Variable Compleja II

TAREA II

1. Cada una de las siguientes funciones f tiene una singularidad en $z = 0$. Determine qué clase de singularidad es (removible, polo o escencial). Si es removible, determine el valor de $f(0)$ que hace a f analítica en $z = 0$. Si es un polo, ecuentre la parte singular. Si es escencial, determine $f\{z \ : \ 0 < |z| < \delta\}$.

   (a) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z}$

   (b) $f(z) = e^{1/z}$

   (c) $f(z) = \dfrac{z^2}{z(z-1)}$

   (d) $f(z) = \dfrac{1}{1-e^z}$

2. Sea Ω una región y $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ una función analítica excepto por polos. Demuestre que el conjunto de polos de f no posee un punto de acumulación en Ω.

3. Encuentre la serie de Laurent de $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ en los anillos $(0; 0, 1)$, $(0; 1, 2)$ y $(0; 2, \infty)$.

4. Calcule las siguientes integrales usando residuos:

   (a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{x^4 + x^2 + 1}$

   (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x - 1}{x^2} dx$

5. Verifique las siguientes igualdades:

   (a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi(a+1)}{4e^a}$ con $a > 0$.

   (b) $\displaystyle\theta \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{a + \operatorname{sen}^2\theta} = \frac{\pi}{2\sqrt{a(a+1)}}$ con $a > 0$.