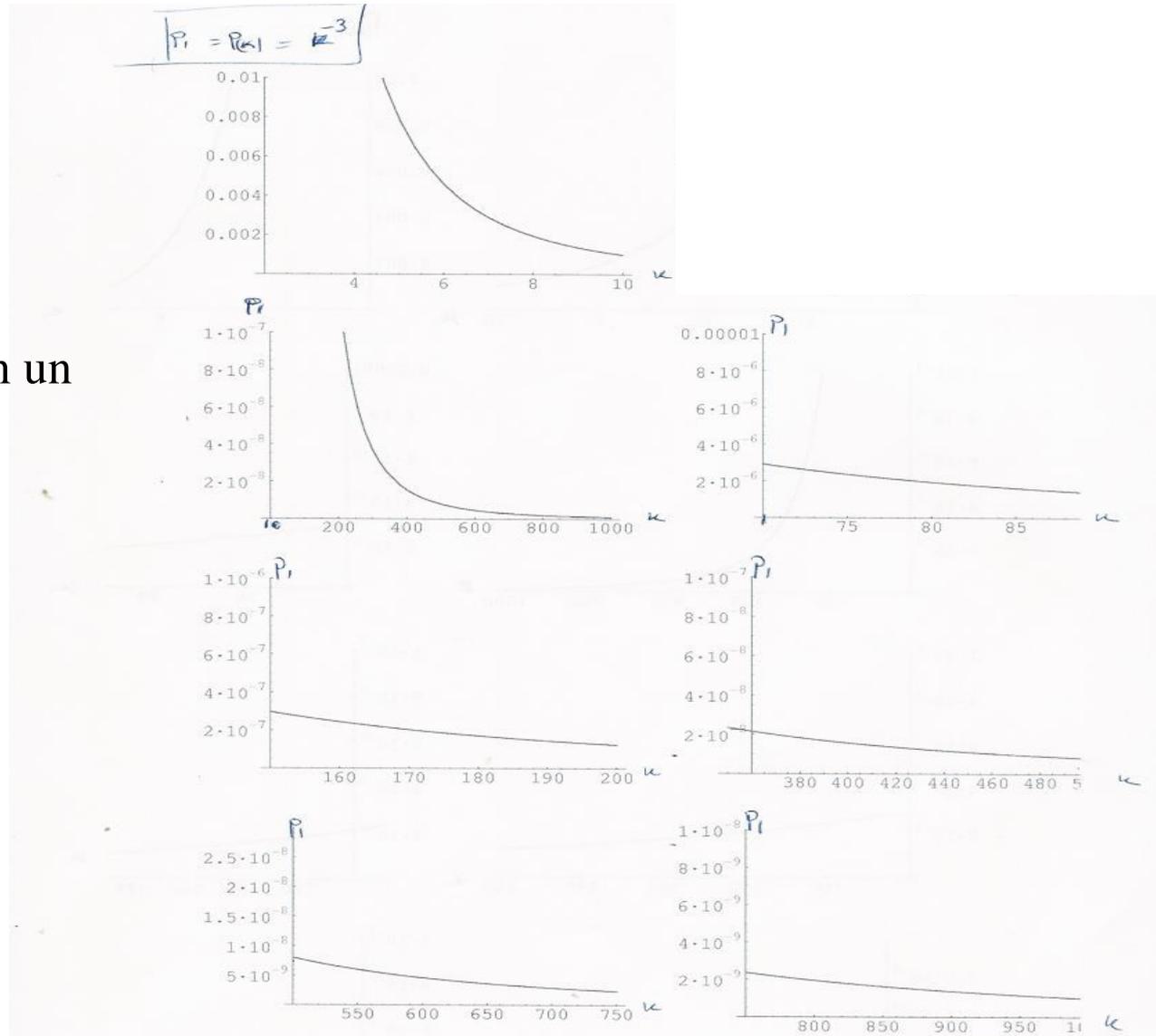
Teoría Erdős y Rényi



Información de redes  
reales

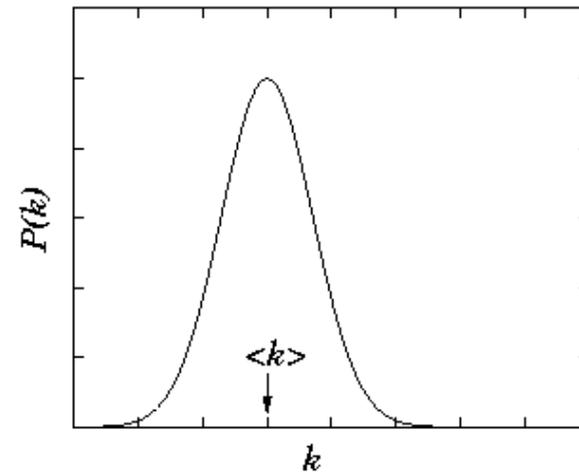
# Ley de Potencia

- Barabási y Albert, 1999.
- Independiente del sistema
- $P(k) \sim k^{-\gamma}$ .
- Redes se auto-organizan en un estado de *escala libre*.



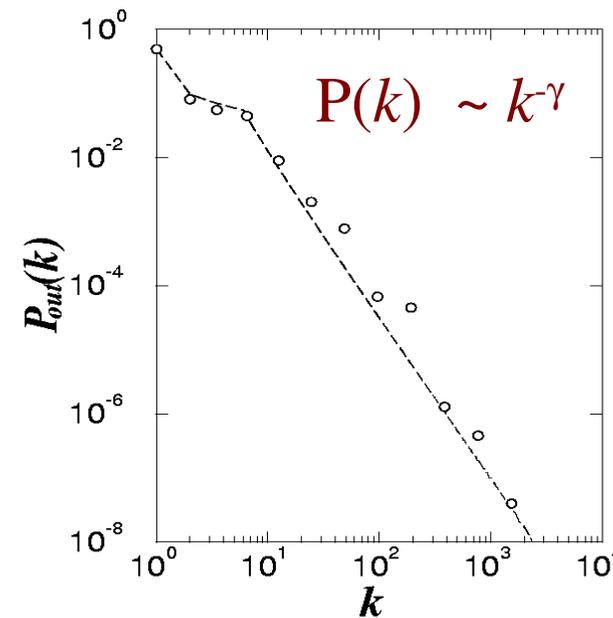
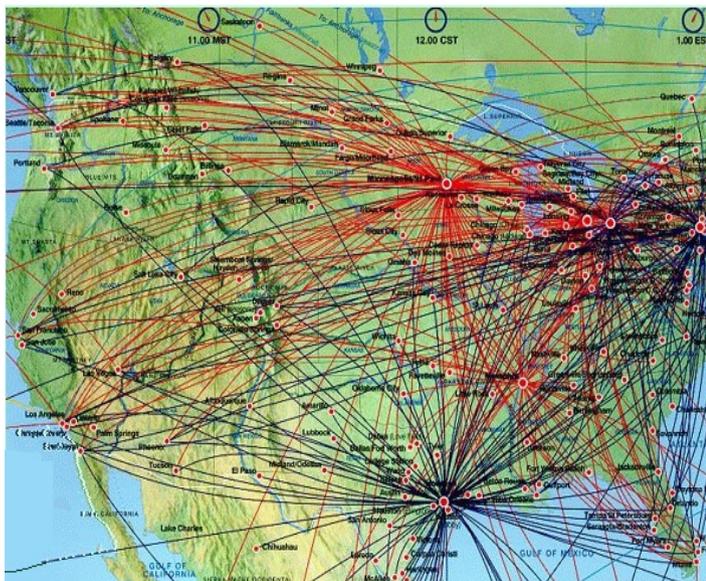
# Red Exponencial vs Escala Libre

Red Exponencial



Esperado

Red de Escala Libre



Encontrado

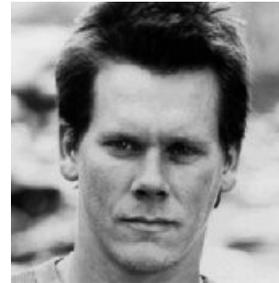
# Experimento 1



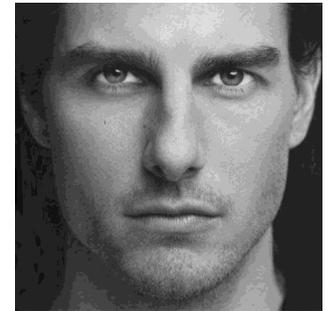
Charles Chaplin



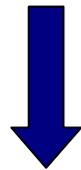
Kevin Bacon



Tom Cruise



A Few Good Men



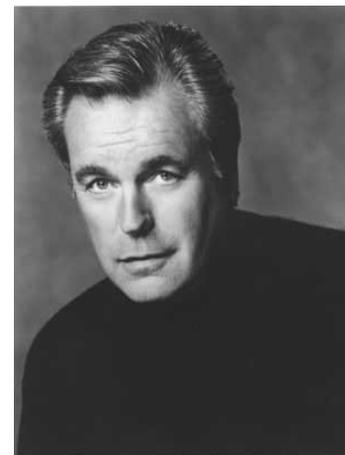
Monsieur Verdoux

Barry Norton



Wild Things

What Price Glory

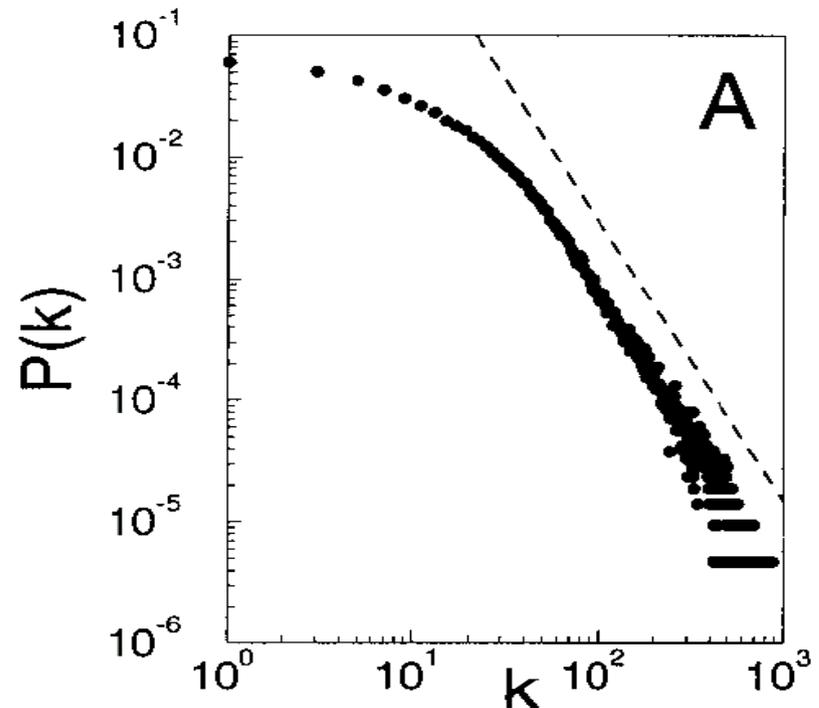


Robert Wagner

Red de colaboración de actores.

# Experimento 1 (cont.)

- Con  $N=212,250$  vértices y una conectividad promedio  $\langle k \rangle = 28.78$ .
- $P(k) \sim k^{-\gamma_{actor}}$  con  $\gamma_{actor} = 2.3 \pm 0.1$ .



# Experimento 2



Red eléctrica del  
Occidente de EUA.



Vértices:

- Generadores.
- Transformadores.
- Subestaciones.

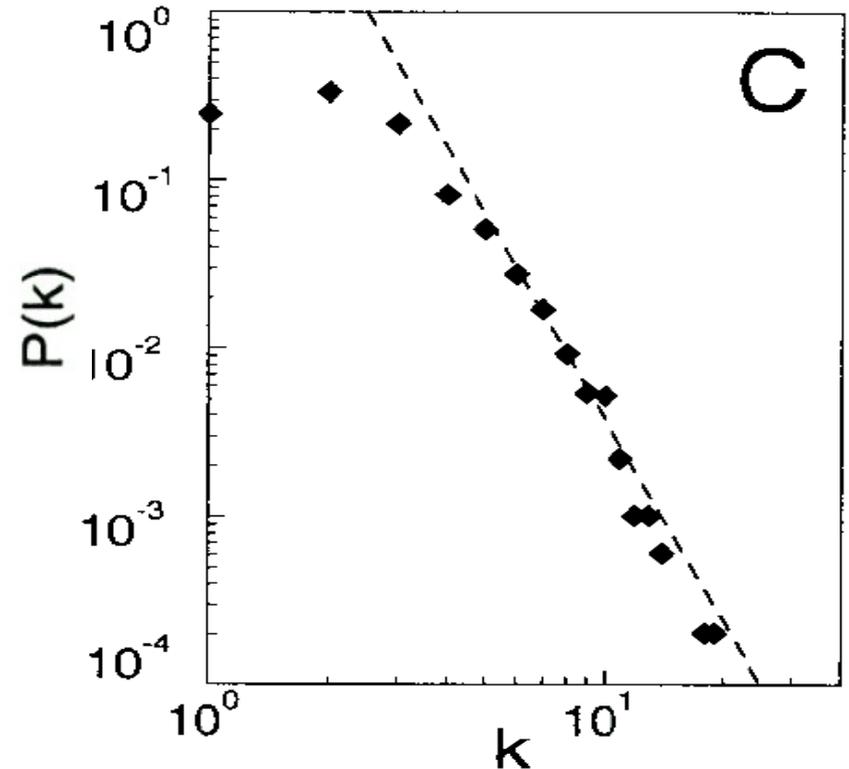


Aristas:

- Líneas de transmisión de alto voltaje.

## Experimento 2 (cont)

- Con  $N=4941$  vértices y una conectividad promedio  $\langle k \rangle = 2.67$ .
- $P(k) \sim k^{-\gamma_{power}}$  con  $\gamma_{power} \approx 4$ .



# Experimento 3

Red de referencias en publicaciones científicas.



barabasi science 286

**Scholar** Results 1 - 10 of about 2,150 for barabasi **scien**

[Emergence of scaling in random networks](#)  
AL Barabasi, R Albert, H Jeong - **Science**, 1999 - [dx.doi.org](#)  
... 12588 [Abstract] [Full Text]; Ravasz, E., Somera, AL,  
Mongru, DA, Oltvai, ZN, Barabasi,  
AL (2002 ... **Science** 287: 2115a-2115 [Full Text]. Volume  
286, Number 5439 ...  
[Cited by 1163](#) - [Web Search](#) - [sciencemag.org](#) -  
[academic.csuohio.edu](#) - [www-personal.umich.edu](#) - [all 9](#)

Vértices:

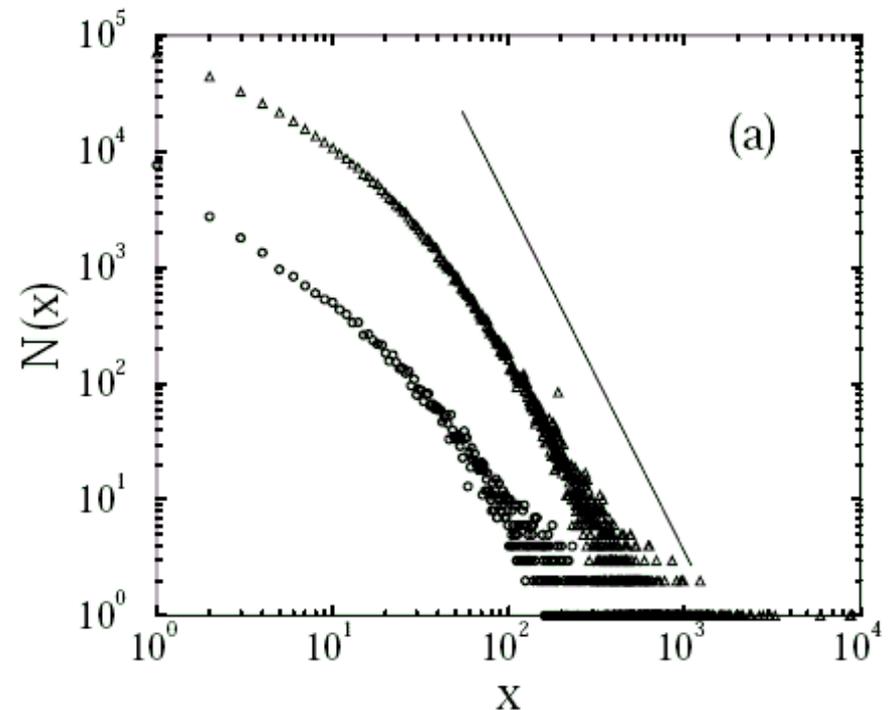
- Artículos publicados en revistas.

Aristas:

- Links a los artículos citados en algún otro.

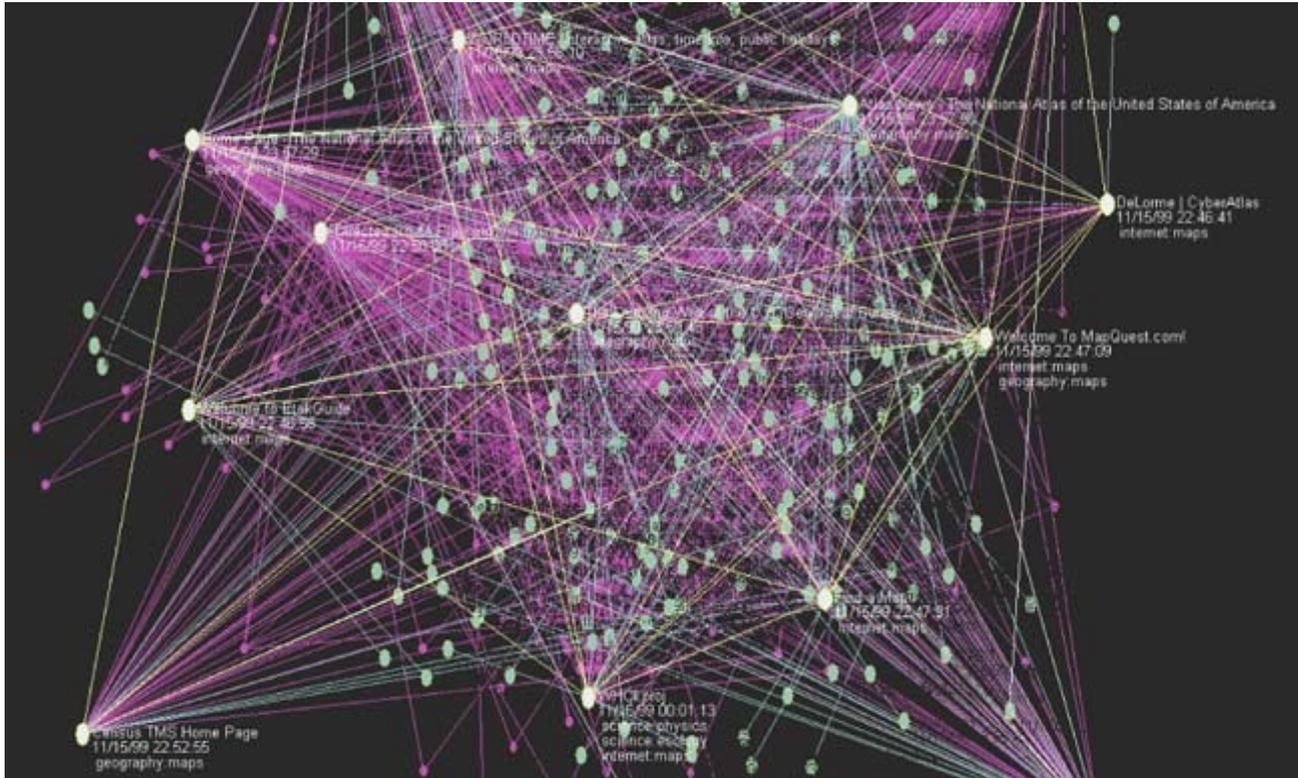
# Experimento 3 (cont)

- Fue demostrado por S. Redner (1998).
- $P(k) \sim k^{-\gamma_{cite}}$  con  $\gamma_{cite} = 3$ .
- Con
  - $\Delta$   $N=783,339$  ISI.
  - $\circ$   $N=24,296$  PRD.



# Experimento 4

World Wide Web.



- Gráfica dirigida.
- Medio menos controlado.
- Tamaño estimado en 1999,  $8 \times 10^8$  documentos.
- ¿Qué importancia tiene estudiar su topología?

# WWW

» [TEXT VERSION](#) [CALENDAR](#) | [DIRECTORIES](#) | [NEWS](#) | [ABOUT ND](#)

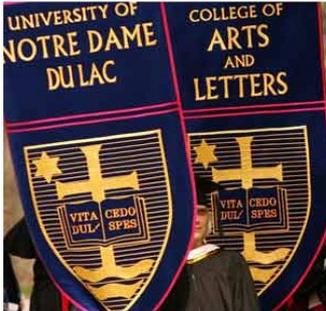
UNIVERSITY OF **NOTRE DAME**

RESOURCES FOR  
PROSPECTIVE STUDENTS  
CURRENT STUDENTS  
FACULTY & STAFF  
ALUMNI  
PARENTS  
VISITORS



[Annex or atelier, art is at its heart](#)

COLLEGES & SCHOOLS  
LIBRARIES | ARCHIVES  
RELIGIOUS LIFE  
INTERNATIONAL  
RESEARCH  
TECHNOLOGY  
OFFICES & DEPARTMENTS  
ATHLETICS  
PERFORMING & VISUAL ARTS  
GIVING TO NOTRE DAME



Matt Cashore

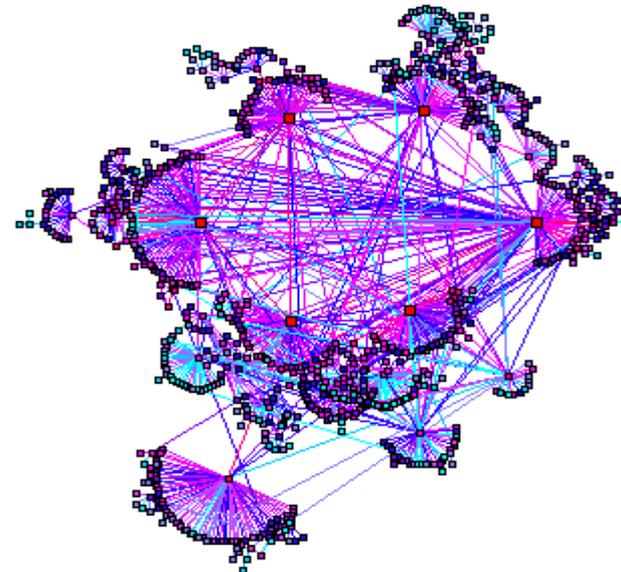
NOTRE DAME HEADLINES  
Father Jenkins recalls past in charting course for future  
[Full Story & More News](#)

Popular Sites  [EMPLOYMENT](#) | [ND A TO Z](#) | [SEARCH](#) | [FEEDBACK](#)  Search ND.edu

 UNIVERSITY OF NOTRE DAME  
Copyright ©2005 University of Notre Dame  
Notre Dame, Indiana 46556 Phone: 574-631-5000

**Robot:** Añade a su base de datos todos los URLs encontrados en un documento, y los sigue recursivamente.

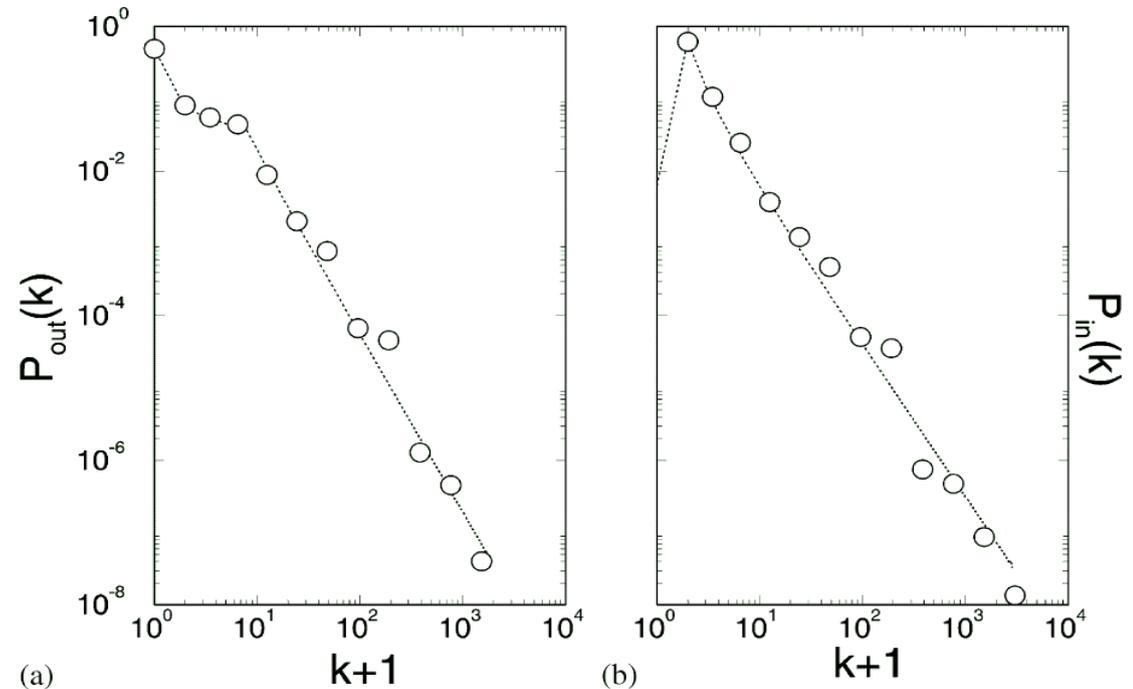
**Dominio:** *nd.edu* con 325,729 documentos y 1,469,680 links.



R. Albert, H. Jeong, A-L Barabasi, *Nature*, **401** 130 (1999).

# WWW(cont)

- Determinaron que
  - $P_{out}(k) \sim k^{-\gamma_{out}}$  con  $\gamma_{out} = 2.5$  y
  - $P_{in}(k) \sim k^{-\gamma_{in}}$  con  $\gamma_{in} = 2.1$
- Figura (a) links de salida, (b) links de entrada.



# Diecinueve Grados de Separación

Crearon una grafica con  $N$  nodos, siguiendo

$$P_{out}(k) \sim k^{-2.5} \quad P_{in}(k) \sim k^{-2.1}$$

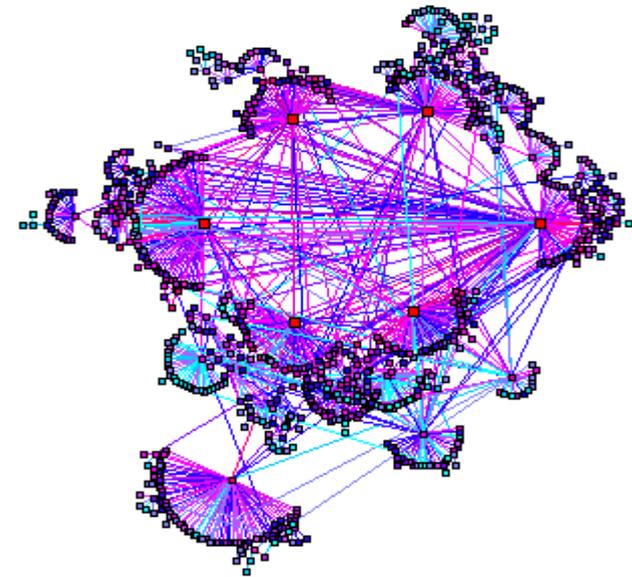
Se encontró  $\langle l \rangle = 0.35 + 2.06 \log(N)$

Donde  $\langle l \rangle$  es el camino mas corto entre dos documentos.

Usando  $N = 8 \times 10^8$ , se tiene que

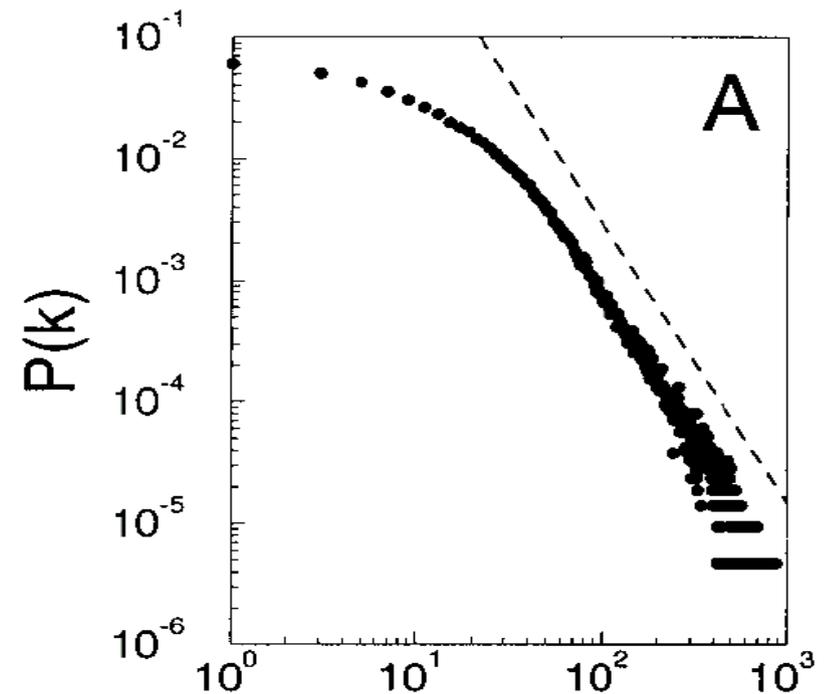
$$\langle l_{www} \rangle = 18.59$$

Al aumentar  $N$  en 1000%,  $\langle l \rangle$   
cambia de 19 a 21



¿Buscadores?

¿Cuál es el mecanismo que lleva a este tipo de comportamiento?



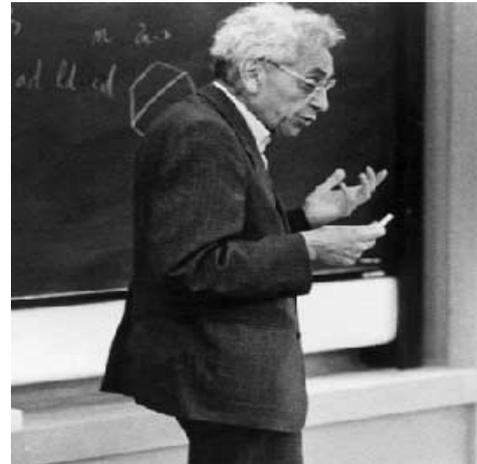
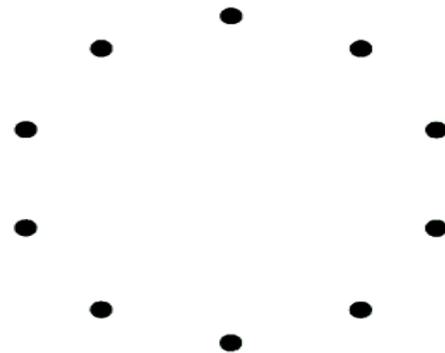
# ¿Qué sigue?

- 1) Revisar dos modelos anteriores.
- 2) Presentar modelo de escala libre y dos casos limitados.
- 3) Presentar una red de escala libre determinista.
- 4) Conclusiones.

# Modelo Erdős-Rényi (ER)

- “*On Random Graphs*”, 1959

$p_{ER}=0$



Paul Erdős

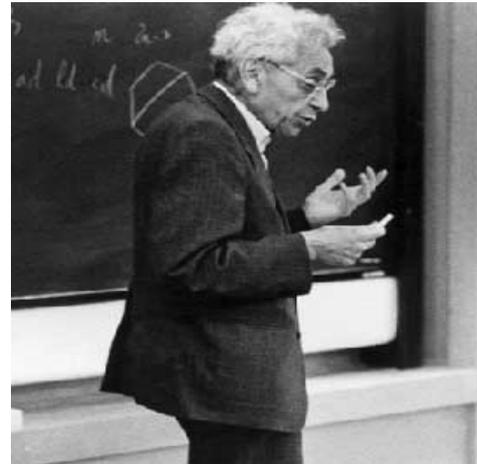


Alfréd Rényi

- $N$  fijo

# Modelo Erdős-Rényi (ER)

- “*On Random Graphs*”, 1959



Paul Erdős

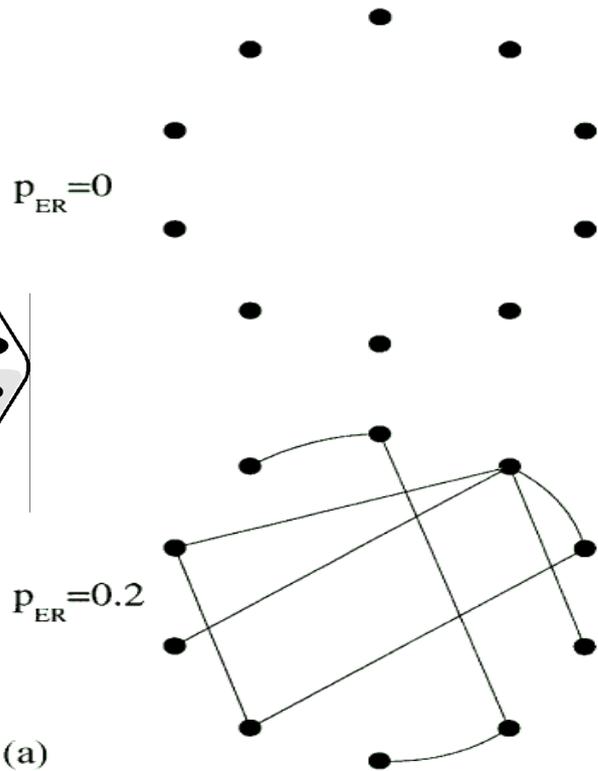


Alfréd Rényi

$p_{ER}=0$

$p_{ER}=0.2$

(a)

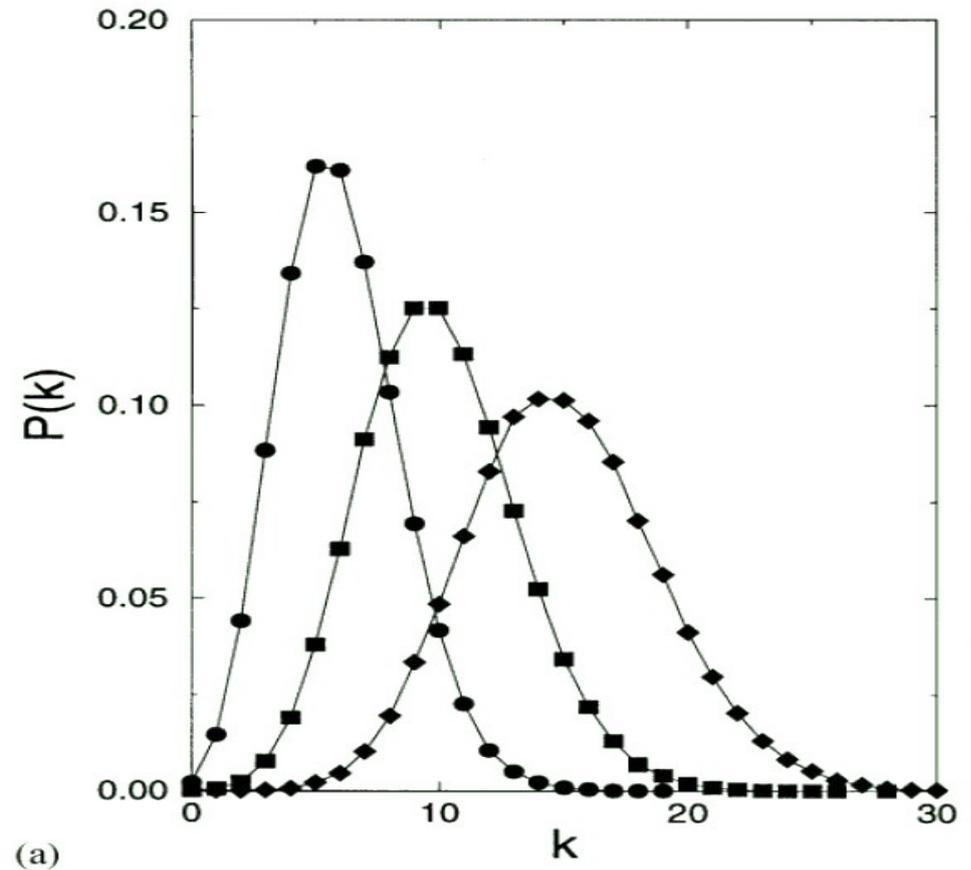


- $N$  fijo
- Conectar con probabilidad  $p_{ER}$

# Modelo Erdős-Rényi (cont)

- $P(k)$  sigue una distribución de Poisson.

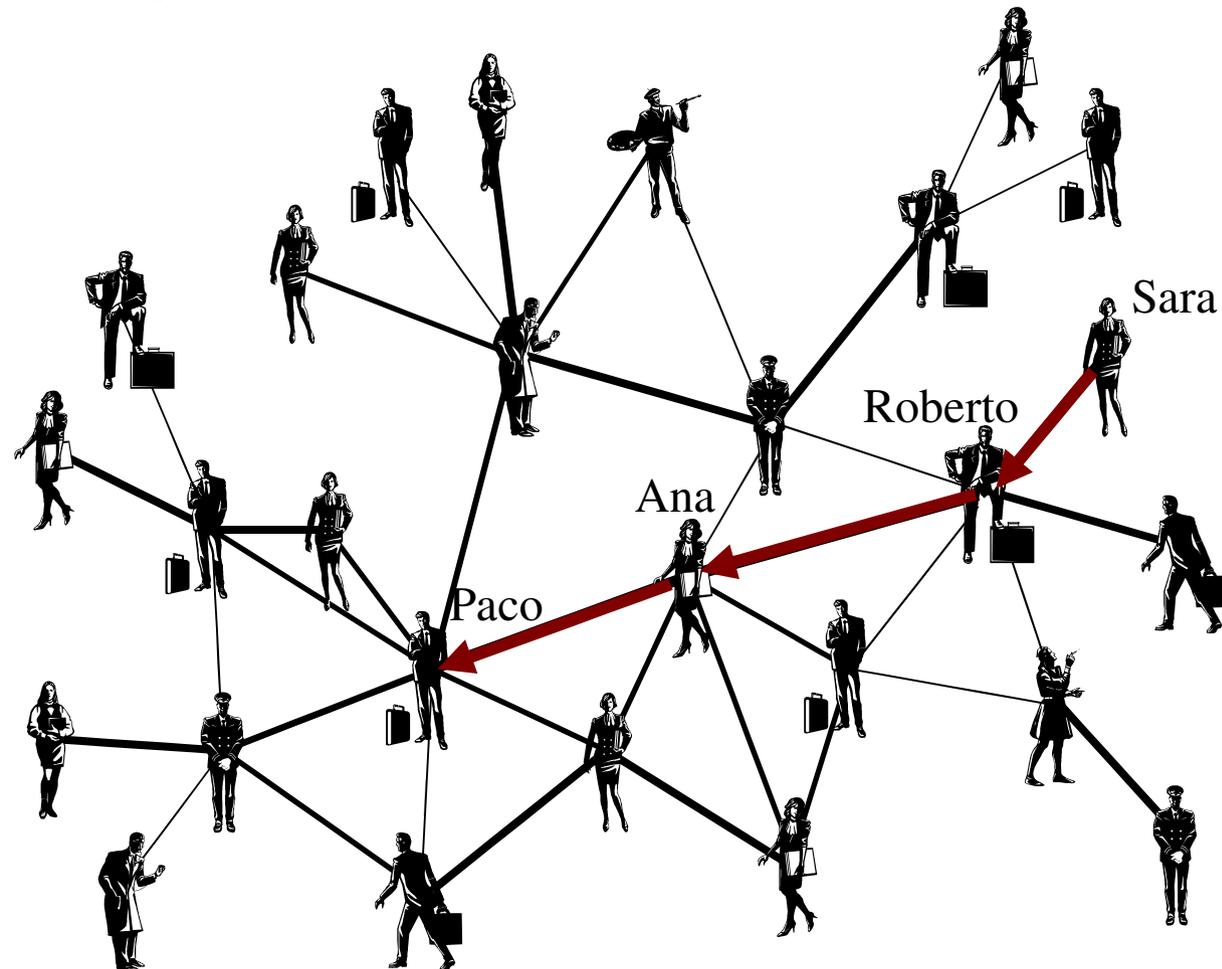
$$P(k) \sim e^{-\lambda} \lambda^k / k!$$



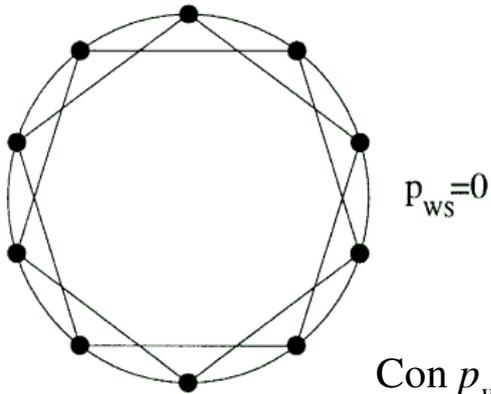
$N=10,000$ . ●  $p_{ER}=0.0006$ , ■  $p_{ER}=0.001$ ,  
◆  $p_{ER}=0.0015$ .

# Modelo “Small-World” (WS)

- D.J. Watts y S. H. Strogatz, 1998



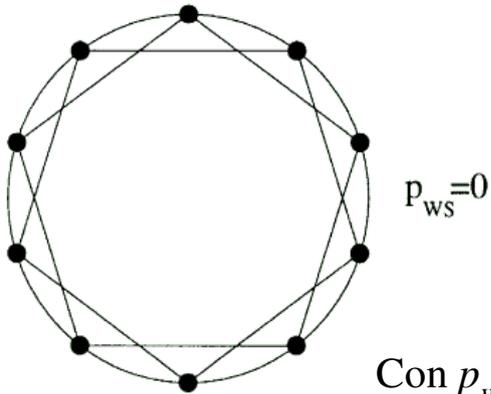
# Modelo “Small-World” (cont)



Con  $p_{ws} = 0$ , tiene  $2N = 20$  aristas.

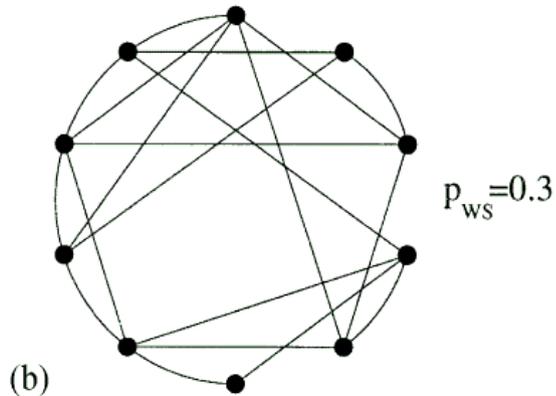
- $N$  vértices forman una malla unidimensional, donde cada vertice es conectado a su vecino mas cercano y siguiente mas cercano.

# Modelo “Small-World” (cont)



Con  $p_{ws}=0$ , tiene  $2N=20$  aristas.

- $N$  vértices forman una malla unidimensional, donde cada vertice es conectado a su vecino mas cercano y siguiente mas cercano.



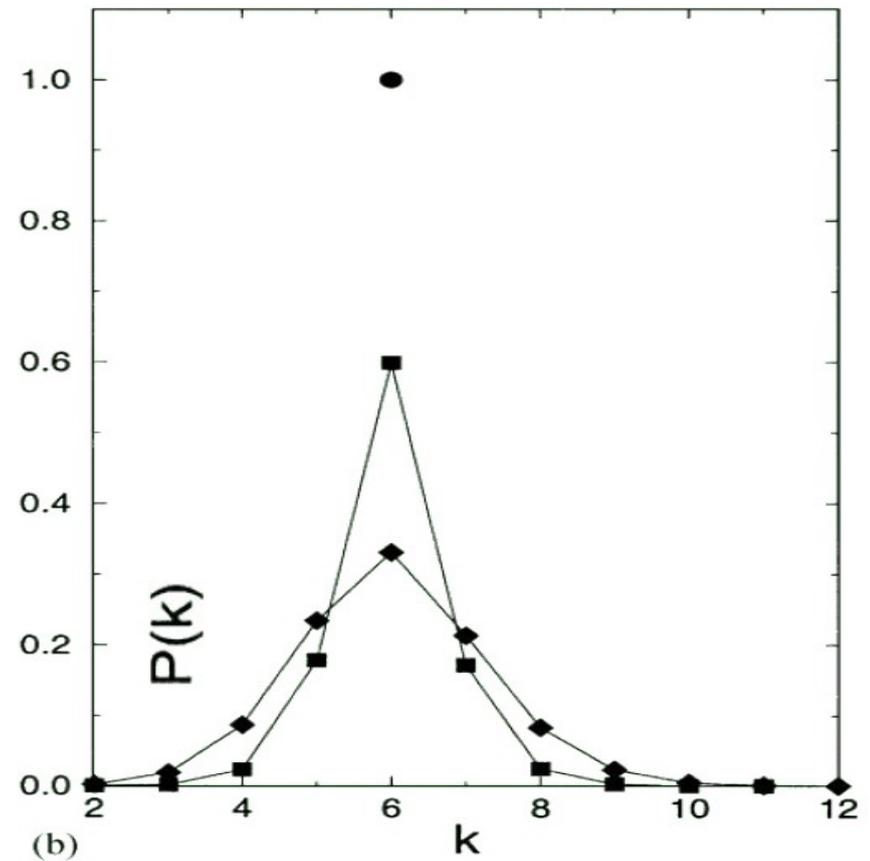
Con  $p_{ws}=0.3$ ,  $2p_{ws}N=6$  aristas reconectadas.

- Con probabilidad  $p_{ws}$  cada arista es reconectada con otro vertice aleatoriamente.

# Modelo “Small-World” (cont)

- Con  $p_{WS}=0$ ,  $P(k)$  sigue una distribución tipo Delta.

$$P(k) \sim \delta(k - \langle k \rangle)$$



$N=10,000, \langle k \rangle=6$ . ●  $p_{WS}=0$ , ■  $p_{WS}=0.1$ ,  
◆  $p_{WS}=0.3$ .

# Resumen de Modelos

Modelos ER y WS.

Redes Reales.

Probabilidad de encontrar vértice con  
muchas conexiones.

Decrece exponencialmente  
con  $k$ .

Grande

# Modelo de Escala Libre (Barabási y Albert)

Modelos ER y WS.

Redes Reales.

Asumen  $N$  fija

$N$  crece con tiempo vida

Probabilidad dos vértices se conecten es: aleatoria y uniforme.

*Conexión preferencial.*

Modelo basado en crecimiento y conexión lleva a la distribución de escala libre observada.

# Crecimiento

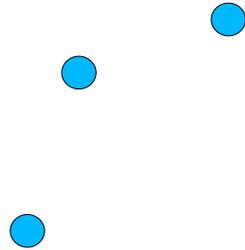
- Se agregan vértices a la red de la siguiente manera:
  - Se empieza con un número pequeño de vértices  $m_0$ .
  - Cada tiempo  $t$  se agrega un nuevo vértice con  $m(\leq m_0)$  aristas, que ligan el nuevo vértice con  $m$  vértices en la red.

# Conexión Preferencial

- Los vértices son conectados de acuerdo a lo siguiente:
  - La probabilidad  $\Pi$  de que un nuevo vertice se conecte con un vertice  $v_i$ , depende de la conectividad  $k_i$  de  $v_i$ .
  - $\Pi(k_i) = k_i / \sum_j k_j$ .

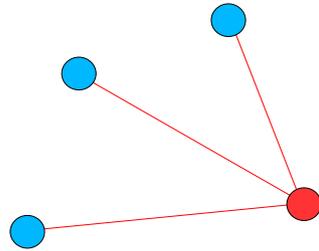
# Ejemplo

- Sea  $m_0=3$  y  $m=3$



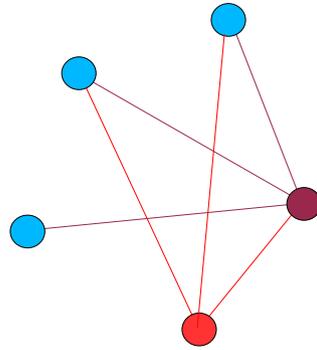
# Ejemplo

- Sea  $m_0=3$  y  $m=3$



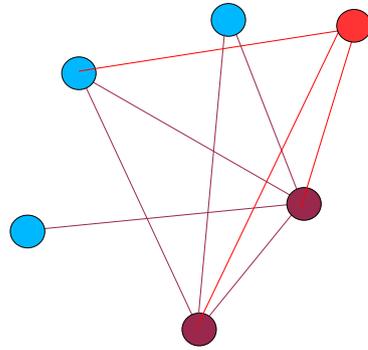
# Ejemplo

- Sea  $m_0=3$  y  $m=3$



# Ejemplo

- Sea  $m_0=3$  y  $m=3$



# Resultados

- Después de  $t$  pasos, el modelo llega a una red aleatoria con  $N=t+m_0$  vértices y  $mt$  aristas.

- Figura,  $N=300,000$ ,

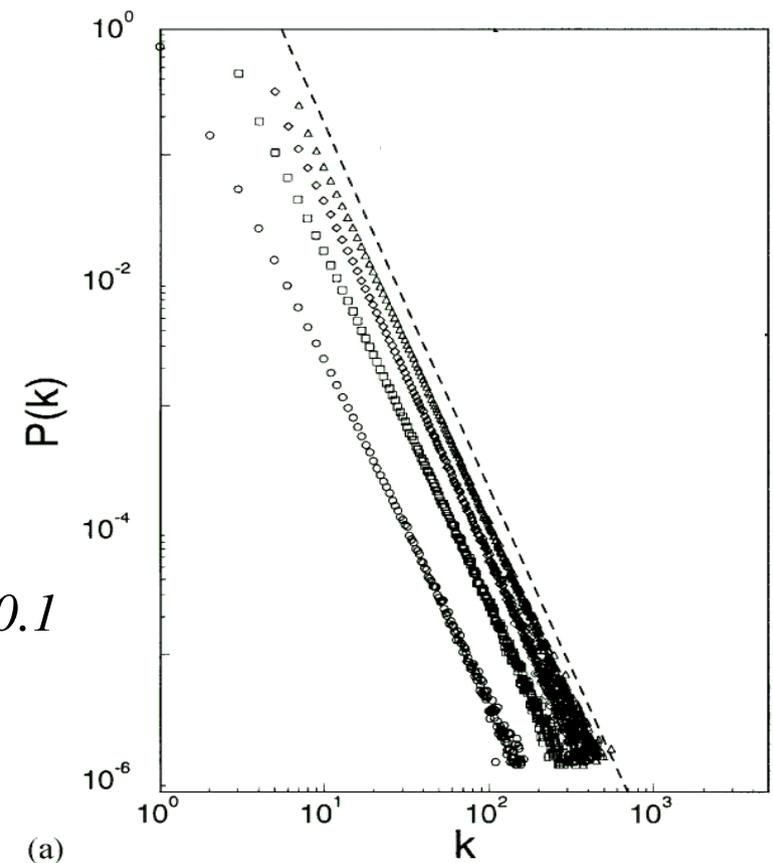
●  $m_0=m=1$ ,

■  $m_0=m=3$ ,

□  $m_0=m=5$ ,

▲  $m_0=m=7$ .

- La pendiente de la línea punteada es  $\gamma_{\text{model}}=2.9\pm 0.1$



# Resultados (cont)

- La ley de potencia observada para las redes reales describe sistemas de gran variedad de tamaños y en diferentes estados de su crecimiento.
- Un modelo correcto debería ser independiente del tiempo.

# Resultados (cont)

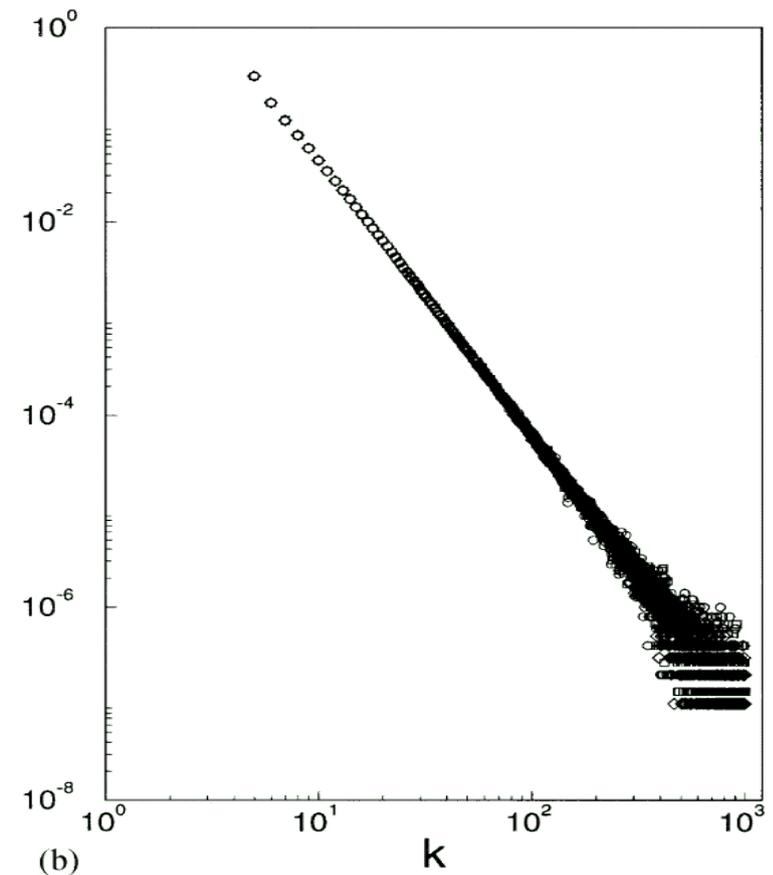
- $P(k)$  es independiente del tiempo, en consecuencia, independiente de  $N=t+m_0$ .

- Figura,  $m_0=m=5$

●  $N=100,000$ ,

■  $N=150,000$ ,

$N=200,000$ .



Dos ingredientes(**Modelo BA**):

1. **Crecimiento.**
2. **Conexión preferencial.**

**Modelo A:**

1. **Crecimiento.**
2. ~~**Conexión preferencial.**~~

**Modelo B:**

1. ~~**Crecimiento.**~~
2. **Conexión preferencial.**



# Modelo A

- El crecimiento se hace como en el modelo BA.
- La conexión preferencial se elimina, asumiendo que un nuevo vertice se conecta, con igual probabilidad, a cualquier vertice del sistema.
  - $\Pi(k) = \text{const} = 1/(m_0 + t - 1)$

# Modelo A (cont)

- Presenta  $P(k) \sim \exp(-(1/m)k)$
- i.e. se elimina la propiedad de escala libre.

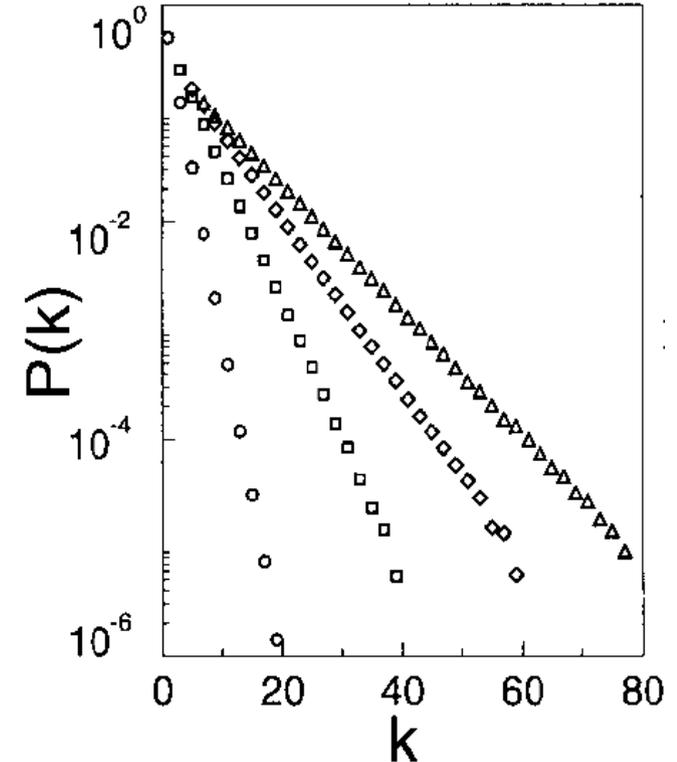
■ Figura,  $N=800,000$

●  $m_0=m=1,$

■  $m_0=m=3,$

$m_0=m=5,$

▲  $m_0=m=7$



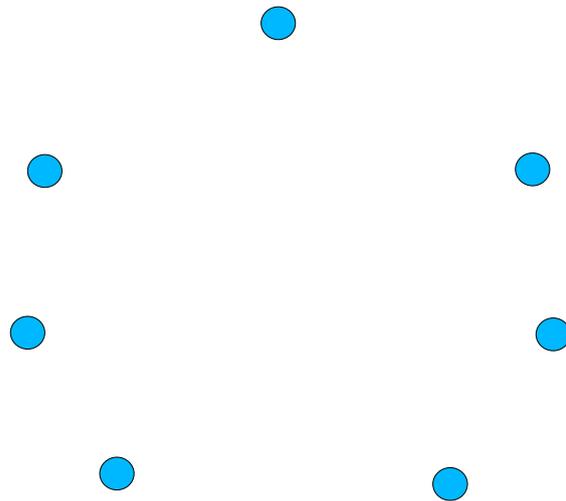
# Modelo B

- Prueba la hipótesis de que el crecimiento es esencial para que se presente la característica de escala libre observada.
- Se empieza con  $N$  vértices y ninguna arista.
- En cada paso, se selecciona un vertice de manera aleatoria y se conecta con probabilidad  $\Pi(k_i) = k_i / \sum_j k_j$  a un vertice  $i$  en el sistema.

# Modelo B (cont)

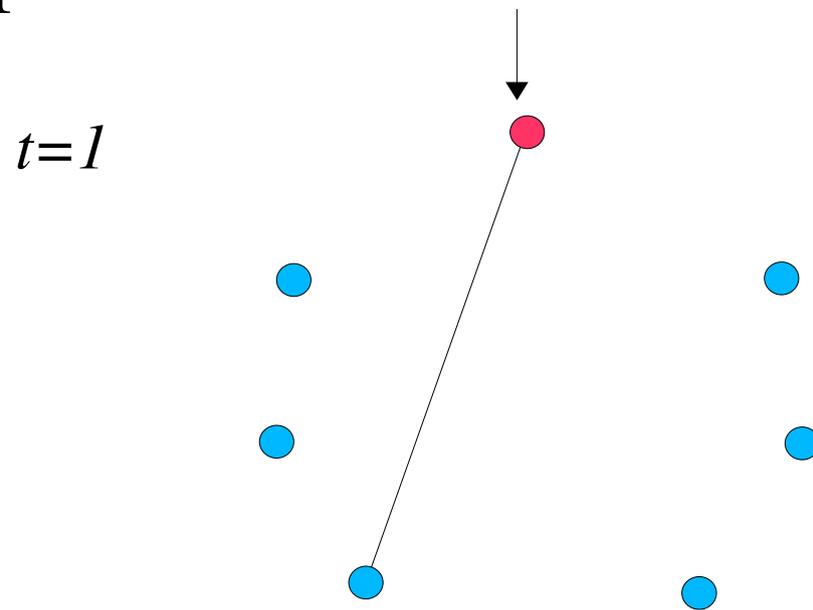
- Ejemplo.  $N=7$ .

$t=0$



# Modelo B (cont)

- Ejemplo.  $N=7$ .

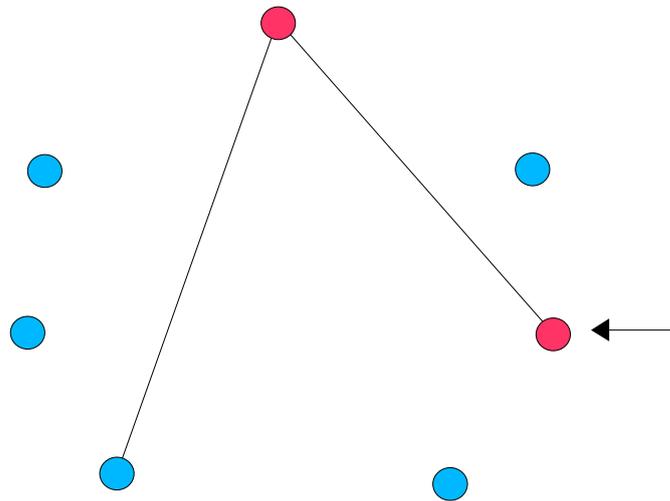


$$P(k_i) = k_i / \sum_j k_j$$

# Modelo B (cont)

- Ejemplo.  $N=7$ .

$t=2$

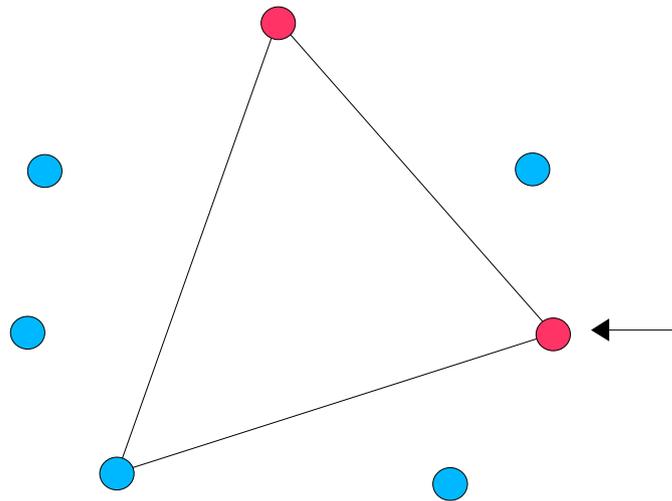


$$P(k_i) = k_i / \sum_j k_j$$

# Modelo B (cont)

- Ejemplo.  $N=7$ .

$t=3$

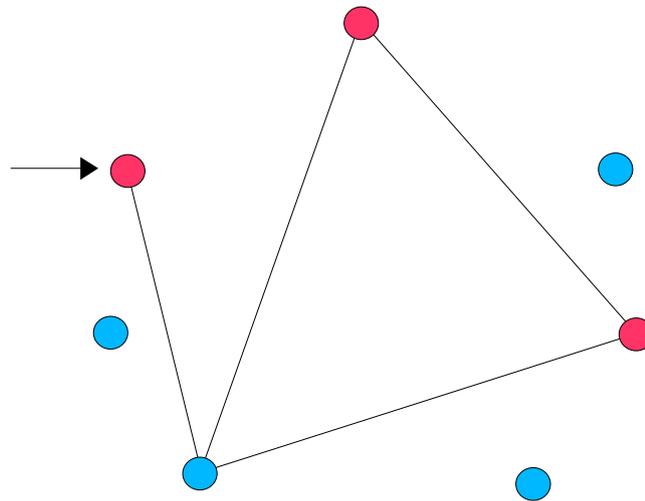


$$\Pi(k_i) = k_i / \sum_j k_j$$

# Modelo B (cont)

- Ejemplo.  $N=7$ .

$t=4$

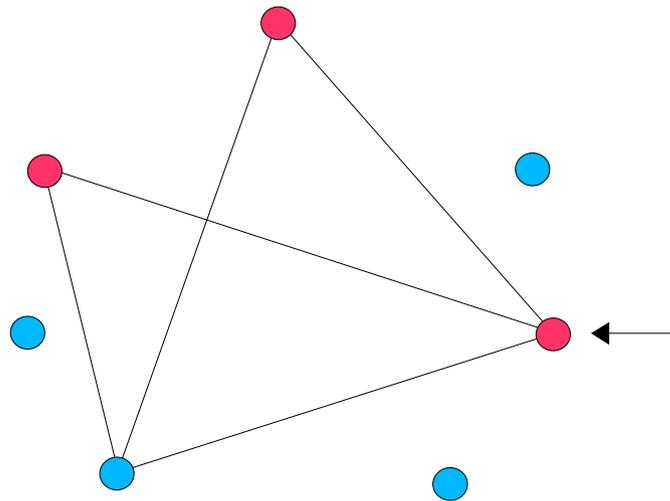


$$\Pi(k_i) = k_i / \sum_j k_j$$

# Modelo B (cont)

- Ejemplo.  $N=7$ .

$t=5$

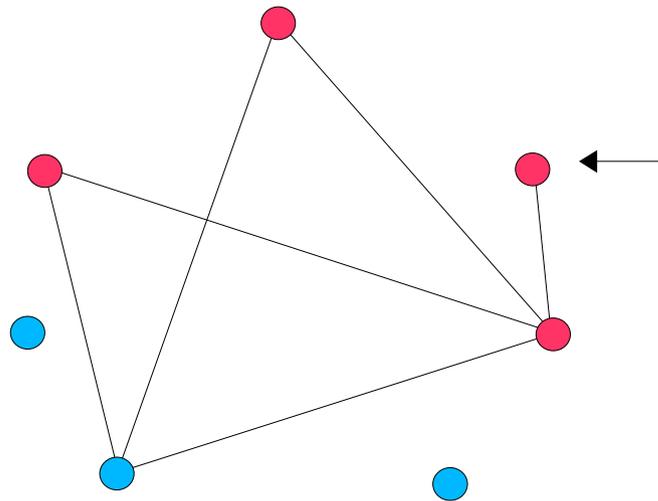


$$\Pi(k_i) = k_i / \sum_j k_j$$

# Modelo B (cont)

- Ejemplo.  $N=7$ .

$t=6$

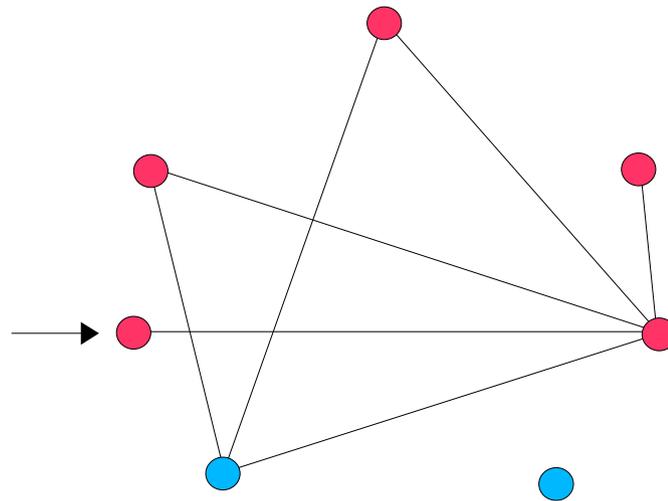


$$\Pi(k_i) = k_i / \sum_j k_j$$

# Modelo B (cont)

- Ejemplo.  $N=7$ .

$t=7$

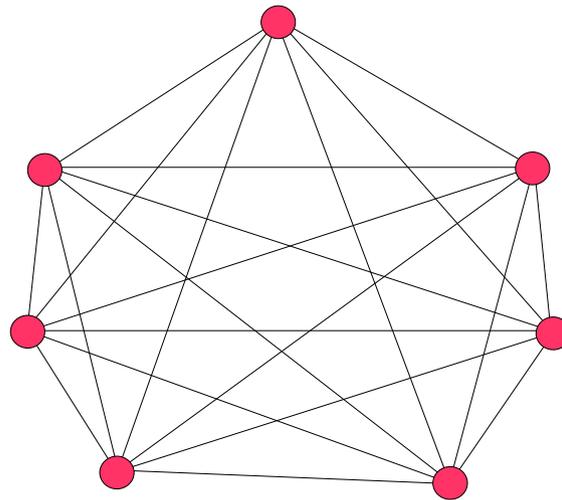


$$\Pi(k_i) = k_i / \sum_j k_j$$

# Modelo B (cont)

- Ejemplo.  $N=7$ .

$t \quad N^2$



$$P(k_i) = k_i / \sum_j k_j$$

# Modelo B (cont)

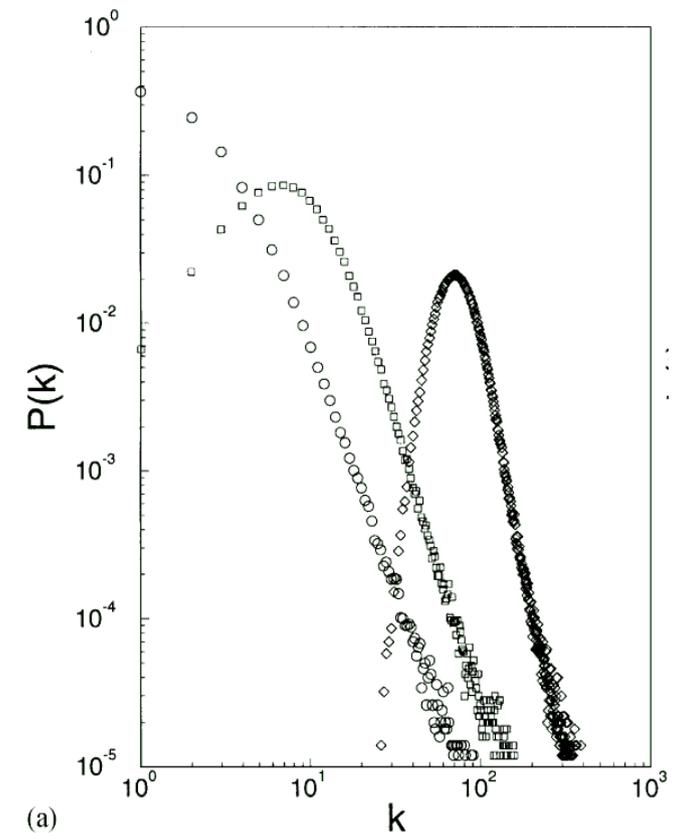
- $P(k)$  se comporta como una Gaussiana.

- Figura,  $N=10,000$

●  $t=N,$

■  $t=5N,$

$t=40N.$



# Resultado

- Ambos, crecimiento y conexión preferencial, son necesarios para el desarrollo de la distribución de ley de potencia (estacionaria) observada en los experimentos.

Dos ingredientes(**Modelo BA**):

1. **Crecimiento.**
2. **Conexión preferencial.**





Características de Escala Libre en Redes  
Aleatorias  
Parte II

*Dolores Lara.  
Octubre, 2005.*

# Small World

<http://smallworld.columbia.edu/>

The screenshot displays the Small World project website interface. On the left, there are navigation menus for 'Events and News', 'Project Information', 'Research Team', and 'Web Development'. The main content area features a network diagram with circular nodes representing participants, connected by lines. Each node includes a portrait and a brief description of the participant's background or activities. On the right side, there are links for 'home', 'my small world', 'chat', 'FAQ', and 'related links', along with 'login' and 'sign up' buttons. The Columbia University logo is visible in the bottom left corner.

**Events and News**  
Duncan J. Watts's new book is out now!

**Project Information**  
In the Press  
Description  
Procedures  
Security and Privacy  
Articles/References  
Results

**Research Team**  
Duncan J. Watts  
Peter Dodds  
Roby Muhamad

**Web Development**  
Peter Hausel

Vijay (Delhi, India) worked at an engineering firm with

Sameer (Kolkata, India) whose daughter

Prema (Berkeley, USA) goes to school in California and plays soccer with

Christie (Berkeley, USA) whose best friend from high school

Alice (New York, USA)

William (New York, NY) is studying medicine with

The **SMALL WORLD** project is an online experiment to test the idea that any two people in the world can be connected via 'six degrees of separation'.

Your objective is to get a message to a "target person", somewhere in the world, by forwarding the message to a friend of yours--someone who is "closer" to the target than you are. (If you happen to know the target, you can of course send it to them)

If we have asked you to participate (you would have received a message from a friend of yours), you should **continue** the chain.

If you are just visiting us, sign up to start a new chain.

home  
my small world  
chat  
FAQ  
related links

login

sign up

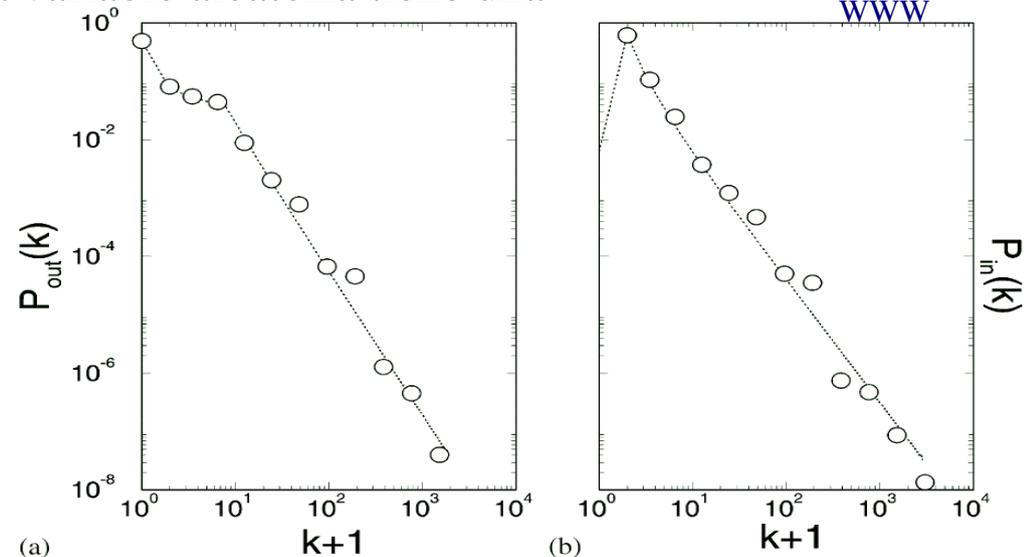
COLUMBIA UNIVERSITY  
THE CITY OF NEW YORK

# Ley de Potencia (otra vez)

Sea  $X$  una variable aleatoria no negativa. Tiene una distribución de ley de potencia, si:

$$\Pr[X \geq x] \sim cx^{-\alpha}$$

- En una distribución de ley de potencia, la curva decae asintóticamente de acuerdo con el exponente  $\alpha$ .
- En una gráfica log-log de  $\Pr[X \geq x]$ , el comportamiento es una línea recta.
- Provee un test empírico para verificar si una variable aleatoria tiene una distribución de ley de potencia.



# Ley de Potencia (cont)

Ejemplo. Distribución Pareto.

$$\Pr[X \geq x] = \left(\frac{x}{k}\right)^{-\alpha}$$

Con  $X \geq k$ , forzosamente.

Tomando logaritmos de ambos lados.

$$\ln(\Pr[X \geq x]) = -\alpha(\ln x - \ln k).$$

# Recordemos

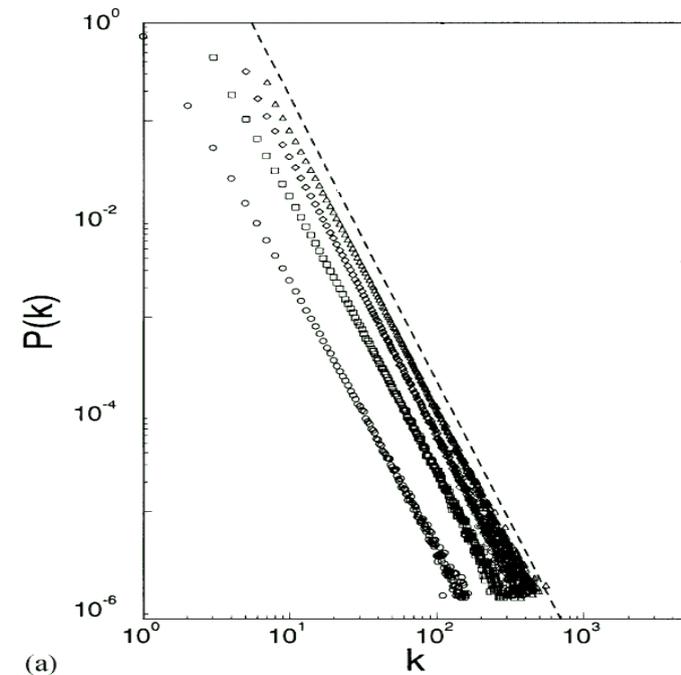
## Modelo BA:

1. Crecimiento,  
t=0  $m_0$  vertices  
t=i agregar un vertice con  $m(\leq m_0)$  aristas.
2. Conexión preferencial,  
Prob nuevo vertice se conecte  $v_i$  con  $k_i$  aristas:

$$P(k_i) = k_i / \sum_j k_j$$

Se obtuvo una distribución  $P(k) \sim k^{-\gamma}$ ,  
con  $\gamma_{\text{model}} = 2.9 \pm 0.1$

¿Cómo calcular  $\gamma$   
analíticamente?



# Calcular $\gamma$

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = A\Pi(k_i) = A \frac{k_i}{\sum_{j=1}^{m_0+t-1} k_j}$$

Tomando en cuenta que

$$\sum_j k_j = 2mt \quad \text{y} \quad \Delta k = m,$$

Se obtiene que  $A = m$ , y por lo tanto,  $\frac{\partial k_i}{\partial t} = \frac{k_i}{2t}$ .

Usando la cond inicial:  $k_i(t_i) = m$ ,

La solución es:

$$k_i(t) = m \left( \frac{t}{t_i} \right)^{0.5} .$$

# Calcular $\gamma$ (cont)

La probabilidad de que un vértice  $i$  tenga conectividad menor que  $k$ , se puede escribir como:

$$P(k_i(t) < k) = P\left(t_i > \frac{m^2 t}{k^2}\right)$$

Asumiendo que se añaden vértices en intervalos de tiempo iguales:

$$P_i(t_i) = \frac{1}{m_0 + t}$$

Se obtiene que:

$$P\left(t_i > \frac{m^2 t}{k^2}\right) = 1 - P\left(t_i \leq \frac{m^2 t}{k^2}\right) = 1 - \frac{m^2 t}{k^2(t + m_0)}.$$

Entonces,  $\gamma$  puede obtenerse usando:

$$P(k) = \frac{\partial P(k_i(t) < k)}{\partial k} = \frac{2m^2 t}{m_0 + t} \frac{1}{k^3} \sim k^{-3}$$

Por lo tanto:

$$\gamma =$$

# Conclusiones

## Modelo BA:

1. Crecimiento,  
t=0  $m_0$  vertices  
t=i agregar un vertice con  $m(\leq m_0)$  aristas.
2. Conexión preferencial,  
Prob nuevo vertice se conecte  $v_i$  con  $k_i$  aristas:

$$P(k_i) = k_i / \sum_j k_j$$

# Conclusiones (cont)

## Modelo BA:

1. Crecimiento,  
t=0  $m_0$  vertices  
t=i agregar un vertice con  $m(\leq m_0)$  aristas.
2. Conexión preferencial,  
Prob nuevo vertice se conecte  $v_i$  con  $k_i$  aristas:

$$P(k_i) = k_i / \sum_j k_j$$

1. En redes reales,  $P(k_i) \sim k^\alpha$  no necesariamente  $\alpha = 1$

P. Krapvisky, et. al. "On the Emergence of Highly Variable Distributions in the Autonomous System Topology". Boston University.

Si,  $\alpha \neq 1$ , desviaciones del comportamiento de ley de potencia.

# Conclusiones (cont)

## Modelo BA:

1. Crecimiento,  
t=0  $m_0$  vertices  
t=i agregar un vertice con  $m(\leq m_0)$  aristas.
2. Conexión preferencial,  
Prob nuevo vertice se conecte  $v_i$  con  $k_i$  aristas:

$$P(k_i) = k_i / \sum_j k_j$$

1. En redes reales, nuevas aristas son creadas entre vértices ya existentes en la red. Las aristas y los vértices pueden desaparecer.

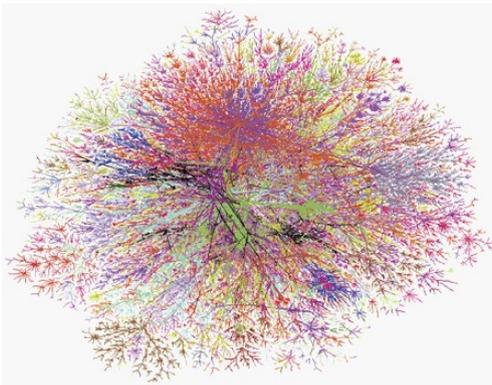
Jose Mendes, et. al. Universidad de Porto,  
Portugal

Permite practicamente cualquier valor para  $\gamma$ ,  
 $1 \leq \gamma \leq \infty$ .

# Conclusiones (cont)

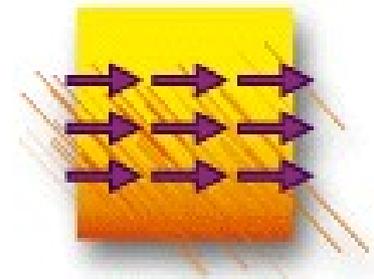
Leyes de Potencia

Redes Evolutivas



$\gamma$  cambia fácilmente  
modificando parametros que  
gobiernen aristas y vértices.

Fenómenos Críticos



Exponentes fijos.  
No cambian fácilmente al  
modificar parámetros.

Universalidad, al menos como la conocemos, esta  
ausente.

# Condensado Bose-Einstein



Nodos poseen habilidad de competir por links.



Menos de dos años para convertirse en uno de los nodos mas conectados de la red.

## Modelo de Aptitudes.

$$\Pi_i = \frac{\eta_i k_i}{\sum_e \eta_e k_e}.$$

- ✓ Aptitud de nodo  $i$  de competir por aristas:  $\eta_i$ .
- ✓ Se elige de una distribución  $\rho(\eta)$ .

# Condensado Bose-Einstein (cont)

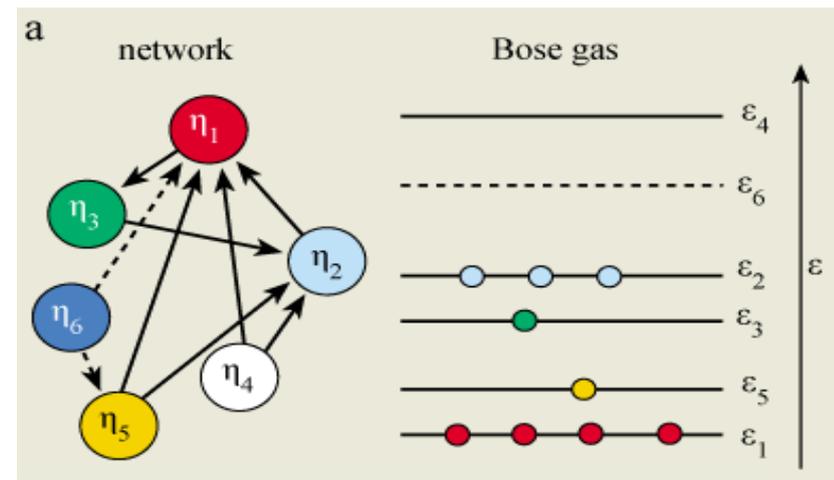
## Mapear red a un gas Bose:

1. Asignar una energía  $\epsilon_i$  a cada vértice.

$$\epsilon_i = -\frac{1}{\beta} \log \eta_i$$

Donde  $\beta = 1/T$ .

2. Una arista entre dos vértices  $i$  y  $j$  con energías  $\epsilon_i$  y  $\epsilon_j$  corresponde a dos *partículas* que no interactúan y que se encuentran en los niveles de energía  $\epsilon_i$  y  $\epsilon_j$ .



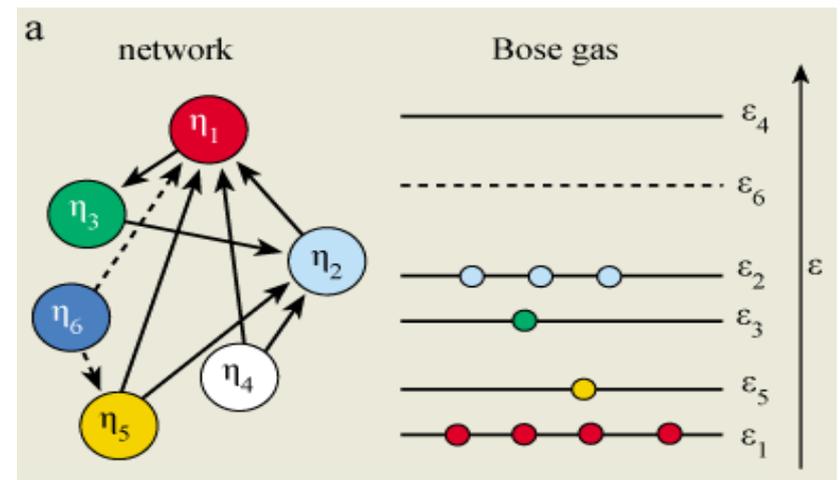
# Condensado Bose-Einstein (cont)

## Mapear red a un gas Bose:

3. Cada vértice (nivel de energía) agregado al sistema al tiempo  $t_i$ , con nivel de energía  $\epsilon_i$  es caracterizado por el número de ocupación  $k_i(\epsilon_i, t, t_i)$ .

4. Asumimos que cada vértice aumenta su conectividad siguiendo:

$$k_i(\epsilon_i, t, t_i) = m \left( \frac{t}{t_i} \right)^{f(\epsilon_i)}$$



# Condensado Bose-Einstein (cont)

Potencial químico del gas Bose obtenido:

$$I(\beta, \mu) = \int d\epsilon g(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} = 1.$$

Densidad media de partículas.      Potencial químico.

El sistema no es un Gas Bose en equilibrio:

1. En un gas cuántico, las partículas realizan transiciones nivel de energía a otro.
2. El número de niveles de energía en un gas Bose es fijo.

En el límite  
termodinámico:

Modelo de Aptitudes.



Gas Bose.

# Condensado Bose-Einstein (cont)

Potencial químico del gas Bose obtenido:

$$I(\beta, \mu) = \int d\epsilon g(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} = 1.$$

↑  
Potencial químico.

Tres distintas fases:

## 1. Fase de Escala Libre.

- Surge cuando todos los nodos tienen la misma aptitud.
- Describe “first-mover-wins”, nodo más viejo tiene más aristas.
- Haciendo cálculos se obtiene que  $f(\epsilon_i) = 1/2$ .

$$k_i(\epsilon_i, t, t_i) = m \left( \frac{t}{t_i} \right)^{f(\epsilon_i)}$$

- El vértice más viejo (y más rico) no es un ganador absoluto, ya que su ganancia de aristas decae a cero (como  $t^{-1/2}$ ) en el límite termodinámico.

# Condensado Bose-Einstein (cont)

Potencial químico del gas Bose obtenido:

$$I(\beta, \mu) = \int d\epsilon g(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} = 1.$$

Tres distintas fases:

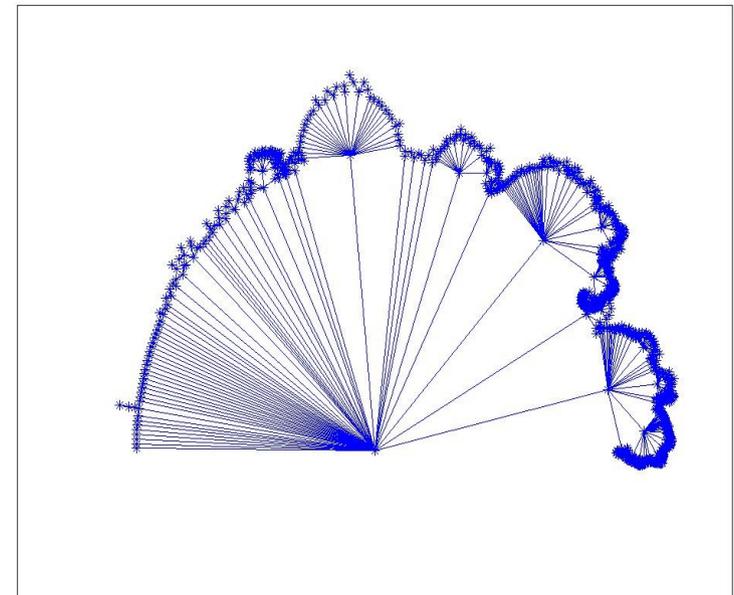
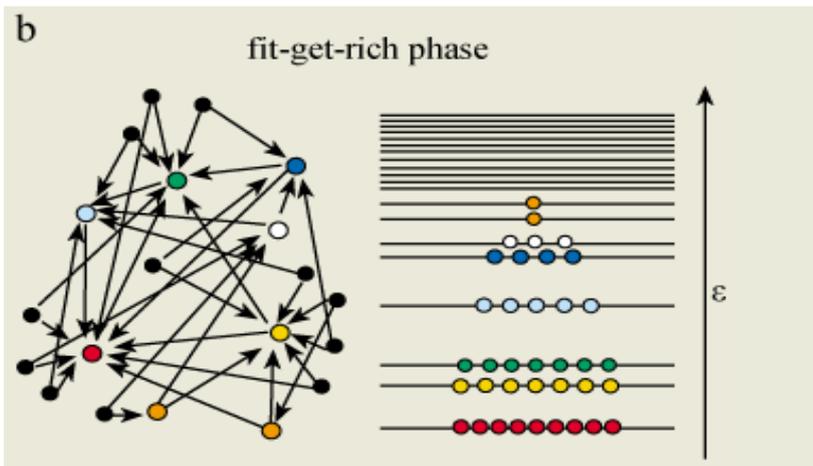
## 2.Fase “Fit-get-rich”.

- Surge cuando los nodos tienen diferentes valor de aptitud.  
Y la ecuación del potencial tiene una solución.
- Describe “fit-get-rich”, nodo mas apto tiene mas aristas.
- El nodo mas apto, no es un ganador absoluto, ya que su ganancia de aristas decrete a cero en el límite termodinámico.
- Nuevamente se llega a  $P(k) \sim k^{-\gamma}$ , donde  $\gamma$  puede calcularse analíticamente si  $\rho(\eta)$  es conocida.

# Condensado Bose-Einstein (cont)

Tres distintas fases:

2.Fase “Fit-get-rich”.



- La densidad de partículas disminuye conforme el nivel de energía se vuelve mas alto.

# Condensado Bose-Einstein (cont)

Potencial químico del gas Bose obtenido:

$$I(\beta, \mu) = \int d\epsilon g(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} = 1.$$

Tres distintas fases:

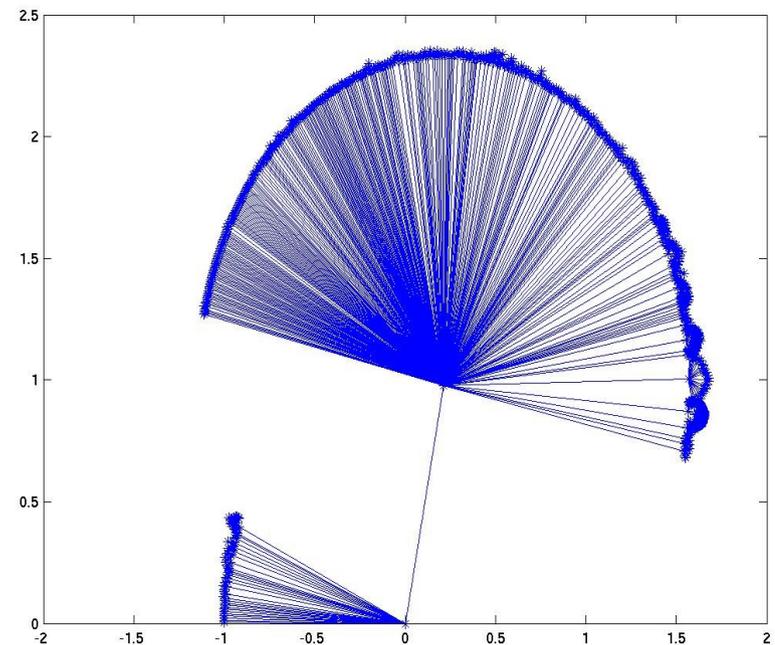
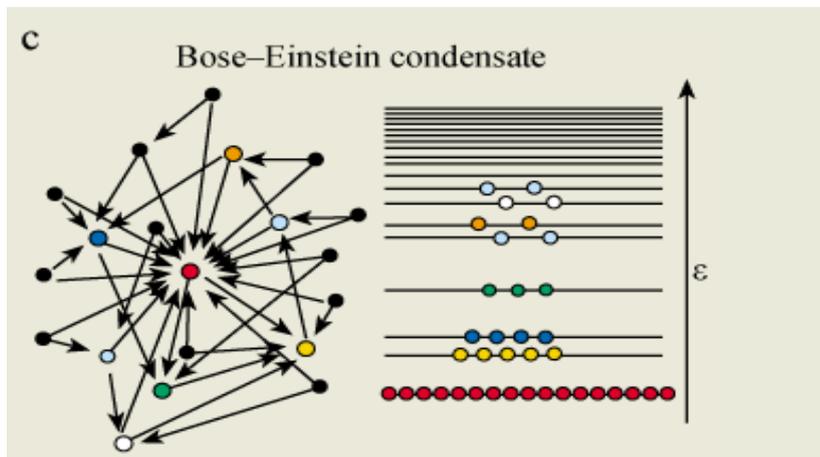
## 3. Condensado de Bose-Einstein.

- Surge cuando la ecuación del potencial no tiene solución.
- Describe “winner-takes-all”, el nodo mas apto es el que posee mayor cantidad de aristas, pero además aunque surjan nuevos nodos, siempre sigue ganando una fracción finita de aristas.

# Condensado Bose-Einstein (cont)

Tres distintas fases:

3. Condensado de Bose-Einstein.



# Condensado Bose-Einstein (cont)

- La forma precisa para la distribución  $\rho(\eta)$  para WWW o el internet no se conoce aún, sin embargo es posible que se obtenga información al respecto en un futuro no muy lejano.
- Eventualmente se podrá responder a:

¿Puede el web o la internet representar un condensado de Bose gigantesco?

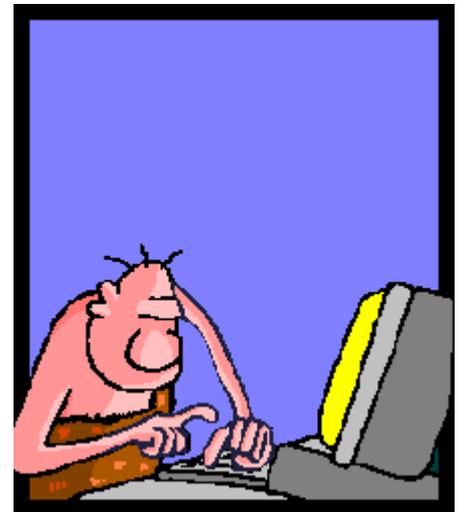
# Talón de Aquiles de la Internet

¿Se puede mantener la funcionalidad de una red bajo la amenaza de los hackers?

## Internet

3% ruteadores están caídos en  
cada momento

¿A qué se debe este comportamiento?

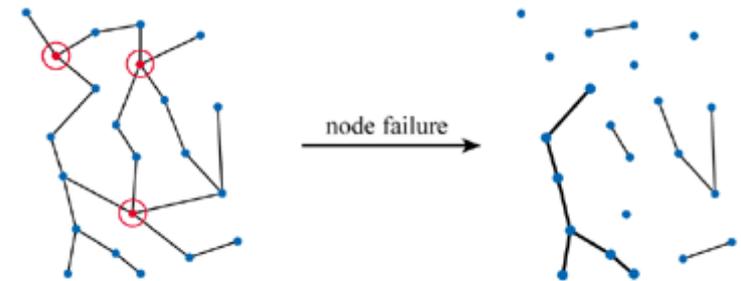


# Talón de Aquiles (cont)

Teoría de Percolación: Si se eliminan vértices de manera aleatoria de la red, entonces para alguna fracción crítica  $f_c$ , la red se fragmenta en islas de nodos.

Simulaciones: Redes de escala libre, aun cuando se remueven hasta 80% de los vertices, aun se forma un *cluster* compacto.

Reuven Cohen, Universidad de Bar-Ilan, Israel.  
Demostraron que para  $\gamma < 3, f_c=1$ .

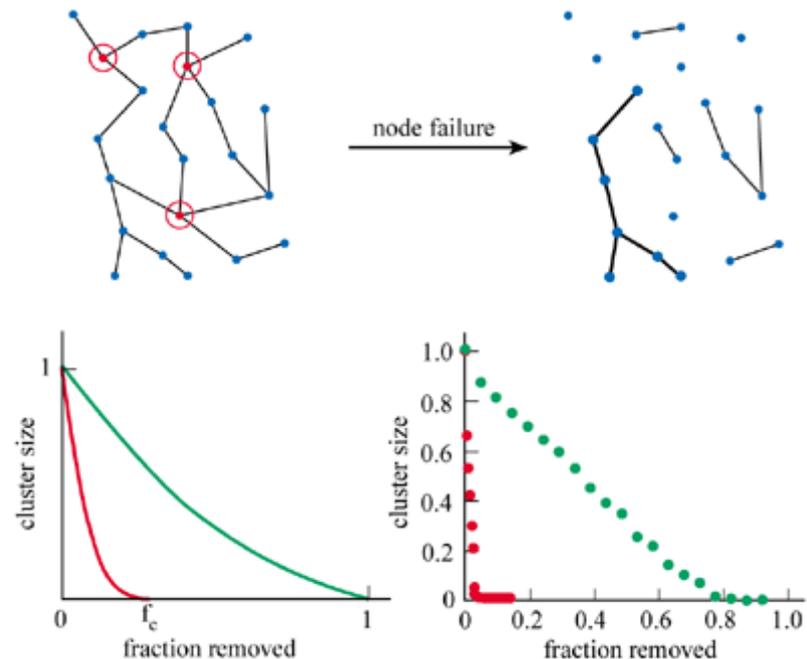


# Talón de Aquiles (cont)

Teoría de Percolación: Si se eliminan vértices de manera aleatoria de la red, entonces para alguna fracción crítica  $f_c$ , la red se fragmenta en islas de nodos.

Simulaciones: Redes de escala libre, aun cuando se remueven hasta 80% de los vertices, aun se forma un *cluster* compacto.

Reuven Cohen, Universidad de Bar-Ilan, Israel.  
Demostraron que para  $\gamma < 3, f_c=1$ .



# Talón de Aquiles (cont)

El talón de Aquiles de la Internet son los vértices con mayor grado.



# Cerebro

- Cerebro, sistema dinámico. Trafico entre regiones define redes de dinámica correlacional.
- Se extraen redes usando “*Functional Magnetic Resonance Imaging*”.

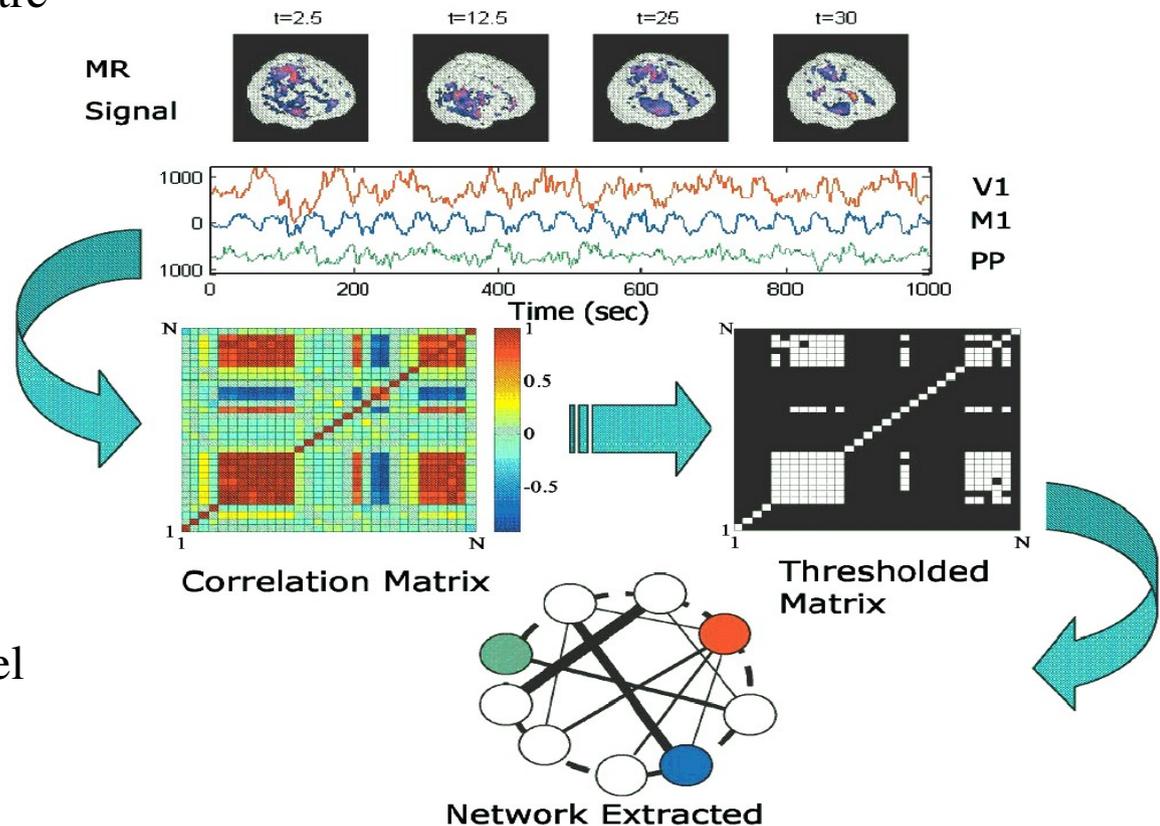


# Cerebro

- Cerebro, sistema dinámico. Tráfico entre regiones define redes de dinámica correlacional.
- Se extraen redes usando “*Functional Magnetic Resonance Imaging*”.



1. Se divide el cerebro en regiones, llamadas *voxels* (por píxeles).
2. Cada tiempo  $t$ , se mide la actividad del cerebro, en cada voxel.
3. Dos *voxels* están **funcionalmente conectados** si su correlación temporal excede un valor predeterminado  $r_c$ .



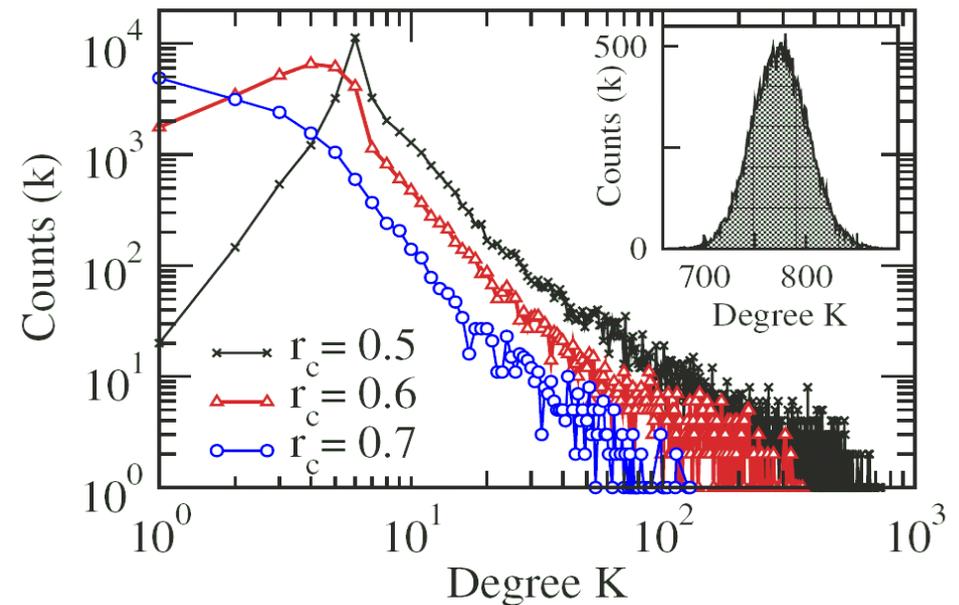
# Cerebro (cont)

## Experimento 1.

- El sujeto estuvo moviendo dedos 1 y 2 durante 10 secs, y descansando 10 secs.



Se encontró una distribución que se ajusta (en la cola) a  $P(k) \sim k^{-\gamma}$ , con  $\gamma \approx 2$ .



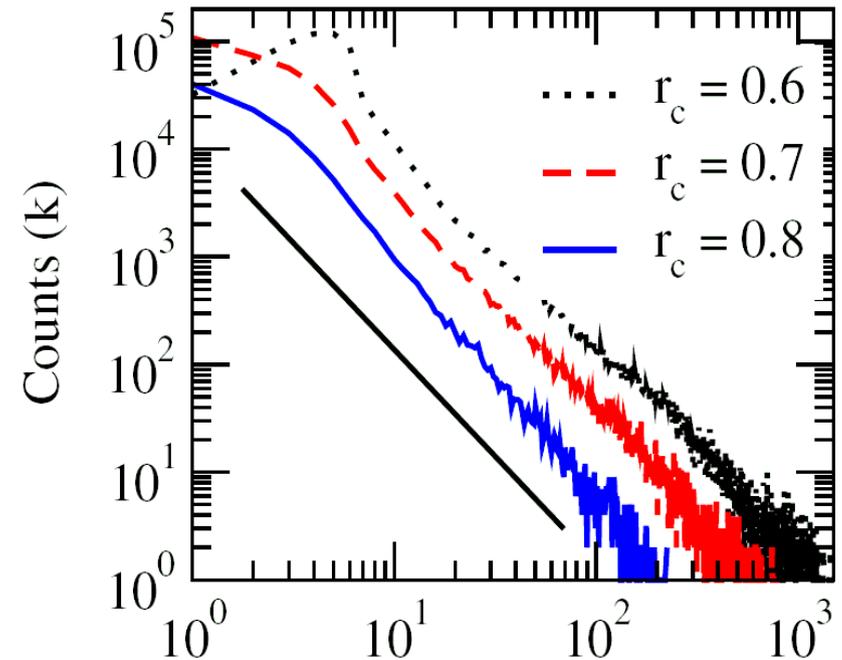
# Cerebro (cont)

## Experimento 2.

- El sujeto estuvo moviendo dedos 1 y 2 durante 10 secs, y descansando 10 secs.
- Siete sujetos, misma tarea anterior, tres condiciones de inicio y paro:
  1. Verbalmente.
  2. Inicio, punto verde en pantalla.  
Paro, punto rojo en pantalla.
  3. Inicio, pantalla verde.  
Paro, pantalla roja.



El promedio de las distribuciones de los grados, muestra  $P(k) \sim k^{-\gamma}$ , con  $\gamma \approx 2$ .



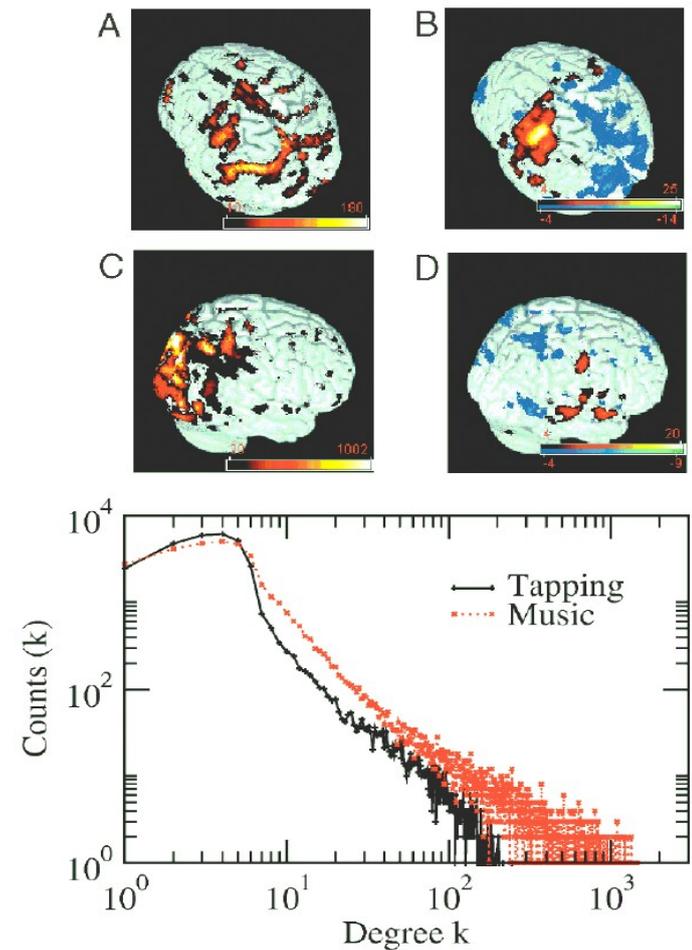
$r_c = 0.6 \quad \gamma = 2, r_c = 0.7 \quad \gamma = 2.1, r_c = 0.8 \quad \gamma = 2.2$

# Cerebro (cont)

## Experimento 3.

- Dos tareas muy distintas:
  1. Escuchar música.
  2. Mover dedos.

El comportamiento de escala libre encontrado en las redes funcionales, implica que siempre existe un pequeño número de sitios en el cerebro, que tienen amplio “acceso” a todas las demás regiones del mismo.



# Referencias

- Emerge of Scaling in Random Networks.
- Mean-Field Theory for Scale-Free Random Networks.
- Scale Free Characteristics of Random Networks: The Topology of the WWW.
- Bose-Einstein Condensation in Complex Networks.
- The Physics of the Web.
- Scale-Free Brain Functional Networks.