Introducción Analítica a la Geometría

Javier Bracho

May 6, 2003

Abstract

0.1 Prologo

Este libro es un texto para el primer nivel universitario. No presupone "cierta madurez" matemática sino que se empeña en crearla, y sólo requiere del estudiante conocimientos mínimos del lenguaje de teoría de conjuntos, además de su esfuerzo. Fué concebido y experimentado en cursos de geometría analítica de primer año de las licenciaturas en matemáticas, física, actuaría y ciencias de la computación; pero puede extenderse a otras áreas.

A principios del Siglo XXI, la geometría –como área de las matemáticas– evade a las definiciones pues sus límites son difusos y sus ramificaciones numerosas. Es, quizás, más bien una sensibilidad al practicar el pensamiento abstracto que un cuerpo bien definido de conocimiento. El título de "geómetra" hoy se lo disputan matemáticos de muy diversas áreas; por dar ejemplos, los que hacen investigación en geometría algebráica, geometría diferencial o geometría discreta se llaman a si mismos "geómetras", a secas y con soberbio aire excluyente. Además, a cada rato aparecen nuevas sectas de "geómetras" abriendo o bautisando áreas como "geometría computacional", "geometría simpléctica" o "geometría no conmutativa", por no hablar del uso del término como calificativo: "topología geométrica", "convexidad geométrica", "teoría geométrica de grupos", "física geométrica", etc. Quiero dar a entender con esta breve enumeración –que sólo a unos pocos lectores dice algo más que la rimbombancia misma de las palabras– que la Geometría, ahora sí, con mayúsculas, está vivita y coleando; en plena expansión como el resto de la ciencia. Sea lo que fuere, área o sensibilidad, es un motor activo y prolífico en el imponente desarrollo actual de las matemáticas. Es, en fin, una parte medular de la matemática contemporánea y a su vez, como sensibilidad o por sus aplicaciones, la rebasa para ser un preciadísimo bien cultural.

Sin embargo, y en contraste preocupante con este panorama, la educación de la geometría a nivel universitario básico ha quedado estancada y ha sido relegada casi hasta la vacuidad. En muchas universidades, el curso clásico de "geometría analítica" ha desaparecido o se ha integrado a los cursos de cálculo como servicio, pues las cónicas –argumentan– son de nivel bachillerato; y en aquellas donde aún se da, es con programas que parecen ignorar que el Siglo XIX aconteció. Los cursos de "geometría sintética" o "a la griega", a veces llamados con ironía involuntaria "geometría moderna" –pues tratan de "geometría griega" hecha despues de ellos– también se sienten anquilosados y, en el mejor de los casos, se usan como materias optativas de divertimento histórico-didáctico, desligados por completo del resto del curriculo científico. No obstante, se siguen formando geómetras pues, como sensibilidad, la geometría es irrefrenable. Los estudiantes que la tienen, aprenden por ósmosis y desarrollan su intuición en otros cursos básicos o intermedios, como el de álgebra lineal o topología, y sólo hasta nivéles avanzados de licenciatura vuelven a encontrar "geometrías", pero siempre con apellidos como "algebráica" o "diferencial"; ya muy especializadas.

El contraste entre la vitalidad de la geometría en el desarrollo de las matemáticas –su enorme importancia en ellas– por un lado, y por el otro, su magro valor curricular en la formación de científicos y profesionistas –su ausencia en la cultura ciudadana mínima–, obliga a una reflexión seria, sobre todo de parte de los que nos consideramos geómetras.

Para arañar la superficie de esta discusión, tengo que recurrir al balance entre las dos grandes tendencias, fuerzas o procesos que desarrollan la ciencia. Se tiene por un lado a la fuerza creativa o de investigación que la hace avanzar y conquistar nuevo conocimiento. Pero además, hay un proceso de digestión, destilación o decantación en el cual nos vamos quedando con lo fundamental, reprosesando las ideas básicas, limpiando los argumentos centrales, aclarando y simplificando los razonamientos que construyen las grandes teorías; de tal manera que cada generación pueda acceder a ese conocimiento a una edad más temprana y con más profundidad que sus predecesoras.

Durante el siglo XX el proceso de digestión de las matemáticas se centró en sus fundamentos y formalización. Se creó un lenguaje, un estilo y una notación basados en la Teoría de Conjuntos (iniciada por Georg Cantor hacia finales del XIX) que permeó y cambió a todas las matemáticas; desde cómo se le presentan a los párvulos hasta cómo se escriben sus artículos de investigación, pasando, por supuesto, por sus libros de texto y los currículos de todos los nivéles de enseñanza. Pecando de simplismo pero, y valga la redundancia, en aras de simplificar mi argumento, permítaseme ubicar a este monumental cambio en el ámbito de lo *simbólico*: "la otra sensibilidad" para enfrentar las matemáticas. Me aventuro a afirmar entonces que la digestión de la geometría quedó rezagada porque la energía intelectual de un siglo no puede desperdigarse demasiado. Pero la marea, como el siglo, está cambiando.

En los últimos 20 o 30 años del Siglo XX, se dió un renacimento de la geometría del Siglo XIX a nível de investigación, pero ahora, se está digiriendo rapidamente para permear en la enseñanza. La geometría hiperbólica renació ligada a la topología en dimensiones bajas; la geometría proyectiva revivió como fundamento para desarrollar la visualización por computadora; los grupos geométricos encontraron exitantes aplicaciones en la física, etc. Y en este entorno, nuevos libros de texto han aparecido dándole a la geometría un enfoque más "Kleiniano". Lo llamo así, porque al concluir el Siglo XIX –en el que se convulcionó la geometría al descubrirse sus versiones no euclidianas– la "Geometría" había dejado de ser una unidad, se había "desvalagado" en multiples direcciones al parecer divergentes y Felix Klein, en su famosa ponencia del *Programa de Erlangen* y con profundidad visionaria, trató de resumir esta revolución diciendo, a muy grandes razgos, que "la geometría es el estudio de espacios junto con sus grupos de transformaciones". Ochenta años despues, empezó a plasmarse esta filosofía en textos de nivel medio universitario.

De estos nuevos libros de texto, tuvieron gran influencia sobre mi, y por lo tanto sobre el presente libro, el de E. Rees [??] y el de P. J. Ryan [??], sin embargo presuponen ya una cierta madurez matemática de parte del estudiante;

la filosofía de este libro es escencialmente la misma pero llevada a un nivel más bajo, introductorio. Se desarrolló en los cursos de Geometría Analítica que periodicamente he dado en la Facultad de Ciencias de la UNAM durante 17 años. Con un programa oficial que bien podría datar del Siglo XVIII (la geometría analítica como se entendía entonces), este curso ha ido evolucionando hasta su presente forma. La condición inicial de tener que cubrir un programa basado en el estudio de las cónicas, más que estorbar, acabó dándole una gran consistencia. Pues los problemas que plantean motivan el desarrollo teórico que a su vez, con más herramientas geométricas en mano, permiten entenderlas más profundamente hasa plantear nuevos problemas que a su vez ...

Es frecuente pensar (yo lo hice por demasiado tiempo) que la geometría analítica representa un rompimiento con la geometría griega clásica, presentarla como algo que la supera; o bien, que las geometrías proyectiva e hiperbólica rompen con la euclidiana y que hay que tomar partido por alguna. No. Son todas ellas parte de lo mismo, La Geometría. Para hacer énfasis (quizá excesivo) en ello, gran parte del primer capítulo se dedica a reconstruir la axiomática euclidiana a partir de la de los números reales que es la de la geometría analítica. Parece superfluo, pero da lugar a ejercitar las operaciones vectoriales y la idea de "demostración" en casos sencillos e intuitivamente claros, va construyendo la llamada "madurez matemática" y en los ejercicios, tanto teóricos como númericos, debe darle al estudiante seguridad y fe en su intuición geométrica. Más adelante, como los planos proyectivo e hiperbólico se construyen, ya no hay necesidad de axiomatizar, vamos sobre terreno firme y los axiomas quedan como observaciones con notas históricas.

Es un hecho que el enfoque (históricamente) original con el que se resuelven los problemas no es siempre el más directo, consiso, claro o elegante. Lo mismo sucede con las grandes Teorías; su enseñanza siguiendo estrictamente su linea de desarrollo histórico no es necesariamente la más profunda, directa o eficiente. Estoy convencido de que la cultura geométrica general, y muy en especial la de los científicos y matemáticos, debe actualizarse con urgencia a tener un rezago de por lo menos un Siglo, no de cuatro. Este libro es fruto de mi esfuerzo para contribuir a ello.

0.1.1 Prologo para el maestro

Aquí falta por escribir un prologo para el maestro. Descripción de los capítulos, de las inovaciones en ellos, de cómo se concatenan y de los conceptos importantes para estudios ulteriores. También de los posibles recorridos y las secciones extras (no necesarias para el cuerpo básico, pero como material interesante para ciertos estudiantes).

0.1.2 Prologo para el estudiante

Rollito sobre cómo leer, como estudiar y los diferentes tipos de ejercicios.

0.1.3 Agradecimientos

En su momento...

Contenido