

TAREA II

1. Demuestre que si $w \in \mathbb{C}$, entonces
 - (a) $|\operatorname{Re}(w)| \leq |w|$
 - (b) $|\operatorname{Im}(w)| \leq |w|$
 - (c) $|w| \leq |\operatorname{Re}(w)| + |\operatorname{Im}(w)|$
2. Demuestre que si $F \subset \mathbb{C}$ es finito, entonces es cerrado.
3. Demuestre que tanto $f(z) = \bar{z}$ como $g(z) = |z|$ son funciones continuas.
4. Determine qué valores de $z \in \mathbb{C}$ hacen que la sucesión $z_n = nz^n$ sea convergente.
5. Determine si los siguientes conjuntos son abiertos y/o cerrados (justifique su respuesta). Descríbalos geoméricamente.
 - (a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$
 - (b) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq 1\}$
 - (c) $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2\}$
 - (d) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 2\}$
6. Determine si los siguientes conjuntos son conexos y si son compactos (justifique su respuesta). Descríbalos geoméricamente.
 - (a) $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\}$
 - (b) $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 3 \text{ y } |\operatorname{Re}(z)| \geq 1\}$
 - (c) $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 5 \text{ y } |\operatorname{Im}(z)| \geq 1\}$
 - (d) $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |\operatorname{Re}(z)| \leq 2\}$
7. Demuestre que $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es continua en $z_0 \in \mathbb{C}$ si y sólo si $z_n \rightarrow z_0$ implica $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$.
8. Demuestre que si $|z| > 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n/n \rightarrow \infty$.
9. Demuestre que dos puntos $z, z' \in \mathbb{C}^*$ son diametralmente opuestos en la esfera de Riemann \mathbb{S}^2 si y sólo si $z\bar{z}' = -1$.
10. Un cubo tiene sus vértices en la esfera de Riemann \mathbb{S}^2 y sus aristas son paralelas a los ejes coordenados. Encuentre la proyección estereográfica de los vértices en el plano complejo \mathbb{C}^* .