TAREA I

1. Demuestre los postulados A1-A4 para la adición de números complejos, es decir, demuestre que para todos $x, y, z \in \mathbb{C}$ sucede que:

   A1. $x + y = y + x$

   A2. $(x + y) + z = x + (y + z)$

   A3. $x + z = y + z \Rightarrow x = y$

   A4. Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{C}$, existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $x + z = y$

   Demuestre también lo siguiente:

   (a) Si $z \in \mathbb{C}$, entonces $-z$ es único.

   (b) Si $z \in \mathbb{C}$, entonces z^{-1} es único.

2. Exprese los siguientes números complejos en la forma $a + bi$.

   (a) $(3 - 5i)^2$

   (b) $\dfrac{2}{3i} - \dfrac{4}{5i}$

   (c) $\dfrac{2 + 3i}{5 - 4i}$

   (d) $\left(\dfrac{5}{2 - i} + 3\right)^2$

3. Si $z = a + bi$, determine las partes reales e imaginarias de los siguientes números complejos.

   (a) $\dfrac{z + 1}{2z - 5}$

   (b) z^3

4. Resolver las siguientes ecuaciones en $\mathbb{C}$.

   (a) $(z + 2)^2 = -2i$

   (b) $\dfrac{z - 3}{3 - z} = 3$

   (c) $z^3 - 4 = 0$

   (d) $z^8 - 8 = 0$

5. Suponga que $|z| = 1$ o que $|w| = 1$ y que $\overline{z}w \neq 1$. Demuestre que

$$\left|\frac{z - w}{1 - \overline{z}w}\right| = 1$$

6. Calcule las raíces cuadradas de los siguientes números complejos.

   (a) $3+4i$

   (b) $1+2i$

7. Encuentre el valor absoluto de los siguientes números complejos.

   (a) $\dfrac{i(2+3i)(5-2i)}{-2-i}$

   (b) $\dfrac{(2-3i)^2}{(8+6i)^2}$

8. Sea $p(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$, con $a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$. Demuestre que si $z_0\in\mathbb{C}$ es tal que $p(z_0)=0$, entonces $p(\overline{z_0})=0$, es decir, demuestre que *las raices de un polinomio con coeficientes reales vienen en pares conjugados.*

9. Demuestre lo siguiente:

   (a) $\arg(\overline{z})=-\arg(z) \bmod 2\pi$

   (b) $\arg(z/w)=\arg(z)-\arg(w) \bmod 2\pi$

   (c) $|z|=0 \ \Leftrightarrow\ z=0$

10. Suponga que $x,y,z\in\mathbb{C}$ son tales que

$$\frac{y-x}{z-x}=\frac{x-z}{y-z}.$$

    Demuestre que $|y-x|=|z-x|=|y-z|$ (**Sugerenica:** Argumente geométricamente).