Análisis Matemático

TAREA IV

1. Determinar si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es covergente o divergente si:
   (a) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
   (b) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$
   (c) $a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n$
   (d) $a_n = \dfrac{1}{1+z^n}$ con $z \in \mathbb{C}$
2. Encuentre el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 z^n$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!} z^n$
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n^2} z^n$
   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{3^n} z^n$
3. Demuestre que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $a_n \geq 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{a_n}}{n}$ converge.
4. Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} (n!)^{1/n} z^n$ converge absolutamente si $|z| < 1$ y que diverge si $|z| \geq 1$.
5. Investigue la convergencia de las siguientes series:
   (a) $1 - \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{7} + \dfrac{5}{9} - \dfrac{6}{11} + \dots$
   (b) $1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{8} + \dots$
   (c) $1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{9} + \dots$

6. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, $a_n > 0$ y $r_n = \sum_{m=n}^{\infty} a_m$, entonces demuestre que:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n}$ diverge.

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ converge.

7. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, $a_n > 0$ y $s_n = a_1 + \ldots + a_n$, entonces demuestre que:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n}$ diverge.

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ diverge.

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^2}$ converge.

   Determine también la convergencia o divergencia de:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + na_n}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + n^2 a_n}$

8. Demuestre que el producto de Cauchy de dos series absolutamente convergentes resulta en una serie absolutamente convergente.

9. Dada una sucesión $\{x_n\}_{n \geq 1}$, definimos la *sucesión de medias aritméticas* como

$$t_n = \frac{s_1 + \ldots + s_n}{n} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

   Demuestre que $s_n \to s$ implica $t_n \to s$. De un ejemplo de una sucesión divergente cuya sucesión de medias aritméticas converge.

10. Demuestre que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona y acotada, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.