Análisis Matemático

TAREA III

1. Del Apostol, problemas 3.21, 3.23, 3.24, 3.27 y 3.28.

2. Un número es *algebráico* si es raiz de una ecuación de la forma

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Demuestre que el conjunto de números algebráicos es numerable. **Sugerencia:** Para cada $N \in \mathbb{N}^*$, existe un número finito de estas ecuaciones que satisfacen $n+|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_n| = N$.

3. Sea $(\mathbb{Q}, d)$ con $d(p,q) = |p-q|$ y sea $E \subset \mathbb{Q}$ el conjunto de todos los racionales p que satisfacen $2 < p^2 < 3$. Muestre que E es cerrado y acotado pero que no es compacto.

4. Demuestre que $\mathbb{R}^k$ es *separable* (i.e. posee un subconjunto denso numerable). **Sugerencia:** Ver sugerencia en el libro de Rudin.

5. Una colección $\beta = \{V_\alpha\}$ de subconuntos de un espacio métrico X es una *base* de X si para todo $x \in X$ y todo abierto $G \subset X$ con $x \in G$, existe $V_\alpha \in \beta$ tal que $V_\alpha \subset G$. Demuestre que todo espacio métrico separable (ver pregunta 4) posee un una base numerable.

6. Sea X un espacio métrico tal que todo subconjunto infinito de X posee un punto límite. Demuestre que X es separable (ver pregunta 4 y 5).

7. Sea X un espacio métrico tal que todo subconjunto infinito de X posee un punto límite. Demuestre que X es compacto. **Sugerencia:** Ver las sugerencias en el libro de Rudin tanto para este problema como para los problemas 4 y 5.

8. Demuestre que si $\{x_n\}$ converge, entonces $\{|x_n|\}$ converge. De un ejemplo que muestre que el converso de esta afirmación es falso.

9. Determine $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - n$.

10. Sean $x_1 = \sqrt{2}$ y $x_{n+1} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$. Demuestre que $\{x_n\}$ converge y que $x_n < 2$ para toda $n = 1, 2, \ldots$.