TAREA I

1. Sean α, β, γ tres cortaduras. Demuestre que si $\alpha < \beta$ y $\beta < \gamma$ entonces $\alpha < \gamma$.
2. Sean α y β dos cortaduras. Demuestre que $\alpha + \beta := \{s + t \mid s \in \alpha \text{ y } t \in \beta\}$ es una cortadura.
3. Sean α, β, γ tres cortaduras. Demuestre que
   (a) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
   (b) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
   (c) $\alpha + 0^* = \alpha$ (aquí 0^* denota la cortadura racional que determina el 0).
4. Sean α, β, γ tres cortaduras. Demuestre que si $\beta < \gamma$, entonces $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$.
5. Sean α, β dos cortaduras. Demuestre que existe una única cortadura γ tal que $\alpha + \gamma = \beta$.
6. Sean $\alpha, \beta \geq 0^*$ dos cortaduras positivas. Demuestre que $\gamma := \mathbb{Q}^- \cup \{r \in \mathbb{Q}^+ \mid r = pq \text{ con } p \in \alpha,\ q \in \beta \text{ y } p, q \geq 0\}$ es una cortadura.
7. Sea α una cortadura y $|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \text{si } \alpha \geq 0^* \\ -\alpha & \text{si } \alpha < 0^* \end{cases}$. Demuestre que $|\alpha| \geq 0^*$ y $|\alpha| = 0^*$ si y sólo si $\alpha = 0^*$.
8. Sean α, β, γ tres cortaduras. Demuestre que
   (a) $\alpha\beta = \beta\alpha$
   (b) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$
   (c) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$
   (d) $\alpha \cdot 0^* = 0^*$
   (e) $\alpha\beta = 0^*$ si y sólo si $\alpha = 0^*$ ó $\beta = 0^*$
   (f) $\alpha \cdot 1^* = \alpha$
   (g) Si $0^* < \alpha < \beta$ y $\gamma > 0^*$ entonces $\alpha\gamma < \beta\gamma$
9. Demuestre que si α y β son cortaduras, $\alpha \neq 0^*$, entonces existe una única cortadura γ tal que $\alpha\gamma = \beta$.
10. Sean α y β dos cortaduras y suponga que $\alpha < \beta$. Demuestre que existe una cortadura racional r^* tal que $\alpha < r^* < \beta$.
11. Demuestre que si $r \in \mathbb{Q}$ $(r \neq 0)$ y $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, entonces tanto $r + x$ como rx son irracionales (es decir, pertenecen a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).
12. Demuestre que no existe un número racional que resuelva la ecuación $x^2 = 12$.
13. Demuestre que entre cualesquiera dos números reales (distintos) existe un número racional.