Universidad Nacional
Autónoma de México

Instituto de Matemáticas UNAM

Prof. Ricardo Gómez Aíza
Ayud. Rosa Georgina Rodríguez Mota

Variable Compleja II

TAREA IV

1. Demuestre que una sucesión $\{f_n\} \subset C(G,\Omega),\rho)$ converge a $f \in (C(G,\Omega)$ si y sólo si f_n converge a f uniformemente en cualquier subconjunto compacto de G.

2. Encuentre los conjuntos
$$K_n = \{z \;:\; |z| \leq n\} \bigcap \left\{z \;:\; d(z, \mathbb{C} - G) \geq \frac{1}{n}\right\}$$
para cada uno de los siguientes casos:
   (a) G es un disco abierto, es decir, $G = \{z \;:\; |z-a| < r\}$ con $a \in \mathbb{C}$ y $r > 0$.
   (b) G es un anillo abierto, es decir, $G = \{z \;:\; r < |z-a| < R\}$ con $a \in \mathbb{C}$ y $R > r > 0$.
   (c) G es el conjunto que resulta del plano complejo al remover n discos cerrados y ajenos, es decir
   $$G = \mathbb{C} - \bigcup_{k=1}^{n} \overline{B}(a_k, r_k)$$
   donde $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$ son distintos, $r_1, \ldots, r_n > 0$ y para cualesquiera $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ distintos, $\overline{B}(a_i, r_i) \cap \overline{B}(a_j, r_j) = \varnothing$.
   (d) G es una banda infinita, es decir, para algunos $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$,
   $$G = \{z \in \mathbb{C} \;:\; x \leq \mathrm{Re}(z) \leq y\}$$
   o bien
   $$G = \{z \in \mathbb{C} \;:\; x \leq \mathrm{Im}(z) \leq y\}.$$
   (e) $G = \mathbb{C} - \mathbb{Z}$

3. Demuestre el Teorema de Dini: Si $\{f_n\} \subset C(G,\Omega)$ es una sucesión monótona creciente (es decir, $f_n(z) \leq f_{n+1}(z)\ \forall z \in G$), y $f_n(z) \to f(z)$ con $f \in C(G,\Omega)$, entonces $f_n \to f$.

4. Suponga que $\mathcal{F} \subset H(D)$ es normal y que $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto con $f(G) \subset \Omega$ para toda $f \in \mathcal{F}$. Demuestre que si $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ es analítica y acotada en conjuntos acotados (es decir, si $A \subset \Omega$ es tal que existe $M > 0$ tal que $|z| \leq M$ para toda $z \in A$, entonces $g\colon A \to \mathbb{C}$ es analítica y existe $N > 0$ tal que $|g(z)| \leq N$ para toda $z \in A$), entonces $\{g \circ f\}_{f \in \mathcal{F}}$ es normal.