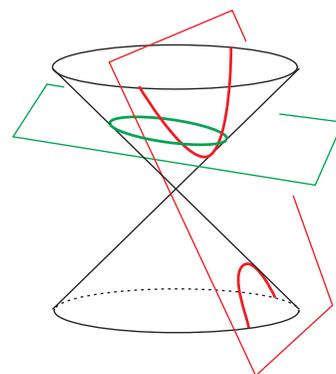


Capítulo 2

Cónicas I (presentación)

Las cónicas son una familia de curvas famosas que definieron los griegos. De ellas, la que vemos cientos de veces al día es a la elipse. Al ver la boca de un vaso, una taza o una vasija, o bien, la llanta de un coche, vemos una *elipse* e inmediatamente intuimos que en realidad se trata de un círculo, sólo que lo estamos viendo “de ladito”. Únicamente vemos un círculo cuando la proyección ortogonal de nuestro ojo al plano en el que vive el círculo es justo su centro; así que los cientos de círculos que vemos a diario son nuestra deducción cerebral automática de las elipses que en realidad percibimos. Para fijar ideas, pensemos que vemos una taza sobre una mesa con un sólo ojo, cada punto de su borde define una recta a nuestro ojo por donde viaja la luz que percibimos, todas estas rectas forman un *cono* con *ápice* en el punto ideal de nuestro ojo; pero no es un cono circular sino un cono elíptico: más apachurrado entre más cerca esté nuestro ojo al plano de la boca de la taza, y más circular en cuanto nuestro ojo se acerca a verlo desde arriba. Resulta entonces que si a este cono elíptico lo cortamos con el plano de la boca de la taza nos da un círculo (precisamente, la boca de la taza). Los griegos intuyeron que entonces, al revés, la elipse se puede definir cortando conos circulares (definidos en base al círculo que ya conocían) con planos inclinados.



Hoy día lo podemos decir de otra manera: si prendemos una lampara de mano, de ella emana un cono circular de luz; es decir, si la apuntamos ortogonalmente a una pared se ilumina un círculo (con todo y su interior), al girar un poquito la lampara, el círculo se deforma en una elipse que es un plano (la pared) cortando a un cono circular (el haz de luz). Entre más inclinada esté la lampara respecto a la pared, la elipse se alarga (como boca de taza con el ojo casi al raz) hasta que algo de la luz sale de la pared. Pensemos entonces que la pared es infinita (un plano) y que nuestra lampara es infinitamente potente (un cono perfecto); al girar más la lampara, la elipse se sigue alargando y alargando hasta el momento en que uno de los rayos del cono no toca a la pared (es paralelo a ella). Justo en ese instante, el borde de lo iluminado

en la pared es una *parábola*, y de allí en adelante, al continuar el giro, es una *rama de hipérbola*. La *hipérbola* completa se obtiene al pensar que los rayos del cono son rectas completas, que se continúan hacia atrás de la lámpara, y entonces algunas de estas rectas (cuyos rayos de luz ya no tocan a la pared por adelante) la intersectan por atrás en la otra rama de la hipérbola. Si continuamos el giro, pasamos de nuevo por una parábola y luego por elipses que, viniendo de atrás, se redondean hasta el círculo con el que empezamos, pero ahora dibujado por el haz de rayos “hacia atrás” de la lámpara que giro 180° . La definición clásica de los griegos, que es equivalente, es fijando al cono y moviendo al plano, y de allí que las hallan llamado *secciones cónicas* o simplemente *cónicas*: la intersección de planos con conos circulares (completos).

La escuela de Alejandría?? estudio con profundidad a estas curvas. Lo hicieron por amor al arte, al conocimiento, abstracto y puro, por la intuición matemática de su propia belleza y naturalidad; y dieron a la humanidad una lección fundamental de la importancia que tiene la ciencia básica. Pues resultó, casi dos mil años después, que estas curvas teóricas se expresaban en la naturaleza como las órbitas de los planetas (elipses descritas por Kepler) o en las trayectorias de los proyectiles (parábolas descritas por Newton y predecesores). Sus propiedades focales, que también descubrieron los griegos, se usan hoy cotidianamente en las antenas parabólicas, en los telescopios y en el diseño de reflectores o de las lentes de anteojos o cámaras. Su teoría, que parecía ser un divertimento totalmente abstracto, resultó importantísimo en la vida diaria y en el entendimiento de la naturaleza.

La escuela de Alejandría??, demostró que a las cónicas también se les puede definir intrínsecamente como *lugares geométricos* en el plano, es decir, como subconjuntos de puntos que cumplen cierta propiedad; a saber, una propiedad que se expresa en términos de distancias. Esta será la definición formal que usaremos en el libro y en la última sección de este capítulo veremos que coincide con el de secciones cónicas. En las primeras secciones veremos que su definición como lugares geométricos expresados en términos de distancias es equivalente a su descripción como el lugar geométrico de puntos en \mathbb{R}^2 cuyas coordenadas satisfacen cierta ecuación. Resulta que estas ecuaciones son ecuaciones cuadráticas en dos variables, x y y (las coordenadas). Este hecho, que observó el propio Descartes, fué una gran motivación para el surgimiento de su Geometría Analítica, pues relacionaba a las clásicas secciones cónicas con los polinomios de segundo grado, y en general el Álgebra, que habían desarrollado los árabes.

2.1 Círculos

Ya hemos definido y usado extensamente al círculo unitario \mathbb{S}^1 , definido por la ecuación

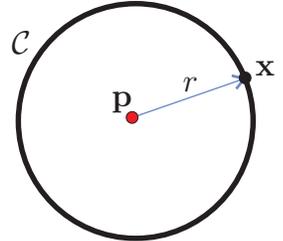
$$x^2 + y^2 = 1.$$

Consideremos ahora a cualquier otro círculo \mathcal{C} . Tiene un *centro* $\mathbf{p} = (h, k)$, un *radio* $r > 0$, y es el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a \mathbf{p} es r . Es decir, $\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = r\}$; o bien, \mathcal{C} está definido por la ecuación

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = r. \quad (2.1)$$

Puesto que ambos lados de esta ecuación son positivos, es equivalente a la igualdad de sus cuadrados que en coordenadas toma la forma

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2. \quad (2.2)$$



De tal manera que todos los círculos de \mathbb{R}^2 están determinados por una ecuación cuadrática en las variables x y y . Cuando la ecuación tiene la forma anterior, podemos “leer” toda la información geométrica (el centro y el radio). Pero en general viene disfrazada como

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky = (r^2 - h^2 - k^2)$$

que es, claramente, su expresión desarrollada. Veámos un ejemplo.

Considerémos la ecuación

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y = -6. \quad (2.3)$$

Para ver si define un círculo, y cuál, hay que tratar de escribirla en la forma (2.2). Para esto hay que “completar” los cuadrados sumando (en ambos lados) las constantes que faltan

$$\begin{aligned} (x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 2y + 1) &= -6 + 9 + 1 \\ (x - 3)^2 + (y + 1)^2 &= 4. \end{aligned}$$

Es claro que al desarrollar esta ecuación obtenemos a la original, de tal manera que aquella define al círculo con centro en $(3, -1)$ y radio 2.

También podemos expresar a la ecuación de un círculo de manera vectorial, pues el círculo \mathcal{C} con centro \mathbf{p} y radio r está claramente definido por la ecuación

$$(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = r^2, \quad (2.4)$$

que es el cuadrado de (2.1). Esta ecuación, que llamaremos la *ecuación vectorial del círculo*, se puede también reescribir como

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = r^2.$$

Parece superfluo pero tiene grandes ventajas. Por ejemplo, en algunos de los ejercicios siguientes puede ayudar, pero además, y mucho más profundo, al no hacer referencia a las coordenadas tiene sentido en cualquier dimensión. Sirve entonces para

definir esferas en \mathbb{R}^3 y, como veremos en el siguiente párrafo (en el que vale la pena que el estudiante tenga en mente cómo traducir a \mathbb{R}^3 , esferas y planos), de la ecuación vectorial se puede extraer mucha información geométrica interesante.

Debemos también remarcar que en las siguientes secciones donde empezamos a estudiar las otras cónicas no aparece el equivalente a esta ecuación vectorial del círculo. Para lograrlo en general nos falta desarrollar mucho más teoría.

EJERCICIO 2.1 ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones son ecuaciones de un círculo? Y en su caso, ¿de cuál?

$$x^2 - 6x + y^2 - 4y = 12$$

$$x^2 + 4x + y^2 + 2y = 11$$

$$2x^2 + 8x + 2y^2 - 4y = -8$$

$$x^2 - 4x + y^2 - 2y = -6$$

$$4x^2 + 4x + y^2 - 2y = 4$$

EJERCICIO 2.2 ¿Cuál es el lugar geométrico de los centros de los círculos que pasan por dos puntos (distintos) \mathbf{a} y \mathbf{b} ?

EJERCICIO 2.3 Sean \mathbf{a} y \mathbf{b} dos puntos (distintos) en el plano; y sean \mathcal{C}_1 el círculo con centro \mathbf{a} y radio r_1 y \mathcal{C}_2 el círculo con centro \mathbf{b} y radio r_2 . Demuestra que \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 son *tangentes* (i.e. se intersectan en un único punto) si y sólo si $r_1 + r_2 = d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ o $r_1 + d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = r_2$ o $r_2 + d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = r_1$. ¿A qué corresponden geoméricamente las tres condiciones anteriores; haz un dibujo de cada caso?

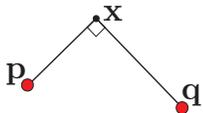
EJERCICIO 2.4 Dados los círculos como en el ejercicio anterior, da condiciones sobre sus radios y la distancia entre sus centros para que:

- el círculo \mathcal{C}_1 esté contenido en el interior del círculo \mathcal{C}_2 .
- el círculo \mathcal{C}_1 esté contenido en el exterior del círculo \mathcal{C}_2 (y viceversa).
- el círculo \mathcal{C}_1 y el círculo \mathcal{C}_2 se intersecten en dos puntos.

EJERCICIO 2.5 Demuestra que por tres puntos no colineales \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} pasa un único círculo, llamado el *circuncírculo* del triángulo \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} .

EJERCICIO 2.6 Demuestra que dadas tres líneas no concurrentes y no paralelas dos a dos existen exactamente cuatro círculos tangentes a las tres; al que esta contenido en el interior del triángulo se le llama su *incírculo*.

EJERCICIO 2.7 Sean \mathbf{p} y \mathbf{q} dos puntos distintos en el plano (o en \mathbb{R}^3). Demuestra que el conjunto de puntos cuyas líneas por \mathbf{p} y \mathbf{q} son ortogonales, es un círculo (o una esfera) que “quiere contener” a \mathbf{p} y a \mathbf{q} . Más precisamente, que el conjunto definido por la ecuación



$$(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{q}) = 0$$

es el círculo con el segmento $\overline{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ como diámetro. (Echale un ojo al ejercicio siguiente).

EJERCICIO 2.8 Sean \mathbf{p} y \mathbf{q} dos puntos distintos en el plano. ¿Para cuáles números reales c , se tiene que la ecuación

$$(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{q}) = c$$

define un círculo? En su caso, ¿cuál es el radio y dónde está su centro?

2.1.1 Tangentes y polares

Observemos primero que las líneas *tangentes* a un círculo son las normales a los *radios* (los segmentos del centro a sus puntos). Efectivamente, si \mathbf{a} es un punto del círculo \mathcal{C} dado por la ecuación vectorial

$$(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = r^2 \quad (2.4)$$

entonces su tangente es la recta ℓ normal a $(\mathbf{a} - \mathbf{p})$ y que pasa por \mathbf{a} . Pues \mathbf{a} es el punto más cercano a \mathbf{p} en esta recta, de tal manera que para cualquier otro punto $\mathbf{x} \in \ell$ se tiene que $d(\mathbf{x}, \mathbf{p}) > r$. Como el círculo \mathcal{C} parte al plano en dos pedazos (el *interior* donde $d(\mathbf{x}, \mathbf{p}) < r$, y el *exterior* donde $d(\mathbf{x}, \mathbf{p}) > r$), entonces ℓ está contenida en el exterior salvo por el punto $\mathbf{a} \in \mathcal{C}$; esta será nuestra definición de *tangente*.

Claramente, la recta ℓ está dada por la ecuación

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{p}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{p}),$$

que tiene una manera mucho más interesante de escribirse. Restando $\mathbf{p} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{p})$ a ambos lados se obtiene

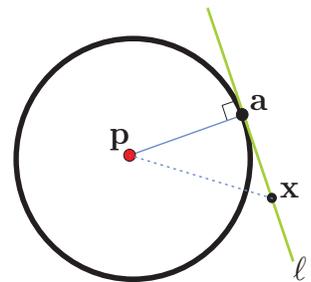
$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{p}) - \mathbf{p} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{p}) &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{p}) - \mathbf{p} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{p}) \\ (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{p}) &= (\mathbf{a} - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{p}) \\ (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{p}) &= r^2 \end{aligned}$$

pues $\mathbf{a} \in \mathcal{C}$. La ecuación de la tangente se obtiene entonces sustituyendo al punto en una de las dos apariciones de la variable \mathbf{x} en la ecuación vectorial (2.4).

Para cualquier otro punto en el plano, \mathbf{a} digamos, que no sea el centro ($\mathbf{a} \neq \mathbf{p}$), el mismo proceso algebraico –sustituir \mathbf{a} en una de las instancias de \mathbf{x} en la ecuación vectorial– nos da la ecuación de una recta, llamada *la polar* de \mathbf{a} respecto al círculo \mathcal{C} , y que denotaremos $\ell_{\mathbf{a}}$; es decir,

$$\text{sea } \ell_{\mathbf{a}} : (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{p}) = r^2 \quad (2.5)$$

Ya hemos visto que cuando $\mathbf{a} \in \mathcal{C}$, su polar $\ell_{\mathbf{a}}$ es su tangente. Ahora veremos que si \mathbf{a} está en el interior del círculo, entonces $\ell_{\mathbf{a}}$ no lo interseca (está totalmente contenida en el exterior), y que si está en el exterior (el punto \mathbf{b} en la figura) entonces lo corta, y además lo corta en los dos puntos de \mathcal{C} a los cuales se pueden trazar tangentes.



Para esto, expresemos la ecuación de ℓ_a en su forma normal; desarrollando (2.5) se obtiene:

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{p}) = r^2 + \mathbf{p} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{p}).$$

Lo cual indica que ℓ_a es perpendicular al vector que va de \mathbf{p} a \mathbf{a} . Ahora veamos quién es su punto de intersección con la recta que pasa por \mathbf{p} y \mathbf{a} . Parametrizémos a esta última recta con \mathbf{p} de cero y \mathbf{a} de uno (es decir como $\mathbf{p} + t(\mathbf{a} - \mathbf{p})$) y al sustituir en la ecuación anterior (o se ve más directo al sustituir en la (2.5)) podemos despejar t para obtener

$$t = \frac{r^2}{(\mathbf{a} - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{p})} = \frac{r^2}{d(\mathbf{p}, \mathbf{a})^2}.$$

Entonces la distancia de \mathbf{p} a ℓ_a es

$$d(\mathbf{p}, \ell_a) = t d(\mathbf{p}, \mathbf{a}) = \frac{r^2}{d(\mathbf{p}, \mathbf{a})} = \left(\frac{r}{d(\mathbf{p}, \mathbf{a})} \right) r \quad (2.6)$$

y tenemos lo primero que queríamos: si $d(\mathbf{p}, \mathbf{a}) < r$ entonces $d(\mathbf{p}, \ell_a) > r$; y al revés, si $d(\mathbf{p}, \mathbf{a}) > r$ entonces $d(\mathbf{p}, \ell_a) < r$. Si el punto \mathbf{a} está muy cerca de \mathbf{p} , su polar está muy lejos y al revés, sus distancias al centro \mathbf{p} se comportan como inversos pero “alrededor de r ” (si $r = 1$ son precisamente inversos).

Supongamos ahora que $d(\mathbf{p}, \mathbf{a}) > r$, y sea \mathbf{c} un punto en $\ell_a \cap \mathcal{C}$ (que sabemos que existe pues ℓ_a pasa por el interior de \mathcal{C}). Puesto que $\mathbf{c} \in \ell_a$, se cumple la ecuación

$$(\mathbf{c} - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{p}) = r^2.$$

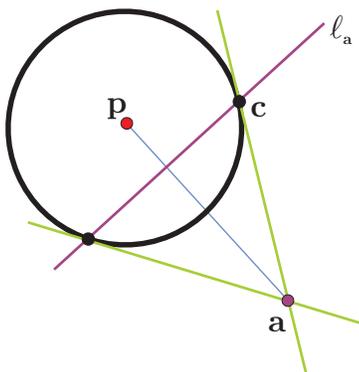
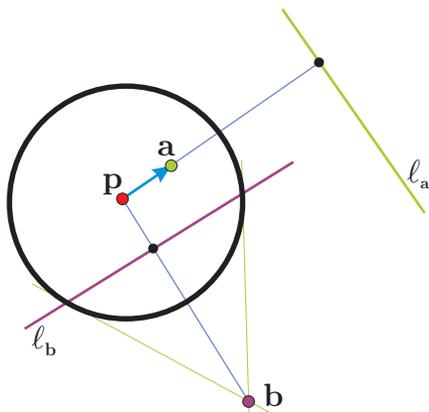
Pero entonces \mathbf{a} cumple la ecuación de ℓ_c que es la tangente a \mathcal{C} en \mathbf{c} ; es decir, la línea de \mathbf{a} a \mathbf{c} es tangente al círculo.

Nótese que el argumento anterior es mucho más general: demuestra que para cualesquiera dos puntos \mathbf{a} y \mathbf{b} (distintos de \mathbf{p}) se tiene que

$$\mathbf{a} \in \ell_b \Leftrightarrow \mathbf{b} \in \ell_a \quad (2.7)$$

Y los puntos del círculo son los únicos para los cuales se cumple $\mathbf{a} \in \ell_a$.

En particular, hemos aprendido a calcular los puntos de tangencia a un círculo desde un punto exterior \mathbf{a} . A saber, de la ecuación lineal de su polar, ℓ_a , se despeja alguna de las dos variables y se sustituye en la ecuación del círculo. Esto nos da una ecuación de segundo grado en la otra variable que se puede resolver dándonos dos raíces. Sustituyéndolas de nuevo en la ecuación de la polar se obtienen el otro par de coordenadas.



Por ejemplo, la ecuación del círculo (2.3) tiene la expresión vectorial

$$((x, y) - (3, -1)) \cdot ((x, y) - (3, -1)) = 4.$$

Si queremos conocer los puntos de tangencia desde el punto $\mathbf{a} = (1, 3)$, encontramos primero la ecuación de su línea polar:

$$\begin{aligned} ((x, y) - (3, -1)) \cdot ((1, 3) - (3, -1)) &= 4 \\ (x - 3, y + 1) \cdot (-2, 4) &= 4 \\ -2x + 4y + 10 &= 4 \\ x - 2y &= 3 \end{aligned}$$

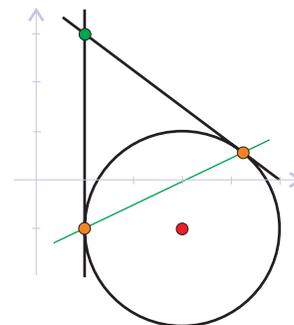
De aquí, para encontrar $\ell_{\mathbf{a}} \cap \mathcal{C}$, conviene sustituir $x = 3 + 2y$ en la ecuación original del círculo (2.3) para obtener

$$\begin{aligned} (3 + 2y)^2 + y^2 - 6(3 + 2y) + 2y &= -6 \\ 5y^2 + 2y - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Las raíces de esta ecuación cuadrática se obtienen por la fórmula clásica:

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{10} = \frac{-2 \pm 8}{10}$$

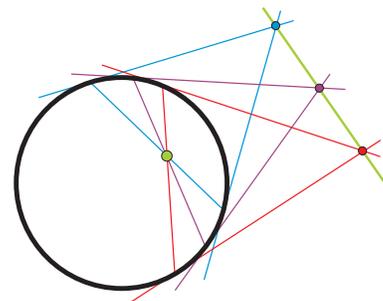
que nos da valores $y_0 = -1$ y $y_1 = 3/5$. Y estos, sustituyendo de nuevo en la ecuación de la polar nos dan los puntos de tangencia de \mathbf{a} ; que son $(1, -1)$ y $(1/5, 3)$. Puede checar el estudiante que satisfacen la ecuación del círculo, aunque los hayamos obtenido (al final) sustituyendo en la ecuación lineal de la polar, y que efectivamente sus tangentes pasan por \mathbf{a} .



EJERCICIO 2.9 Encuentra los puntos de tangencia:

- al círculo $x^2 - 2x + y^2 - 4y = -3$ desde el punto $(-1, 2)$.
- al círculo $x^2 + y^2 = 1$ desde el punto $(2, 2)$.

EJERCICIO 2.10 Sea σ una secante de un círculo \mathcal{C} , es decir un segmento con extremos en el círculo. Si trazamos las tangentes por sus extremos, estas se intersectan en un punto, llamémosle el *polar* de σ . Demuestra que tres secantes son concurrentes si y sólo si sus puntos polares son colineales.



EJERCICIO 2.11 El estudiante que en el ejercicio anterior observó la necesidad formal de eliminar a los diámetros en la definición de *punto polar* de un segmento, hizo muy bien; pero el que no se puso quisquilloso y ni cuenta se dió, hizo mejor. Penso proyectivamente. Demuestra que si permitimos que el centro \mathbf{p} entre a nuestras consideraciones anteriores y añadimos puntos “polares” a los diámetros que juntos forman la nueva línea $\ell_{\mathbf{p}}$ polar con \mathbf{p} , entonces la polaridad se extiende a todas las líneas (falta definirla en las tangentes

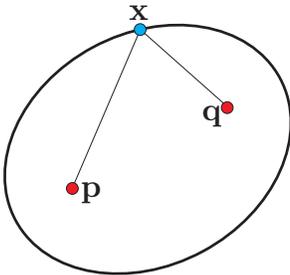
y exteriores) y que es una biyección entre líneas y puntos que cambia concurrencia por colinearidad. Observa además que los nuevos puntos (polares de los diámetros) tienen una dirección (no orientada) bien definida, aquella en la que se alejan los puntos polares de una secante que se acerca al diámetro correspondiente).

EJERCICIO 2.12 Demuestra que si \mathbf{c} es un punto exterior (al círculo \mathcal{C} con centro \mathbf{p}) entonces su recta a \mathbf{p} bisecta a sus dos tangentes a \mathcal{C} . Y además que las distancias a sus *pies* en \mathcal{C} (es decir, a los puntos de tangencia) son iguales.

EJERCICIO 2.13 Observa que toda nuestra discusión sobre líneas polares se basó en la ecuación vectorial (2.4) que tiene sentido en \mathbb{R}^3 donde define a esferas. Define la noción de plano polar a un punto respecto a una esfera en \mathbb{R}^3 . Demuestra que un punto \mathbf{c} en el exterior tiene como plano polar a uno que intersecta a la esfera en un círculo formado por los puntos de la esfera cuyas líneas a \mathbf{c} son tangentes (a la unión de estas líneas se le llama el *cono* de la esfera con ápice \mathbf{c}).

2.2 Elípses

Si amarramos a un burro hambriento a una estaca en un prado, se irá comiendo el pasto deambulando al azar, pero terminará por dejar pelón al interior de un círculo (con centro la estaca y radio la longitud del mecate). Si amarramos los extremos de un mecate a dos estacas y engarzamos al burro a este mecate lo que dibujará es una elipse; por eso, a fijar dos tachuelas en un papel, amarrar holgadamente un hilo entre ellas y luego tenzar con un lápiz y girarlo se le conoce como “*el método del jardinero*” para trazar elípses. Formalmente, las *elípses* son el lugar geométrico de los puntos (posiciones de la boca del burro cuando tenza el mecate) cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados *focos* (las estacas) es constante (la longitud del mecate). De tal manera que una elipse \mathcal{E} queda determinada por la ecuación



$$d(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + d(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = 2a \quad (2.8)$$

donde \mathbf{p} y \mathbf{q} son los focos y a es una constante positiva, llamada *semieje mayor*, tal que $2a > d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. Incluimos el coeficiente 2 en la constante para que quede claro que si los focos coinciden, $\mathbf{p} = \mathbf{q}$, entonces se obtiene un círculo de radio a y centro en el foco; así que los círculos son elípses muy especiales. Esta ecuación, poniéndole coordenadas a los focos, incluye raíces cuadradas por las distancias, es aún muy “fea”. Veremos ahora que en un caso especial es equivalente a una ecuación cuadrática “bonita”.

Supongamos que el *centro* de la elipse \mathcal{E} , i.e., el punto medio entre los focos, está en el origen y que además los focos están en el eje x . Entonces tenemos que $\mathbf{p} = (c, 0)$ y $\mathbf{q} = (-c, 0)$ para alguna c tal que $0 < c < a$ (donde ya suponemos que la elipse

no es un círculo al pedir $0 < c$). Es fácil ver que entonces la intersección de \mathcal{E} con el eje x consiste de los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, pues la ecuación (2.8) para puntos $(x, 0)$ es

$$|x - c| + |x + c| = 2a$$

que sólo tiene las soluciones $x = a$ y $x = -a$ (ver Ejercicio 2.2), y de aquí el nombre de “*semieje mayor*” para la constante a . Como el eje y es ahora la mediatriz de los focos, en él, es decir en los puntos $(0, y)$, la ecuación (2.8) se vuelve

$$\sqrt{c^2 + y^2} = a$$

que tiene soluciones $y = \pm b$, donde $b > 0$, llamado el *semieje menor* de la elipse \mathcal{E} , es tal que

$$b^2 = a^2 - c^2.$$

Ahora sí, consideremos la ecuación (2.8), que con $\mathbf{x} = (x, y)$ y la definición de nuestros focos se expresa

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a. \quad (2.9)$$

Si elevamos al cuadrado directamente a esta ecuación, en el lado izquierdo nos quedaría un incomodo término con raíces. Así que conviene pasar a una de las dos raíces al otro lado, para obtener

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x + c)^2 + y^2}.$$

Elevando al cuadrado, se tiene

$$(x - c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + (x + c)^2 + y^2 \quad (2.10)$$

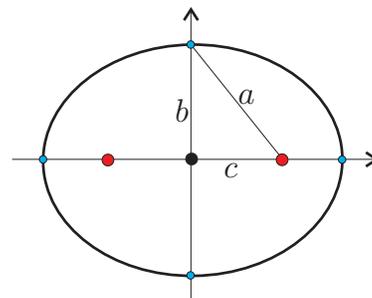
$$x^2 - 2cx + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2$$

$$4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$$

$$a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

Elevando de nuevo al cuadrado, nos deshacemos de la raíz, y despues, agrupando términos, obtenemos

$$\begin{aligned} a^2((x + c)^2 + y^2) &= a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 & (2.11) \\ a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \\ (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \\ b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 \end{aligned}$$



que, dividiendo entre a^2b^2 , se escribe finalmente como

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2.12)$$

llamada la *ecuación canónica de la elipse*.

Hemos demostrado que si $\mathbf{x} = (x, y)$ satisface (2.8), entonces satisface (2.12). Lo inverso, aunque también es cierto, no es tan automático, requiere más argumentación pues en dos ocasiones (al pasar a las ecuaciones (2.10) y (2.11)) elevamos al cuadrado. Es cierto que si dos números son iguales entonces también sus cuadrados lo son (que fué lo que usamos); pero si $r^2 = t^2$ no necesariamente se tiene que $r = t$, pues podría ser que $r = -t$. Este es el problema conceptual conocido como “la raíz cuadrada tiene dos ramas”, entonces los pasos de las ecuaciones (2.10) y (2.11) hacia arriba requieren argumentación sobre los signos (todos los demás pasos hacia arriba sí son automáticos). A manera de verificación, demostremos el inverso directamente.

Supongamos que $\mathbf{x} = (x, y)$ satisface la ecuación canónica de la elipse (2.12); veremos que entonces satisface la ecuación (2.9). Como en (2.12) se tiene una suma de números positivos que dan 1, entonces ambos sumandos están entre 0 y 1. Por lo tanto $|x| \leq |a| = a$, y esto habrá que usarse al sacar una raíz. De la ecuación (2.12) se puede despejar y^2 y sustituirla en las expresiones dentro de las raíces de (2.9), para obtener, en la primera,

$$\begin{aligned} (x - c)^2 + y^2 &= (x - c)^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 \\ &= \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 - 2cx + c^2 + b^2 \\ &= \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)x^2 - 2cx + (c^2 + b^2) \\ &= \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2 = \left(\frac{c}{a}x - a\right)^2. \end{aligned}$$

Ahora bien, como $|x| \leq |a| = a$ implica que $x \leq a$, y además $0 < c < a$, entonces $cx < a^2$ y por tanto $\frac{c}{a}x < a$. Así que la expresión que pusimos arriba es negativa y entonces la raíz es la otra posible rama; es decir, hemos demostrado que

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x.$$

De manera análoga, pero usando ahora que $-x \leq a$, se demuestra que

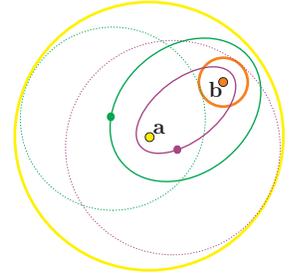
$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = a + \frac{c}{a}x,$$

de donde se sigue la ecuación de las distancias (2.9).

EJERCICIO 2.14 Dibuja algunas elipses usando el método del jardinero. ¿Verdad que no salen de un sólo trazo?

EJERCICIO 2.15 Sea $c > 0$, dibuja la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x - c| + |x + c|$. Concluye que si $a > c$ entonces $f(x) = 2a$ si y sólo si $|x| = a$.

EJERCICIO 2.16 Sean \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 dos círculos con centros \mathbf{a} y \mathbf{b} respectivamente, tales que \mathcal{C}_2 está contenido en el interior de \mathcal{C}_1 . Demuestra que el conjunto de puntos que son centro de un círculo \mathcal{C}_3 tangente tanto a \mathcal{C}_1 como a \mathcal{C}_2 es un par de elipses con focos \mathbf{a} y \mathbf{b} . Observa que en el caso límite en que \mathcal{C}_1 es tangente a \mathcal{C}_2 , una de las elipses se degenera en un segmento.



2.3 Hipérbolas

La *hipérbola* está definida como el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia (en valor absoluto) de sus distancias a dos puntos fijos \mathbf{p} y \mathbf{q} , llamados focos, es constante. Entonces, una hipérbola \mathcal{H} está definida por la ecuación

$$|d(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - d(\mathbf{x}, \mathbf{q})| = 2a, \tag{2.13}$$

donde $a > 0$, y además $2a < d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) =: 2c$ (ver Ejercicio 2.3). Si tomamos como focos a $\mathbf{p} = (c, 0)$ y a $\mathbf{q} = (-c, 0)$, esta ecuación toma la forma

$$\left| \sqrt{(x - c)^2 + y^2} - \sqrt{(x + c)^2 + y^2} \right| = 2a \tag{2.14}$$

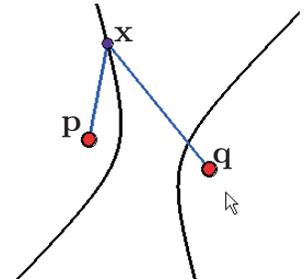
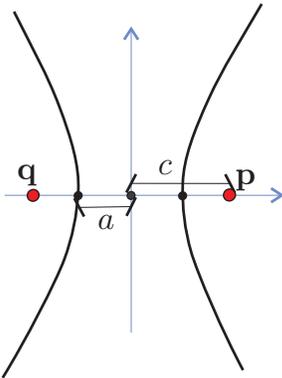
y veremos a continuación que es equivalente a

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2.15}$$

donde $b > 0$ está definida por $a^2 + b^2 = c^2$. A esta última ecuación se le llama la *ecuación canónica de la hipérbola*.

Como las dos primeras ecuaciones involucran valor absoluto, entonces tienen dos posibilidades que corresponden a las dos ramas de la hipérbola. En una de ellas la distancia a uno de los focos es mayor y en la otra se invierten los papeles. De la ecuación (2.14) se tienen dos posibilidades:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - c)^2 + y^2} &= 2a + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} \\ \sqrt{(x + c)^2 + y^2} &= 2a + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \end{aligned} \tag{2.16}$$



la primera corresponde a la rama donde $x < 0$ y la segunda a $x > 0$. Como se hizo en el caso de la elipse (elevando al cuadrado, simplificando para aislar la raíz que queda y luego volviendo a elevar al cuadrado y simplificando, ver Ejercicio 2.3) se obtiene, de cualquiera de las dos ecuaciones anteriores, la ecuación

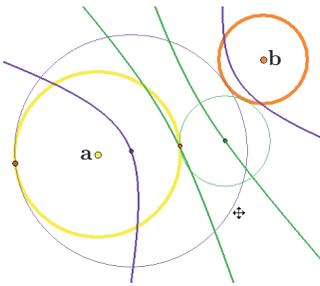
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \quad (2.17)$$

Y de aquí, sustituyendo $-b^2 = a^2 - c^2$, y dividiendo entre $-a^2b^2$ se obtiene la ecuación canónica.

EJERCICIO 2.17 Demuestra que la ecuación (2.13) define a la mediatriz de \mathbf{p} y \mathbf{q} para $a = 0$; a los rayos complementarios del segmento $\overline{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ para $a = c$, y al conjunto vacío para $a > c$.

EJERCICIO 2.18 Demuestra que la ecuación (2.17) se sigue de cualquiera de las dos anteriores (2.16).

EJERCICIO 2.19 Demuestra que si (x, y) satisface la ecuación (2.15) entonces $|x| \geq a$. Concluye (sustituyendo en las raíces, como en el caso de la elipse) que entonces, alguna de las dos ecuaciones (2.16) se satisfacen.



EJERCICIO 2.20 Sean \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 dos círculos con centros \mathbf{a} y \mathbf{b} respectivamente, y sea \mathcal{X} el conjunto de los puntos que son centro de un círculo \mathcal{C}_3 tangente tanto a \mathcal{C}_1 como a \mathcal{C}_2 .

a) Demuestra que si \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 están fuera uno del otro y sus radios son distintos entonces \mathcal{X} consta de un par de hipérbolas con focos \mathbf{a} y \mathbf{b} .

b) Demuestra que si \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 se intersectan pero no son tangentes y sus radios son distintos entonces \mathcal{X} consta de un hipérbola y una elipse con focos \mathbf{a} y \mathbf{b} .

c) Discute los casos límite entre los casos anteriores y el del Ejercicio 2.2 y el de radios iguales.

2.4 Parábolas

Una *parábola* es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto \mathbf{p} (llamado su *foco*) y una recta ℓ , llamada su *directriz*, donde $\mathbf{p} \notin \ell$. Es decir, está definida por la ecuación

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = d(\mathbf{x}, \ell).$$

Tomemos un ejemplo sencillo con el foco en el eje y , la directriz paralela al eje x , y que además pase por el origen. Tenemos entonces $\mathbf{p} = (0, c)$, donde $c > 0$ digamos, y $\ell : y = -c$; de tal manera que la parábola queda determinada por la ecuación

$$\sqrt{x^2 + (y - c)^2} = |y + c|.$$

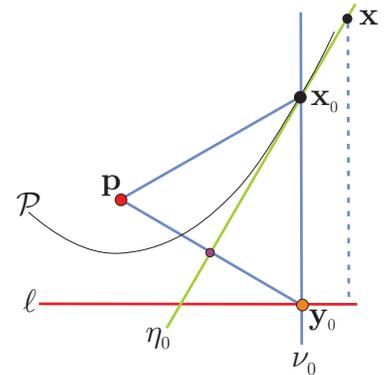
Como ambos lados de la ecuación son positivos, esta es equivalente a la igualdad de sus cuadrados que da

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2cy + c^2 &= y^2 + 2cy + c^2 \\ x^2 &= 4cy. \end{aligned}$$

De tal manera que la gráfica de la función x^2 ($y = x^2$) es una parábola con foco $(0, 1/4)$ y directriz $y = -1/4$. Veremos ahora que cualquier parábola cumple “la propiedad de ser gráfica de una función” respecto a su directriz.

Sea \mathcal{P} la parábola con foco \mathbf{p} y directriz ℓ (donde $\mathbf{p} \notin \ell$). Dado un punto $\mathbf{y}_0 \in \ell$, es claro que los puntos del plano cuya distancia a ℓ coincide con (o se mide por) su distancia a \mathbf{y}_0 son precisamente los de la normal a ℓ que pasa por \mathbf{y}_0 , llamémosla ν_0 . Por otro lado, la mediatriz entre \mathbf{y}_0 y \mathbf{p} , llamémosla η_0 , consta de los puntos cuyas distancias a \mathbf{p} y a \mathbf{y}_0 coinciden. Por lo tanto la intersección de η_0 y ν_0 está en la parábola \mathcal{P} , es decir, $\mathbf{x}_0 = \nu_0 \cap \eta_0 \in \mathcal{P}$, pues $d(\mathbf{x}_0, \ell) = d(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = d(\mathbf{x}_0, \mathbf{p})$. Pero además \mathbf{x}_0 es el único punto en la normal ν_0 que está en \mathcal{P} . Está es “la propiedad de la gráfica” a la que nos referíamos.

Podemos concluir aún más: que la mediatriz η_0 es la tangente a \mathcal{P} en \mathbf{x}_0 . Pues para cualquier otro punto $\mathbf{x} \in \eta_0$ se tiene que su distancia a ℓ es menor que su distancia a \mathbf{y}_0 que es su distancia a \mathbf{p} ($d(\mathbf{x}, \ell) < d(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0) = d(\mathbf{x}, \mathbf{p})$), entonces $\mathbf{x} \notin \mathcal{P}$. De hecho, la parábola \mathcal{P} parte al plano en dos pedazos, los puntos más cerca de \mathbf{p} que de ℓ (lo de adentro, digamos, definido por la desigualdad $d(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \leq d(\mathbf{x}, \ell)$) y los que están más cerca de ℓ que de \mathbf{p} (lo de afuera, dado por $d(\mathbf{x}, \ell) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ en donde está η_0), que comparten la frontera donde estas distancias coinciden (la parábola \mathcal{P}). Así que η_0 pasa *tangente* a \mathcal{P} en \mathbf{x}_0 , pues $\mathbf{x}_0 \in \eta_0 \cap \mathcal{P}$ y además η_0 se queda de un lado de \mathcal{P} .

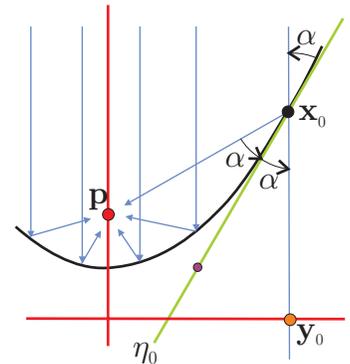


2.5 Propiedades focales

2.5.1 De la parábola

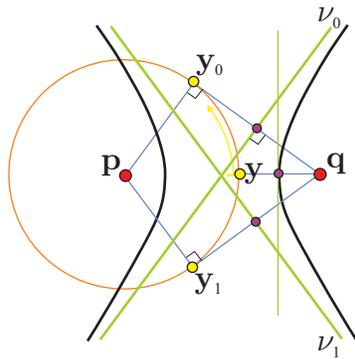
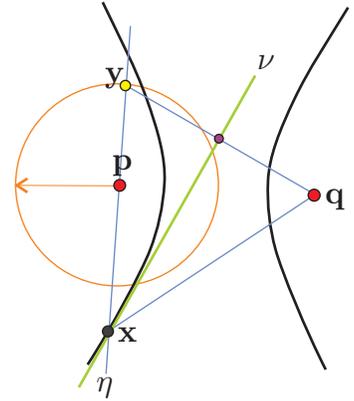
Del análisis geométrico anterior es fácil deducir la *propiedad focal* de la parábola que la ha hecho tan importante en la tecnología de los siglos recientes.

Como la mediatriz η_0 es bisectriz del ángulo $\mathbf{p}\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0$, que llamaremos 2α , entonces un fotón (partícula de luz) que viaja por ν_0 (la normal a ℓ) hacia ℓ y “dentro” de la parábola, incide en ella con ángulo α (este ángulo se mide infinitesimalmente, es decir, con la tangente η_0); como el ángulo de incidencia es igual al de reflexión entonces sale por el rayo que va directo al foco \mathbf{p} .



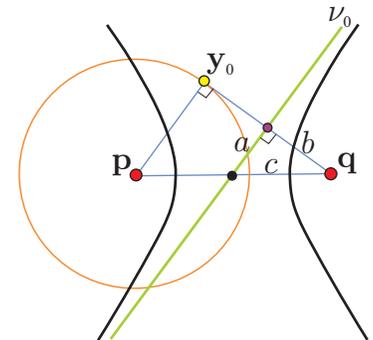
Pero antes de seguir adelante, consideremos el otro caso, es decir, cuando el punto de intersección \mathbf{x} de las rectas $\eta_{\mathbf{y}}$ (por \mathbf{p} y $\mathbf{y} \in \mathcal{C}$) y $\nu_{\mathbf{y}}$, la mediatriz de \mathbf{y} y \mathbf{q} , está del otro lado de \mathbf{y} (es decir, cuando \mathbf{p} está en el segmento $\overline{\mathbf{x}\mathbf{y}}$). Se tiene entonces que $d(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + d(\mathbf{p}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + 2a$, de tal manera que \mathbf{x} está en la otra rama de la hipérbola.

Hemos demostrado que si $\mathbf{y} \in \mathcal{C}$ es tal que su recta por él y \mathbf{p} , $\eta_{\mathbf{y}}$, y su mediatriz con \mathbf{q} , $\nu_{\mathbf{y}}$, se intersectan en un punto \mathbf{x} , entonces $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$. Como en el caso de la parábola, la mediatriz $\nu_{\mathbf{y}}$ es ahora el candidato a ser la tangente a \mathcal{H} en el punto \mathbf{x} . Esto se demuestra viendo que $|d(\mathbf{x}', \mathbf{p}) - d(\mathbf{x}', \mathbf{q})| < 2a$ para cualquier otro punto $\mathbf{x}' \in \nu_{\mathbf{y}}$ y se deja como ejercicio (hay que usar dos veces la desigualdad del triángulo). De aquí también se sigue la propiedad focal de la hipérbola.



Pero además, se sigue otro punto clave. La existencia de las asíntotas. Hay un par de puntos en el círculo \mathcal{C} , para los cuales la mediatriz con \mathbf{q} , es paralela a su recta por \mathbf{p} . Para que esto suceda para un punto $\mathbf{y} \in \mathcal{C}$, como la mediatriz con \mathbf{q} , $\nu_{\mathbf{y}}$, es ortogonal a la recta $\mathbf{q}\mathbf{y}$, entonces es necesario (y suficiente) que el radio $\mathbf{p}\mathbf{y}$ sea también ortogonal a $\mathbf{q}\mathbf{y}$; es decir, que $\mathbf{q}\mathbf{y}$ sea la tangente al círculo \mathcal{C} en el punto \mathbf{y} . Entonces las dos tangentes al círculo \mathcal{C} que se pueden trazar desde \mathbf{q} , nos definen dos puntos, \mathbf{y}_0 y \mathbf{y}_1 digamos, cuyas mediatrices con \mathbf{q} , ν_0 y ν_1 , son las *asíntotas* de \mathcal{H} .

Para fijar ideas tomemos a los focos \mathbf{p} y \mathbf{q} en una línea horizontal y con \mathbf{p} a la izquierda, como en las figuras. Si movemos al punto \mathbf{y} en el círculo \mathcal{C} , empezando con el más cercano a \mathbf{q} , hacia arriba; el correspondiente punto $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ viaja por la rama de \mathbf{q} alejándose (arriba a la derecha), pero su tangente (que empieza vertical) la vemos como mediatriz de un segmentito que gira en \mathbf{q} hacia arriba y se alarga un poco (siguiendo a su otro extremo \mathbf{y}); nótese que la tangente gira entonces hacia la derecha.

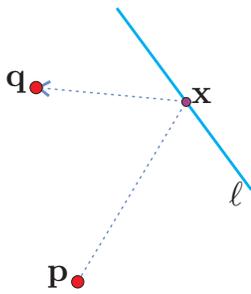


Cuando \mathbf{y} llega a \mathbf{y}_0 , el punto \mathbf{x} (que viaja en \mathcal{H}) se ha “ido al infinito” pero su tangente llega placidamente a ν_0 , la asíntota correspondiente. Al mover otro poquito a \mathbf{y} , la tangente $\nu_{\mathbf{y}}$ empieza a girar hacia la izquierda (pues el segmento $\mathbf{q}\mathbf{y}$ empieza a bajar) y el correspondiente punto $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ reaparece pero en la otra rama y justo por el lado opuesto. Podemos seguir girando a \mathbf{y} sin problemas, mientras \mathbf{x} recorre toda la rama de \mathbf{p} , hasta llegar al otro punto de tangencia \mathbf{y}_1 (ahora abajo) tenemos a \mathbf{x} desaparecido (en el infinito) pero la tangente está en la otra asíntota. Si seguimos girando, \mathbf{x} vuelve a cambiar de rama y regresa, junto con \mathbf{y} , a su lugar de origen.

Además, obtenemos la interpretación geométrica de los tres parámetros a, b, c en el triángulo rectángulo que se forma con el centro, el eje que une a los dos focos y una de las asíntotas.

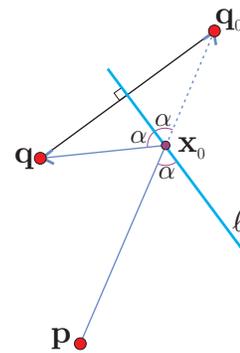
2.5.3 De la elipse

La propiedad focal de la elipse es que cualquier fotón que emana de un foco se refleja en la elipse para llegar al otro foco. De tal manera que si susurramos en uno de los focos de un cuarto elíptico, el sonido rebota en la pared y confluye estruendosamente en el otro foco (pues además, cada onda sonora que emana de un foco llega simultánea al otro foco, sin distorsión o “delay” pues en todas sus trayectorias ha recorrido la misma distancia). Una manera de ver esto es análoga a la que usamos para la hipérbola: tomar el círculo de radio $2a$ centrado en el foco \mathbf{p} –este círculo contiene al otro foco \mathbf{q} , puesto que ahora $2a > d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ –, y luego ver que para los puntos de este círculo, su mediatriz con \mathbf{q} es tangente a la elipse \mathcal{E} . Pero para variarle, se la dejamos al estudiante y usamos otro método basado en el clásico “problema del bombero”.

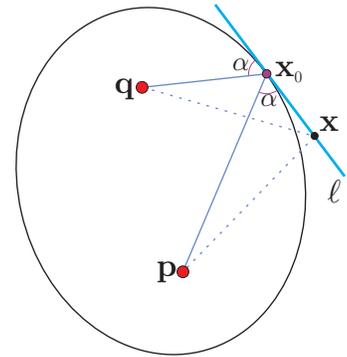


Supongamos que un bombero está parado en el punto \mathbf{p} y hay un fuego –que tiene que apagar– en el punto \mathbf{q} . Pero tiene su cubeta vacía, entonces tiene que pasar primero a llenarla a un río cuyo borde es la recta ℓ . El problema es ¿cuál es la trayectoria óptima que debe seguir el bombero? Es decir, para cuál punto $\mathbf{x} \in \ell$ se tiene que $d(\mathbf{p}, \mathbf{x}) + d(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ es mínima. En la vida real, y con muchos bomberos en fila, se aproximarían a la solución poco a poco. Pero desde nuestra cómoda banca de la abstracción, hay una solución muy elegante.

No hemos especificado de que lado del río está el fuego. Si estuviera del otro lado que el bombero, cualquier trayectoria al fuego tiene que pasar por ℓ y entonces debe irse por la línea recta de \mathbf{p} a \mathbf{q} y tomar agua en $\mathbf{x}_0 = \ell \cap \overline{\mathbf{p}\mathbf{q}}$. Entonces, si fuego y bombero están del mismo lado del río ℓ , podemos pensar en un “fuego virtual”, que es el reflejado de \mathbf{q} en ℓ , llamémosle \mathbf{q}_0 , que cumple que $d(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{q}_0)$ para todo $\mathbf{x} \in \ell$, (para \mathbf{q} y \mathbf{q}_0 , ℓ es su mediatriz). La solución es, por el caso anterior, $\mathbf{x}_0 = \ell \cap \overline{\mathbf{p}\mathbf{q}_0}$. Pero obsérvese además que el ángulo α con el que llega el bombero a ℓ es igual al ángulo “de reflexión” con el que sale corriendo al fuego (ya con la cubeta llena), e igual al ángulo con el que seguiría su trayecto al fuego virtual, y que esta propiedad determina al punto de mínimo recorrido \mathbf{x}_0 ; es fácil convencerse de que para cualquier otro punto de ℓ los ángulos de llegada y de salida son distintos. Si los bomberos fueran fotones emanando de \mathbf{p} y ℓ un espejo, el único que llega a \mathbf{q} es el fotón que toma el recorrido mínimo.



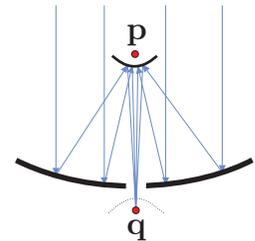
Pensemos ahora que \mathbf{p} y \mathbf{q} son los focos de una elipse y \mathbf{x}_0 un punto en ella. Sea ℓ la recta que pasa por \mathbf{x}_0 y bisecta (por fuera) a los segmentos de \mathbf{p} y \mathbf{q} a \mathbf{x}_0 . Por construcción y la solución al problema del bombero, cualquier otro punto $\mathbf{x} \in \ell$ tiene mayor suma de distancias a los focos y por tanto está fuera de la elipse. Esto demuestra que ℓ es la tangente a la elipse en el punto \mathbf{x}_0 y por tanto, su propiedad focal con la que empezamos este párrafo.



2.5.4 Telescopios

Por último, veamos brevemente cómo funciona un telescopio moderno. El haz de fotones que viene de una galaxia, digamos, es “paralelo” pues está tan lejos que desde la Tierra es imposible medir variación de ángulos (mucho más que los satélites respecto a la superficie de las antenas parabólicas). Un gran espejo parabólico hace confluir este haz en su foco \mathbf{p} . Pero \mathbf{p} está del otro lado del espejo. Esto se resuelve poniendo un pequeño espejo secundario elíptico y con el mismo foco \mathbf{p} , que vuelve a reflejar el haz. Este pasa por un pequeño agujero en el centro del primario y vuelve a confluir en su otro foco \mathbf{q} , que ahora sí está detrás del gran espejo primario, y ahí se captura en el detector. El hoyito que se hace al primario, así como lo que tapa el secundario o la estructura, cuenta poco pues la superficie crece como el radio al cuadrado.

Otra manera de resolver el problema de “regresar el haz” hacia atrás del espejo primario, que es la más usada, es poniendo un secundario hiperbólico en vez de elíptico, con la superficie reflejante por fuera y otra vez con el mismo foco \mathbf{p} . De nuevo hace reflejar el haz en uno que confluye en su otro foco \mathbf{q} , comodamente situado detrás del hoyito del primario.



Lo que cuenta es qué tantos fotones podemos capturar en el sistema óptico; a simple vista es la superficie de la pupila, los telescopios modernos recolectan los fotones que chocarían en decenas de metros cuadrados en una dirección dada y los hacen pasar, después de dos reflexiones adecuadas, por la pupila de algún instrumento detector.

2.6 *Armonía y excentricidad

Hemos definido elipses e hipérbolas como lugares geométricos en base a propiedades aditivas de distancias. Ahora estudiaremos a las cónicas respecto a propiedades multiplicativas. Pues resulta que las tres cónicas (elipses, parábolas e hipérbolas) se definen también como el lugar geométrico de los puntos \mathbf{x} cuya razón de sus distancias a un foco \mathbf{p} y a una recta ℓ llamada *directriz* es una constante fija e , llamada su

excentricidad. Es decir, están dadas por la ecuación

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = e d(\mathbf{x}, \ell).$$

Para $e = 1$, esta es la ecuación de la parábola que ya estudiamos. Veremos que para $e < 1$ define una elipse y para $e > 1$ una hipérbola, de tal manera que las tres cónicas quedan en una sola familia. Pero notemos que no apareció el círculo. Este tiene excentricidad 0 que no cabe en la definición anterior (más que como límite). Sin embargo, aparece en una instancia (en apariencia) más simple de esta ecuación que es tomando otro punto en vez de la línea y veremos que ligado a esto surge naturalmente el concepto clásico de puntos armónicos.

2.6.1 Puntos armónicos y círculos de Apolonio

Sean \mathbf{p} y \mathbf{q} dos puntos distintos en el plano. Consideremos la ecuación

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = h d(\mathbf{x}, \mathbf{q}), \quad (2.18)$$

donde $h > 0$. Para $h = 1$ esta es la ecuación de la mediatriz que estudiamos en el capítulo anterior, pero a excepción de $h = 1$ donde da una recta, veremos que esta ecuación define círculos; los llamados “*círculos de Apolonio*”.

Notemos primero que el lugar geométrico \mathcal{C} definido por (2.18) es simétrico respecto a la línea ℓ que pasa por \mathbf{p} y \mathbf{q} , pues si un punto \mathbf{x} satisface la ecuación también lo hace su reflejado \mathbf{x}' respecto a la recta ℓ . De tal manera que la recta ℓ debe ser un diámetro y el círculo debe estar determinado por los puntos de intersección $\ell \cap \mathcal{C}$. Encontremoslos.

Sabemos que los puntos de ℓ se expresan en coordenadas baricéntricas como $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{p} + \beta \mathbf{q}$ con $\alpha + \beta = 1$, dónde, si damos una dirección a ℓ , de \mathbf{p} hacia \mathbf{q} digamos, y denotamos a las distancias dirigidas con \vec{d} se tiene que

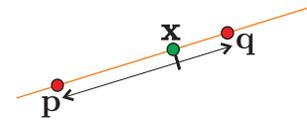
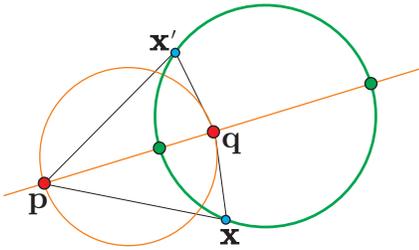
$$\alpha = \frac{\vec{d}(\mathbf{x}, \mathbf{q})}{\vec{d}(\mathbf{p}, \mathbf{q})} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\vec{d}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\vec{d}(\mathbf{q}, \mathbf{p})} = \frac{\vec{d}(\mathbf{p}, \mathbf{x})}{\vec{d}(\mathbf{p}, \mathbf{q})}.$$

De tal manera que si $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{p} + \beta \mathbf{q} \in \ell$, entonces

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\vec{d}(\mathbf{p}, \mathbf{x})}{\vec{d}(\mathbf{x}, \mathbf{q})}.$$

Por tanto, para encontrar las soluciones de (2.18) en ℓ basta encontrar a las soluciones de $|\beta/\alpha| = h$ con $\alpha + \beta = 1$: sustituyendo $\beta = h\alpha$ en esta última ecuación, encontramos una solución dentro del segmento $\overline{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ (con α y β positivas) dada por

$$\alpha_h := \frac{1}{h+1} \quad \text{y} \quad \beta_h := \frac{h}{h+1}.$$



Llamemos \mathbf{a} al punto correspondiente, es decir, sea $\mathbf{a} = \alpha_h \mathbf{p} + \beta_h \mathbf{q}$. Obsérvese que \mathbf{a} es el punto medio cuando $h = 1$; que \mathbf{a} está más cerca de \mathbf{p} para $h < 1$ y que se aproxima a \mathbf{q} conforme h crece. Para $h \neq 1$, también tenemos otra solución fuera del segmento (que viene de tomar $\beta = -h\alpha$), a saber

$$\alpha'_h = \frac{1}{1-h} = \frac{\alpha_h}{\alpha_h - \beta_h} \quad \text{y} \quad \beta'_h = \frac{h}{h-1} = \frac{\beta_h}{\beta_h - \alpha_h}.$$

Llamémos \mathbf{b} a esta otra solución de (2.18) en ℓ (es decir, $\mathbf{b} = \alpha'_h \mathbf{p} + \beta'_h \mathbf{q}$), y nótese que \mathbf{b} está en el rayo exterior de ℓ correspondiente al punto, \mathbf{p} o \mathbf{q} , más cercano a \mathbf{a} ($h < 1$ o $h > 1$, respectivamente). (Y nótese también que la expresión de α_h y β_h en términos de α'_h y β'_h es exactamente la misma).

Clásicamente, se dice que la pareja \mathbf{a}, \mathbf{b} es *armónica* respecto a la pareja \mathbf{p}, \mathbf{q} (o que \mathbf{a} y \mathbf{b} son *conjugados armónicos* respecto a \mathbf{p} y \mathbf{q}) pues (como reza la definición general) los cuatro puntos están alineados y cumplen la relación

$$\frac{d(\mathbf{p}, \mathbf{a})}{d(\mathbf{a}, \mathbf{q})} = \frac{d(\mathbf{p}, \mathbf{b})}{d(\mathbf{b}, \mathbf{q})}, \quad (2.19)$$

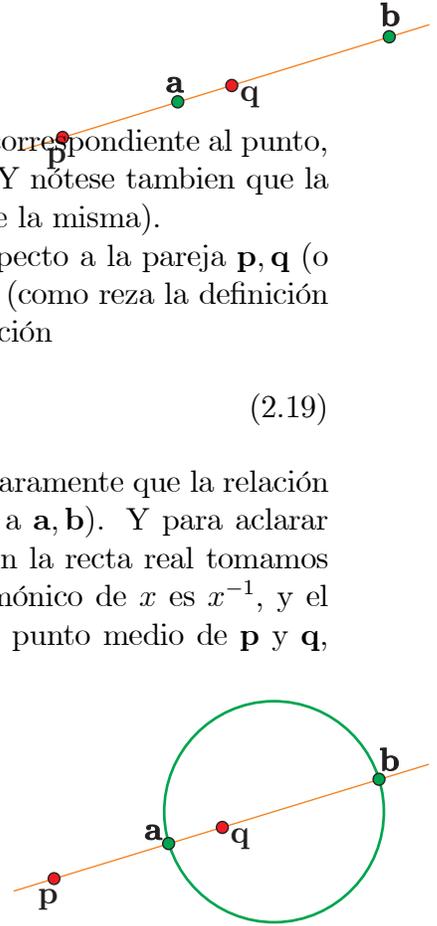
que, en nuestro caso, es la “razón de armonía” h . Se tiene claramente que la relación de armonía es simétrica (pues \mathbf{p}, \mathbf{q} son armónicos respecto a \mathbf{a}, \mathbf{b}). Y para aclarar otro poco su relación geométrica, hay que observar que si en la recta real tomamos a \mathbf{p} y \mathbf{q} como los puntos -1 y 1 entonces el conjugado armónico de x es x^{-1} , y el 0 queda como conjugado armónico del infinito (así como el punto medio de \mathbf{p} y \mathbf{q} , $h = 1$, fué un caso especial).

Ahora sí, demostremos que el círculo con diámetro el segmento $\overline{\mathbf{ab}}$ está dado por la ecuación (2.18), que es, recuérdese, $d(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = h d(\mathbf{x}, \mathbf{q})$. En el Ejercicio 2.1 se debió demostrar que el círculo con diámetro $\overline{\mathbf{ab}}$ está dado por la ecuación $(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0$ (si no se hizo, compruébese ahora). Desarrollemos entonces esta expresión, utilizando que los coeficientes son coordenadas baricéntricas (i.e., que suman 1)

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{b}) &= (\mathbf{x} - \alpha_h \mathbf{p} - \beta_h \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{x} - \alpha'_h \mathbf{p} - \beta'_h \mathbf{q}) \\ &= (\alpha_h (\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \beta_h (\mathbf{x} - \mathbf{q})) \cdot (\alpha'_h (\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \beta'_h (\mathbf{x} - \mathbf{q})) \\ &= \alpha_h \alpha'_h (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \beta_h \beta'_h (\mathbf{x} - \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{q}) \\ &\quad + (\alpha_h \beta'_h + \beta_h \alpha'_h) (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{q}) \\ &= \left(\frac{1}{1-h^2} \right) ((\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) - h^2 (\mathbf{x} - \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{q})) \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde hemos usado las definiciones –en términos de $h \neq 1$ – de nuestros coeficientes (ver Ejercicio 2.6.1). Se tiene entonces que $(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0$ si y sólo si $(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = h^2 (\mathbf{x} - \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{q})$ que es justo el cuadrado de la ecuación (2.18).

Además, tenemos al menos otras tres maneras interesantes de detectar armonía.



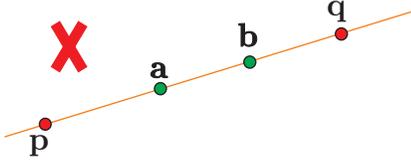
Teorema 2.6.1 Sean $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ cuatro puntos colineales, y sean \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 los círculos con diámetro $\overline{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ y $\overline{\mathbf{a}\mathbf{b}}$ respectivamente. Entonces son equivalentes:

- i) Las parejas \mathbf{p}, \mathbf{q} y \mathbf{a}, \mathbf{b} son armónicas.
- ii) Se cumple que $(\mathbf{a} - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{q}) = -(\mathbf{a} - \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{p})$
- iii) El punto \mathbf{b} está en la línea polar de \mathbf{a} respecto a \mathcal{C}_1 .
- iv) Los círculos \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 se intersectan ortogonalmente.

Demostración. (i) \Leftrightarrow (ii). La condición de armonía (2.19) claramente se puede reescribir, usando normas para expresar distancias, como

$$|\mathbf{a} - \mathbf{p}| |\mathbf{b} - \mathbf{q}| = |\mathbf{a} - \mathbf{q}| |\mathbf{b} - \mathbf{p}| \tag{(i)}$$

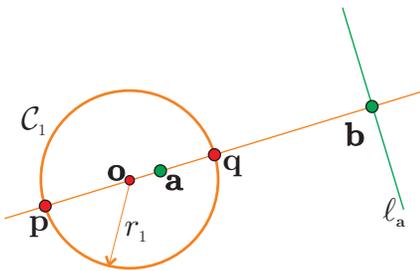
La equivalencia de (i) y (ii) se sigue del hecho de que si dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} son paralelos entonces $|\mathbf{u}| |\mathbf{v}| = \pm (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ dependiendo de si apuntan en la misma dirección (+) o en direcciones opuestas (-). Esto da inmediatamente la implicación (ii) \Rightarrow (i) pues por la hipótesis general del Teorema los cuatro puntos están alineados y entonces sus diferencias son paralelas. Para el regreso sólo hay que tener cuidado con los signos. Si se cumple (i) es fácil ver que el orden lineal en que aparecen los puntos en la línea es



alternado (entre las parejas), pues si, por ejemplo, \mathbf{p} y \mathbf{q} fueran los extremos, un lado de (i) es estrictamente menor que el otro. Entonces –renombrando entre las parejas si es necesario– podemos suponer que aparecen en el orden $\mathbf{p}, \mathbf{a}, \mathbf{q}, \mathbf{b}$. En este caso (i) toma la expresión (ii).

(i) \Rightarrow (iii) Supongamos que \mathbf{p}, \mathbf{q} y \mathbf{a}, \mathbf{b} son los de los párrafos anteriores con razón de armonía $h \neq 1$. Sean \mathbf{o} (ojo, no necesariamente es el origen $\mathbf{0}$) el centro y r_1 el radio del círculo \mathcal{C}_1 , es decir, $\mathbf{o} = (1/2)(\mathbf{p} + \mathbf{q})$ y $r_1 = |\mathbf{p} - \mathbf{q}|/2$. De tal manera que $\mathcal{C}_1 : (\mathbf{x} - \mathbf{o}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{o}) = r_1^2$.

Por la Sección 1.1, ver que \mathbf{b} está en la línea polar de \mathbf{a} respecto a \mathcal{C}_1 equivale a demostrar que $(\mathbf{a} - \mathbf{o}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{o}) = r_1^2$. Pero ya evaluamos $(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{b}) = (\mathbf{a} - \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{x})$ para cualquier \mathbf{x} ; entonces hay que sustituir \mathbf{o} en (2.20), para obtener



$$\begin{aligned} (\mathbf{a} - \mathbf{o}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{o}) &= \left(\frac{1}{1 - h^2} \right) ((\mathbf{o} - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{o} - \mathbf{p}) \\ &\quad - h^2 (\mathbf{o} - \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{o} - \mathbf{q})) \\ &= \left(\frac{1}{1 - h^2} \right) (r_1^2 - h^2 r_1^2) = r_1^2 . \end{aligned}$$

Por el papel que jugó (y jugará) el punto \mathbf{o} , conviene pensar que sí es el origen. Si no lo fuera, lo trasladamos al origen junto con el resto de los puntos y las propiedades que nos interesan se preservan. Puede pensarse también que en lo que sigue cada letra (\mathbf{b} digamos) representa al punto original menos \mathbf{o} (a $\mathbf{b} - \mathbf{o}$ en el ejemplo). Tenemos

entonces que $\mathbf{p} = -\mathbf{q}$ (pues el origen es ahora su punto medio) y que $r_1^2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}$. Ahora la condición (iii) equivale a

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = r_1^2 \tag{iii'}$$

y podemos demostrar la equivalencia de (ii) y (iii) de un solo golpe (aunque un lado ya esté demostrado).

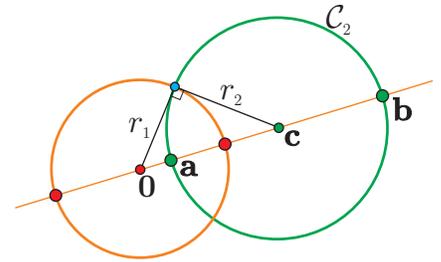
(ii) \Leftrightarrow (iii') Usando que $\mathbf{q} = -\mathbf{p}$, claramente se tiene

$$(\mathbf{a} - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{q}) + (\mathbf{a} - \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{p}) = 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p})$$

que concluye la demostración ((ii) es que el lado izquierdo sea cero y (iii) que el lado derecho lo es).

(iii) \Leftrightarrow (iv) Sean $\mathbf{c} = (1/2)(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ el centro de \mathcal{C}_2 , y $r_2 = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|/2$ su radio. Que \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 sean *ortogonales* quiere decir que sus tangentes en el punto de intersección lo son; y esto equivale a que sus radios al punto de intersección son ortogonales (pues las tangentes son ortogonales a los radios). Por el Teorema de Pitágoras esto equivale a que

$$r_1^2 + r_2^2 = |\mathbf{c}|^2 \tag{iv'}$$



(pues \mathcal{C}_1 está centrado en el origen así que $|\mathbf{c}|$ es la distancia entre los centros), que es lo que tomamos en adelante como (iv). Sabemos, por hipótesis, que \mathbf{a} y \mathbf{b} son paralelos y hay que observar que ambas condiciones ($\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = r_1^2 > 0$ y $r_1^2 + r_2^2 = |\mathbf{c}|^2$) implican que están del mismo lado del origen. Podemos suponer entonces que \mathbf{a} es “más chico” que \mathbf{b} , y entonces

$$\begin{aligned} |\mathbf{c}|^2 &= (|\mathbf{a}| + r_2)^2 \\ &= |\mathbf{a}|(|\mathbf{a}| + 2r_2) + r_2^2 \\ &= |\mathbf{a}||\mathbf{b}| + r_2^2 \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + r_2^2 \end{aligned}$$

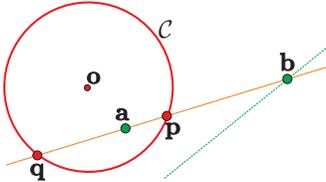
Lo cual demuestra la equivalencia (iii') \Leftrightarrow (iv') y concluye el Teorema. □

En resumen, los círculos de Apolonio de un par de puntos \mathbf{p} y \mathbf{q} , son los ortogonales al círculo que los tiene como diámetro y cuyo centro está en esa línea, y además la cortan en sus conjugados armónicos; teniendo como límites a los “círculos de radio cero” en \mathbf{p} y en \mathbf{q} y a su línea mediatriz.

EJERCICIO 2.21 Demuestra que $\alpha_h \beta'_h = -\beta_h \alpha'_h$ (usando la definición de los correspondientes primados sin referencia a h); y, usando las definiciones en base a h , demuestra que

$$\alpha_h \alpha'_h = \frac{1}{1 - h^2} \quad \text{y} \quad \beta_h \beta'_h = \frac{h^2}{h^2 - 1}$$

son las coordenadas baricéntricas del centro del círculo (2.18) respecto a \mathbf{p} y \mathbf{q} .



EJERCICIO 2.22 Sean \mathbf{p} y \mathbf{q} dos puntos en un círculo \mathcal{C} con centro \mathbf{o} ; y sea \mathbf{a} un punto en el segmento $\overline{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ distinto del punto medio, es decir, $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{p} + \beta \mathbf{q}$ con $\alpha + \beta = 1$, $0 < \alpha < 1$ y $\alpha \neq \beta$. Demuestra que el punto armónico de \mathbf{a} respecto a \mathbf{p} y \mathbf{q} (llamémoslo \mathbf{b}) está en la línea polar de \mathbf{a} respecto al círculo \mathcal{C} . (Expresa \mathbf{b} en coordenadas baricéntricas respecto a \mathbf{p} y \mathbf{q} , y sustituye en la ecuación de la polar de \mathbf{a}). Concluye que la línea polar de un punto \mathbf{a} en el interior de un círculo consiste de todos sus armónicos respecto a la intersección con el círculo de las líneas que pasan por el.

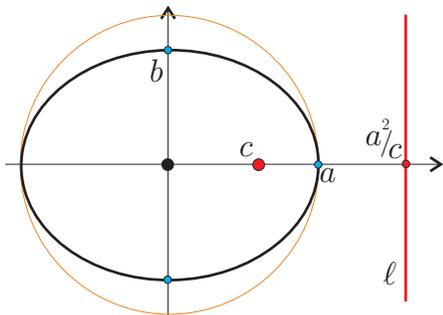
2.6.2 Excentricidad

Demostraremos ahora que elipses e hipérbolas se definen por la ecuación

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = e d(\mathbf{x}, \ell), \tag{2.21}$$

con $e < 1$ y $e > 1$ respectivamente, donde \mathbf{p} es uno de sus focos, y a ℓ la llamaremos su *directriz* correspondiente. La constante e es llamada la *excentricidad* de la cónica, y ya sabemos que las de excentricidad 1 son las parábolas.

Consideremos la elipse canónica \mathcal{E} con centro en el origen y semiejes $a > b$ en los ejes coordenados. Sabemos que sus focos están en $\mathbf{p} = (c, 0)$ y $\mathbf{q} = (-c, 0)$, donde $c > 0$ es tal que $b^2 + c^2 = a^2$. Sabemos además que \mathcal{E} interseca al eje- x , que es su eje focal, en los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$.



Resulta que la directriz de \mathcal{E} correspondiente al foco \mathbf{p} es ortogonal al eje- x y lo interseca en el conjugado armónico de \mathbf{p} respecto a los puntos de intersección; es decir, es la línea polar a \mathbf{p} respecto al círculo $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = a^2$ (que, notemos, es doblemente tangente a \mathcal{E}). Sea entonces ℓ definida por la ecuación

$$x = \frac{a^2}{c}.$$

De los datos que tenemos podemos deducir su excentricidad (pues del punto $(a, 0) \in \mathcal{E}$ conocemos sus distancias a \mathbf{p} y ℓ), que resulta $e = c/a < 1$. Desarrollemos entonces a la ecuación (2.21) en coordenadas para ver si son ciertas las afirmaciones que nos hemos sacado de la manga de la historia.

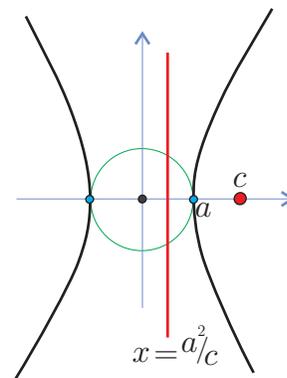
Puesto que ambos lados de (2.21) son positivos, esta ecuación es equivalente a su cuadrado que en coordenadas (y nuestra definición de \mathbf{p} , ℓ y e) toma la forma

$$\begin{aligned} (x - c)^2 + y^2 &= \left(\frac{c}{a}\right)^2 \left(x - \frac{a^2}{c}\right)^2 \\ x^2 - 2cx + c^2 + y^2 &= \left(\frac{c^2}{a^2}\right) \left(x^2 - 2\frac{a^2}{c}x + \frac{a^4}{c^2}\right) \\ \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right) x^2 + y^2 &= a^2 - c^2 \end{aligned}$$

De aquí, dividiendo entre $b^2 = a^2 - c^2$ se obtiene la ecuación canónica de la elipse \mathcal{E} y quedan demostradas todas nuestras aseveraciones.

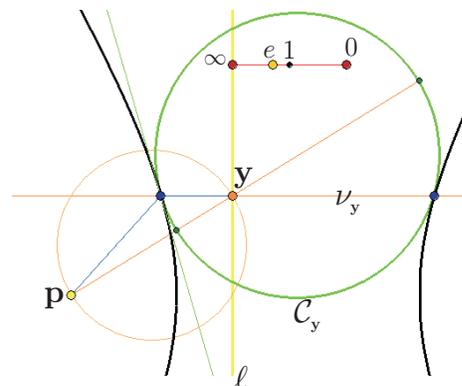
Para una hipérbola \mathcal{H} , de nuevo la directriz correspondiente a un foco es perpendicular al eje focal y lo intersecta en su conjugado armónico respecto a los puntos de intersección con \mathcal{H} . De tal manera que podemos tomar exactamente los mismos datos del caso anterior ($\mathbf{p} = (c, 0)$, $\ell : cx = a^2$ y $e = c/a$), y la ecuación (2.21) se desarrolla igualito. Pero ahora tenemos que $c > a$ (la excentricidad es mayor que 1, $e = c/a > 1$) y entonces definimos $b > 0$ tal que $a^2 + b^2 = c^2$; de tal manera que en el último paso hay que dividir por $-b^2$ para obtener

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$



La excentricidad de una cónica es un invariante de semejanza, es decir, si magnificamos (hacemos zoom) o disminuimos una cónica, su excentricidad se mantiene. Pues esta magnificación (o contracción) se logra alejando (o acercando) al foco \mathbf{p} y a la directriz ℓ . Pero si fijamos a estos últimos y variamos la excentricidad e , se cubre por cónicas todo el plano (exceptuando a \mathbf{p} y ℓ que aparecen como los límites $e \rightarrow 0$ y $e \rightarrow \infty$ respectivamente) pues cualquier punto da una razón específica entre las distancias y por tanto una excentricidad que lo incluye.

Recreemos la construcción de la parábola en base a mediatrices, pero ahora con círculos de Apolonio. Si \mathcal{P} es la cónica con foco \mathbf{p} , directriz ℓ y excentricidad e (puede ser elipse, parábola o hipérbola), y para cada punto \mathbf{y} en ℓ tomamos el círculo de Apolonio \mathcal{C}_y entre \mathbf{p} y \mathbf{y} con razón de armonía e , entonces es claro que $\mathcal{C}_y \cap \nu_y \subset \mathcal{P}$ (donde ν_y es la normal a ℓ en \mathbf{y}). Pues la distancia de un punto en ν_y a ℓ corresponde a su distancia a \mathbf{y} ; y si está en \mathcal{C}_y la razón de las distancias a \mathbf{p} y \mathbf{y} es la adecuada. Pero ahora $\mathcal{C}_y \cap \nu_y$ no es necesariamente un punto pues, salvo el caso $e = 1$ donde \mathcal{C}_y es la mediatriz, un círculo intersecta a una recta en 2, 1 o 0 puntos.



Para el caso $e < 1$, los círculos de Apolonio \mathcal{C}_y contienen a \mathbf{p} en su interior; crecen conforme \mathbf{y} se aleja en ℓ , pero llega un momento (que corresponde al semieje menor de la elipse) en el que ν_y ya no los corta. Por el contrario, para $e > 1$ los círculos de Apolonio contienen a \mathbf{y} , y entonces ν_y siempre los corta en dos puntos que dibujan las dos ramas de la hipérbola.

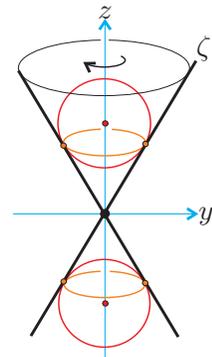
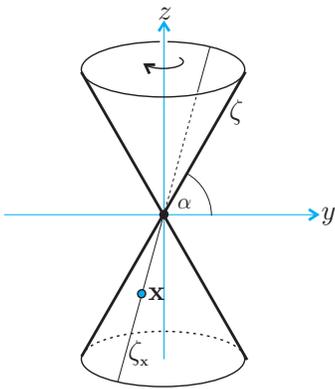
En ambos casos, si \mathcal{C}_y corta a ν_y en \mathbf{x} , digamos, entonces por un argumento análogo al de la parábola se puede ver que está fuera de \mathcal{P} , es decir, que \mathcal{C}_y es *tangente* a \mathcal{P} en \mathbf{x} , pero en este caso, y salvo por el último toque a una elipse en el semieje menor, también es tangente a \mathcal{P} en otro punto. Para la hipérbola es fácil verlos, simplemente dejar caer un círculo hacia el centro y si es más grande que la cinturita: ahí donde se detiene es un \mathcal{C}_y , donde \mathbf{y} corresponde a la altura de los dos puntos en \mathcal{P} donde se atoró.

2.7 *Esferas de Dandelin

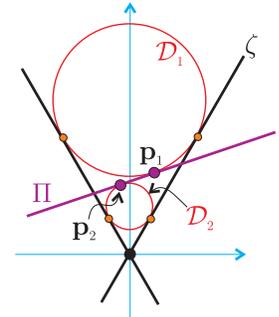
Hemos desarrollado todo este capítulo en base a las definiciones planas de las cónicas por propiedades de distancias. Sin embargo, en su introducción empezamos como los griegos: definiéndolas en el espacio como intersección de un cono con planos. Veremos brevemente que tal definición corresponde a la que usamos, basándonos en una demostración que data de cerca del 1800 debida a un tal Dandelin.

Para definir un cono \mathcal{C} en \mathbb{R}^3 , consideremos una línea ζ por el origen en el plano yz con un ángulo α respecto al eje y : y hagámosla girar alrededor del eje z . De tal manera que la intersección de \mathcal{C} con un plano horizontal ($z = c$, digamos) es un círculo centrado en “el origen” $((0, 0, c)$, y de radio $c \cos \alpha / \sin \alpha$). Por la definición, es claro que para cualquier punto $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, su recta por el origen, que denotaremos $\zeta_{\mathbf{x}}$, está contenida en el cono, y la llamaremos *la recta del cono por \mathbf{x}* . Queremos hacer ver que cualquier plano Π que no contenga al origen intersecta al cono \mathcal{C} en una cónica (definida por distancias).

Las *esferas tangentes* al cono, son esferas con centro en el eje z y que tocan al cono pero que no lo cortan, es decir, que tienen a todas las líneas del cono como líneas tangentes. Si dejamos caer una esfera dentro del cono se asienta en una esfera tangente. Es claro que las esferas tangentes se obtienen de hacer girar en el eje z un círculo centrado en él y tangente a la línea generadora ζ ; que para cada radio hay exactamente dos esferas tangentes (una arriba y una abajo), y que para cada punto del eje- z hay una única esfera tangente centrada en él. Además, cada esfera tangente al cono lo intersecta en un círculo horizontal llamado su *círculo de tangencia* o de *contacto*.



Tomemos ahora un plano Π casi horizontal. Este plano Π tiene exactamente dos esferas tangentes que también son tangentes al cono \mathcal{C} , que llamaremos sus *esferas de Dandelin*, \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_2 . Veámos, y para fijar ideas, pensemos que el plano Π intersecta al cono arriba del origen, pero no muy lejos. Si pensamos en una esfera muy grande tangente al cono, ésta está muy arriba; al desinflarla (manteniéndola siempre tangente al cono) va bajando. Hay un primer momento en el que toca a Π , esa es \mathcal{D}_1 . Al seguir desinflándola, intersecta a Π en círculos, y hay un último momento en que lo toca —esa es \mathcal{D}_2 — para seguir decreciendo, insignificante, hacia el origen.

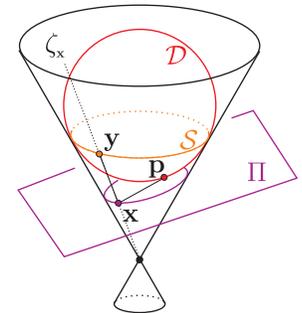


Más formalmente, y sin perder generalidad, podemos suponer que el plano Π contiene a la dirección del eje x ; entonces las esferas de Dandelin de Π corresponden a dos de los cuatro círculos tangentes a las tres rectas que se obtienen de intersectar al plano yz con el plano Π y el cono \mathcal{C} (precisamente, los dos que caen dentro del cono).

Sean \mathbf{p}_1 y \mathbf{p}_2 los puntos donde \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_2 tocan, respectivamente, al plano Π . Estos serán los focos de la elipse $\Pi \cap \mathcal{C}$. Para verlo necesitamos un lema que es más difícil enunciar que probar.

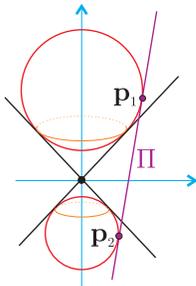
Lema 2.7.1 *Sea \mathcal{D} una esfera de Dandelin de un plano Π . Sea \mathbf{p} su punto de contacto con Π ; y sea \mathcal{S} el círculo de tangencia de \mathcal{D} en \mathcal{C} . Para cualquier $\mathbf{x} \in \Pi \cap \mathcal{C}$, sea \mathbf{y} la intersección de la recta del cono por \mathbf{x} y el círculo de tangencia, i.e. $\mathbf{y} = \mathcal{S} \cap \zeta_{\mathbf{x}}$; se tiene entonces que*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$



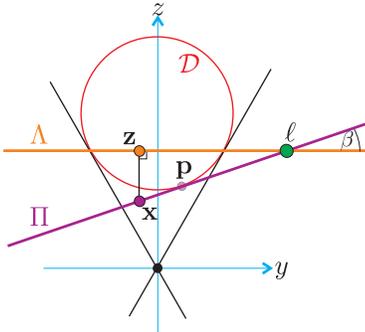
Basta observar que los segmentos $\overline{\mathbf{x}\mathbf{p}}$ y $\overline{\mathbf{x}\mathbf{y}}$ son ambos tangentes a la esfera \mathcal{D} y que, en general, dos segmentos que salen del mismo punto y llegan tangentes a una esfera miden lo mismo. \square

Ahora sí, podemos demostrar que $\Pi \cap \mathcal{C}$ es una elipse tal como las definimos. Sean \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 los círculos de tangencia de las esferas de Dandelin \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_2 , respectivamente. Dado $\mathbf{x} \in \Pi \cap \mathcal{C}$, según el Lema, sus distancias a los respectivos focos se pueden medir en la línea del cono como las distancias de \mathbf{x} a los círculos de tangencia \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 . Como \mathbf{x} está entre estos dos círculos, la suma de las distancias es constante (a saber, es la distancia, medida en líneas del cono, entre \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2).



Cuando el plano Π es cercano a un plano vertical (incluyendo a este caso), se tiene que Π intersecta a ambos lados del cono \mathcal{C} . Pero también tiene dos esferas de Dandelin tangentes a él y al cono. De nuevo, sus puntos de tangencia con el plano son los focos de la hipérbola $\Pi \cap \mathcal{C}$, y la demostración es análoga (usando al Lema). Dejamos los detalles al lector (siguiente ejercicio), pues para el caso de la parábola necesitamos encontrar la directriz, y su análisis incluya los tres casos.

Supongamos que el plano Π tiene un ángulo $\beta > 0$ respecto al plano horizontal xy , y que \mathcal{D} es su esfera de Dandelin, es decir, que es tangente a Π y al cono \mathcal{C} con punto y círculo de contacto \mathbf{p} y \mathcal{S} respectivamente. Sea Λ el plano horizontal que contiene al círculo de tangencia \mathcal{S} . Sea $\ell = \Pi \cap \Lambda$, línea que podemos pensar como paralela al eje x y que llamaremos la *directriz*.



Consideremos un punto $\mathbf{x} \in \Pi \cap \mathcal{C}$. De la proyección al plano yz , es fácil deducir que

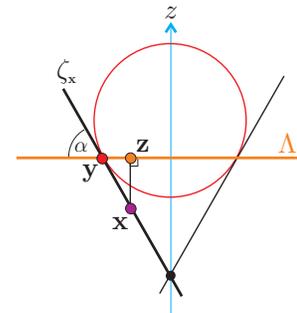
$$d(\mathbf{x}, \ell) \operatorname{sen} \beta = d(\mathbf{x}, \mathbf{z}),$$

donde \mathbf{z} es la proyección ortogonal de \mathbf{x} al plano horizontal Λ . Tomemos ahora el plano vertical que pasa por \mathbf{x} y el eje z . Claramente contiene a \mathbf{z} y a la línea del cono $\zeta_{\mathbf{x}}$ que pasa por \mathbf{x} ; y es fácil ver en él que

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \operatorname{sen} \alpha,$$

donde $\mathbf{y} = \zeta_{\mathbf{x}} \cap \Lambda$ (justo la \mathbf{y} que aparece en el Lema). De estas dos ecuaciones y el Lema se sigue que

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha} d(\mathbf{x}, \ell).$$



Lo cual demuestra que los planos que no pasan por el origen (los que tienen esferas de Dandelin) intersectan al cono \mathcal{C} en cónicas cuya excentricidad depende de los ángulos (tal como queríamos demostrar).

Obsérvese que no eliminamos a los planos horizontales ($\beta = 0$) de la afirmación anterior. Cuando el plano Π tiende a uno horizontal, la cónica se hace un círculo, el foco \mathbf{p} tiende a su centro y la directriz ℓ se aleja hacia el infinito.

EJERCICIO 2.23 Concluye la demostración de que $\Pi \cap \mathcal{C}$ es una hipérbola cuando las dos esferas de Dandelin de Π están en los dos lados del cono usando a estas y a los dos focos.

EJERCICIO 2.24 Demuestra que si $\beta = \alpha$ entonces el plano Π tiene una única esfera de Dandelin (el caso de la parábola).