TAREA IV

1. En qué conjuntos son armónicas las siguientes funciones:

a) $u(x, y) = \text{Im}(z + 1/z)$

b) $u(x, y) = \frac{y}{(x-1)^2 + y^2}$

c) $u(x, y) = \text{Re}(z/(z^3 - 1))$

2. Sea $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ analítica y $w: B \rightarrow \mathbb{R}$ armónica con $f(A) \subseteq B$. Demuestre que $w \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}$ es armónica.

3. Demuestre que la condición de que u sea armónica en términos de coordenadas polares equivale a

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

4. Suponga que $u: D(z_0; r) \rightarrow \mathbb{R}$ es armónica (aquí $D(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$, con $z_0 = x_0 + iy_0$). Demuestre que para $(x_1, y_1) \in D(z_0; r)$,

$$v(x_1, y_1) = c + \int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, y) dy - \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_0) dx$$

define una función armónica que es de hecho conjugada armónica de u en el disco $D(z_0; r)$, con $v(x_0, y_0) = c$.

5. Determine si los siguientes límites existen, y en caso afirmativo, encuentre sus valores.

a) $\log(z + 1)$

b) $\sqrt{z}$

c)

6. Determine si los siguientes límites existen, y en caso afirmativo, encuentre sus valores.

a) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z}$

$$b) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} |z|}{z}$$

$$c) \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\log z}{z - 1}$$

$$d) \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\bar{z} - 1}{z - 1}$$

7. Encuentre la región de analiticidad y las derivadas en estas regiones de las siguientes funciones.

$$a) \frac{z}{z^2 - 1}$$

$$b) e^{z+(1/z)}$$

$$c) f(z) = |z|^2$$

$$d) f(z) = y - ix \text{ (aquí } z = x + iy)$$

8. Sea $f: \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica y defina $g: A \rightarrow \mathbb{C}$ por $g(z) = \overline{f(z)}$.
¿Cuándo es g una función analítica?

9. Encuentre el $\inf\{|e^{z^2}| : |z| \leq 1\}$.

10. Use el Teorema de la Función Inversa para demostrar lo siguiente: Si $f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica (A es abierto y conexo), y $f(A) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$, entonces f es constante.