TAREA II

1. Sea $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$, es decir, $z\overline{z} = 1$. Calcule $|1+z|^2 + |1-z|^2$.

2. Demuestre que si $x, y \in \mathbb{C}$, entonces $|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2$. Interprete este hecho geométricamente, involucrando paraleogramos.

3. Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ con $k \geq 2$. Demuetre que existe $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$, con $\mathbf{y} \neq 0$, tal que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$. ¿Es cierto este resultado si $k = 1$?

4. Sean $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ y $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Determine condiciones necesarias y suficientes para que se cumpla la igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz, es decir, determine cuándo
$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$
(*Sugerencia:* Ver Teorema 1.23 en Apostol).

5. Determina el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos:
   (a) $S = \{2^{-p} + 3^{-q} + 5^{-r} \mid p, q, r \in \mathbb{N}\}$
   (b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x^2 - 10x + 3 < 0\}$
   (c) $S = \{x \mid (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) < 0\}$ donde $a < b < c < d$.

6. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^+$ dos conjuntos de números reales positivos acotados superiormente. Sean $a = \sup A$ y $b = \sup B$. Sea $C = \{xy \mid x \in A \text{ y } y \in B\}$. Demuestre que $\sup C = ab$.

7. Expresar los siguientes números complejos en la forma $a + bi$.
   (a) $(1+i)^3$
   (b) $\dfrac{2+3i}{3-4i}$
   (c) $i^5 + i^{16}$
   (d) $\frac{1}{2}(1+i)/(1+i^{-8})$

8. Sean $a, b, c \in \mathbb{C}$ tres números complejos tales que $|a| = |b| = |c| = 1$ y $a + b + c = 0$. Demuestre que a, b y c forman un triángulo equilátero inscrito en el círculo unitario.

9. Describir geométricamente los siguientes conjuntos de números complejos.
   (a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$
   (b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$
   (c) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$

(d) $\{z \in \mathbb{C} \mid z + \overline{z} = 1\}$

(e) $\{z \in \mathbb{C} \mid z - \overline{z} = i\}$

(f) $\{z \in \mathbb{C} \mid z + \overline{z} = |z|^2\}$

10. Encuetre los valores reales x y y que satisfacen la relación que se indica en cada inciso.

    (a) $x + iy = |x - iy|$

    (b) $x + iy = (x - iy)^2$

    (c) $\sum_{k=0}^{100} i^k = x + iy$