Universidad Nacional
Autónoma de México

Instituto de
Matemáticas UNAM

Prof. Ricardo Gómez Aíza
Ayud. Rosa Georgina Rodríguez Mota

Variable Compleja II

TAREA VI

1. Si $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es entera y tal que $f(x) \in \mathbb{R}$ para toda $x \in \mathbb{R}$ y $\mathrm{Re}[f(iy)] = 0$ para toda $y \in \mathbb{R}$, entonces $f(z)$ es impar, es decir, $f(-z) = -f(z)$ para toda $z \in \mathbb{C}$.

2. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región simétrica (es decir, $\Omega^* = \{\overline{z} \ : \ z \in \Omega\} = \Omega$), y sea $f \in H(\Omega)$. Demuestre que f se puede escribir como $f = f_1 + i f_2$, donde $f_1, f_2 \in H(\Omega)$ y satisfacen $f_i(x) \in \mathbb{R}$ para toda $x \in \Omega \cap \mathbb{R}$ e $i = 1, 2$.

3. Si $f \in H(\overline{D})$, donde $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq 1\}$ y además $|f(z)| = 1$ para toda $|z| = 1$, entonces $f(z)$ es racional.

4. Demuestre que $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$ es la frontera natural de
$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}.$$

5. Considere las siguientes dos series de potencias:
$$z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$
y
$$i\pi - (z-2) + \frac{1}{2}(z-2)^2 - \frac{1}{3}(z-2)^3 + \ldots = i\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(z-2)^n$$
Demuestre que los discos de convergencia de estas dos series son ajenos y que sin embargo ambas son continuaciones analíticas de la misma función (**Sugerencia:** Considere la función $\log\left(\frac{1}{1-z}\right)$).