TAREA EXAMEN FINAL

1. Determine $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - n$.

2. Sean $a, b, c \in \mathbb{C}$ tres números complejos tales que $|a| = |b| = |c| = 1$ y $a + b + c = 0$. Demuestre que a, b y c forman un triángulo equilátero inscrito en el círculo unitario.

3. Dada una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$, definimos la *sucesión de medias aritméticas* como
$$t_n = \frac{s_1 + \ldots + s_n}{n} \qquad n = 1, 2, \ldots$$
Demuestre que $s_n \to s$ implica $t_n \to s$. De un ejemplo de una sucesión divergente cuya sucesión de medias aritméticas converge.

4. Una función $f\colon X \to Y$ es *abierta* si $f(V)$ es abierto para todo $V \subset X$ abierto. Desmuestre que si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es abierta, entonces es monótonoa.

5. Sea f una transformación de un espacio métrico (X, d) en sí mismo. Demuestre que la condición
$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \qquad \forall x, y \in X$$
no es suficiente para garantizar la existencia de un punto fijo de f.

6. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y sea $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una colección finita (osea que $|\Lambda| < \infty$) de celdas de $\mathbb{R}_n$ tal que $A \subset \bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$. Sea
$$\mathbf{v}\colon \bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha \to \mathbb{R}^n$$
continuamente diferenciable y suponga que existe $c > 0$ tal que
$$||\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{y})|| < c||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in I_\alpha \text{ para alguna } \alpha \in \Lambda.$$
Suponga también que existe $\kappa > 0$ tal que $||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| > \kappa$ siempre que *no* exista $\alpha \in \Lambda$ tal que $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in I_\alpha \times I_\alpha$. Demuestre que $\mathbf{v}$ es una función Lipschitz en A, es decir, que existe una constante $C > 0$ tal que
$$||\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{y})|| < c||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A.$$