Variable Compleja II

TAREA I

1. Demuestre que las ecuaciones de Cauchy-Riemann, en coordenadas polares, corresponden a
$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$
2. Demuestre que la condición de que u sea armónica en términos de coordenadas polares equivale a
$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$
3. Evalúe las siguientes integrales:
   (a) $\int_\gamma \operatorname{sen} 2z dz$ donde γ está formada por el segmento de línea que une $i+1$ con $-i$.
   (b) $\int_\gamma \frac{1}{z-1}dz$ donde γ es el círculo de radio 2 centrado en 1 y recorrido una vez en contra de las manecillas del reloj.
   (c) $\int_{|z|=1} \frac{|dz|}{z}$.
   (d) $\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{(1-z)^3}$.
4. Demuestre que si $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$ un número natural, $n \geq 1$, entonces $I(\gamma; z) = n$ si z es tal que $|z - z_0| < r$.
5. Determine si las siguientes series son convergentes y si la convergencia es absoluta.
   (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\log n}$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$
6. Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}\operatorname{sen} nz$ es analítica en
$$A = \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } -1 < \operatorname{Im} z < 1\}.$$