

TAREA VII

1. Determine si las siguientes sucesiones convergen, y en su caso encuentre el límite.

$$a) z_n = (-1)^n + \frac{i}{n+1}.$$

$$b) z_n = \frac{n!}{n^n} i^n$$

2. Determine el límite de la sucesión $f_n(x) = (1+x)^{1/n}$, con $x \geq 0$, y determine si la convergencia es uniforme.

3. a) Demuestre que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 1/(n^2 + z^2)$ converge en el conjunto $\mathbb{C} \setminus \{z = ni \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

- b) Demuestre que la convergencia es uniforme y absoluta en cada disco cerrado contenido en esta región.

4. Determine si las siguientes series son convergentes y determine si la convergencia es absoluta.

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\log n}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$$

5. Demuestre que si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, entonces $a_k \rightarrow 0$. Demuestre que si

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z) \text{ converge uniformemente, entonces } g_k \rightarrow 0 \text{ uniformemente.}$$

6. Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}$ es analítica en

$$A = \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z| > 1\}.$$

7. Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \operatorname{sen} nz$ es analítica en

$$A = \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } -1 < \operatorname{Im} z < 1\}.$$

8. Encuentre el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{e^n}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{4^n}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1 + 2^n}$

9. Calcule la serie de Taylor de las siguientes funciones y determine en qué conjuntos la serie es convergente.

a) e^z alrededor de $z_0 = 1$.

b) $1/z$ alrededor de $z_0 = 1$.

10. Calcule la serie de Taylor de las siguientes funciones (indique únicamente los primeros términos cuando sea apropiado).

a) $\frac{\operatorname{sen} z}{z}$ alrededor de $z_0 = 1$.

b) $z^2 e^z$ alrededor de $z_0 = 0$.