Matemáticas I

TAREA V
(anexo)

1. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa y considere números reales $a < b$.

   a) Demuestre que para toda $x \in [a, b]$ sucede que
   $$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$$

   b) Demuestre que para toda $x \in (a, b)$ sucede que
   $$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} f(a) \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

   c) Demuestre que si f es diferenciable, entonces
   $$f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b)$$

2. Sea $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ una función convexa. Demuestre que la función
   $$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \qquad x > 0$$
   es una función convexa. (**Sugerencia:** Para cada s, $f(sx)$ es convexa como función de x, por lo tanto $\int_0^1 f(sx)ds$ es convexa.

3. Del libro de Simon y Blume, 19.1-19.3, 19.13