

TAREA IV

1. Es bien sabido que el intervalo $(0, 1)$ no es compacto. De un ejemplo de una cubierta abierta del intervalo $(0, 1)$ que no posea una subcubierta finita.
2. Sabemos que si $\{K_n\}$ es una sucesión de conjuntos compactos tal que $K_{n+1} \subseteq K_n$, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$. Demuestre que esto deja de ser un hecho si sustituimos “compactos” por “cerrados” ó bien por “acotados”.
3. Sea $I = [0, 1]$. Describa el conjunto $f(I)$ en cada uno de los siguientes casos e identifique $\sup f(I)$ e $\inf f(I)$. ¿En qué casos f alcanza el supremo y en qué casos alcanza el ínfimo?
 - a) $f(x) = 1 + x$ para toda $x \in I$.
 - b) $f(x) = 1$ si $x < 1/2$ y $f(x) = 2x$ en otro caso.
 - c) $f(x) = x$ si $x < 1$ y $f(1) = 2$.
 - d) $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ y $f(x) = 3x$ para toda $x \in (0, 1)$.
4. En cada uno de los siguientes incisos encuentre (1) el máximo de la forma cuadrática $Q(\mathbf{x})$ sujeta a la condición $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1$, (2) un vector unitario $\mathbf{u}$ en el que se alcance el máximo y (3) el máximo de $Q(\mathbf{x})$ sujeta a la condición $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1$ y $\mathbf{x}^T \mathbf{u} = 0$.
 - a) $Q(\mathbf{x}) = 5x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2$
 - b) $Q(\mathbf{x}) = 7x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_1x_2$
 - c) $Q(\mathbf{x}) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$
 - d) $Q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$
5. Si $\mathbf{x}$ es un vector característico unitario correspondiente a un valor característico λ de una matriz A , entonces determine el valor de $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$.
6. Demuestre que si A es una matriz positiva definida, entonces existe una matriz positiva definida B tal que $A = B^T B$. (Sugerencia: Encuentre una matriz diagonal D y una matriz invertible P tal que $A = P D P^T$ con $P^T = P^{-1}$. Encuentre una matriz diagonal C tal que $D = C^T C$ y defina $B = P C P^T$.)
7. Demuestre que si A y B son matrices de $n \times n$ cuyos valores característicos son todos positivos, entonces los valores característicos de $A + B$ son todos positivos. (Sugerencia: Piense en formas cuadráticas.)
8. Sea A una matriz simétrica invertible. Demuestre que A es positiva definida si y sólo si A^{-1} es positiva definida. (Sugerencia: Considere valores característicos.)
9. Encuentre y clasifique los puntos críticos (máximos y mínimos tanto locales como globales, o bien ninguno de ellos) de cada una de las siguientes funciones. En su caso, determine si la propiedad de ser máximo o mínimo local es global.

- a) $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$
 b) $f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$
 c) $f(x, y) = xy(a - x - y)$
 d) $f(x, y) = x^2 + x^2y^2 - y$
 e) $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^3$
 f) $f(x, y) = (x^4/32) + x^2y^2 - x - y^2$
 g) $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$
 h) $f(x, y) = -y \cos x$
10. Encuentre el punto más cercano al origen de $\mathbb{R}^3$ que está en la intersección de los planos $3x + y + z = 5$ y $x + y + z = 1$.
11. Maximize $f(x, y, z) = yz + xz$ sujeta a la restricción de igualdad $y^2 + z^2 = 1$ y $xz = 3$.
12. Encuentre el máximo y mínimo de $f(x, y, z) = x + y + z^2$ sujeta a la restricción de igualdad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $y = 0$.
13. Encuentra los máximos y mínimos de las siguientes funciones sujetas a las restricciones dadas:
- a) $f(x, y) = xy$ sujeta a $x^2 + y^2 = 2a^2$.
 b) $f(x, y) = 1/x + 1/y$ sujeta a $1/x^2 + 1/y^2 = 1/a^2$.
 c) $f(x, y, z) = x + y + z$ sujeta a $x + y + z = 5$ y $xy + xz + yz = 8$.
 d) $f(x, y, z) = x^2 + 2y - z^2$ sujeta a $2x - y = 0$ y $x + z = 6$.
14. Considere el siguiente problema:
- | | |
|------------|------------------|
| Optimizar: | $f(x, y, z) = z$ |
| Sujeto a: | $x^2 + y^2$ |
| | $x + y + z = 5$ |
- a) ¿Se cumple la condición de regularidad (o cualifican las restricciones)?
 b) Encuentre los puntos estacionarios.
 c) Encuentre los máximos y mínimos globales. Justifique
 d) Si la primera restricción cambia 3.9 y la segunda a 5-2, ¿cuánto varía aproximadamente el valor mínimo de la función de valor?
15. Sea A una matriz simétrica. Resuelva el problema

$$\max f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \quad \text{sujeto a} \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 1.$$