Geometría Analítica I

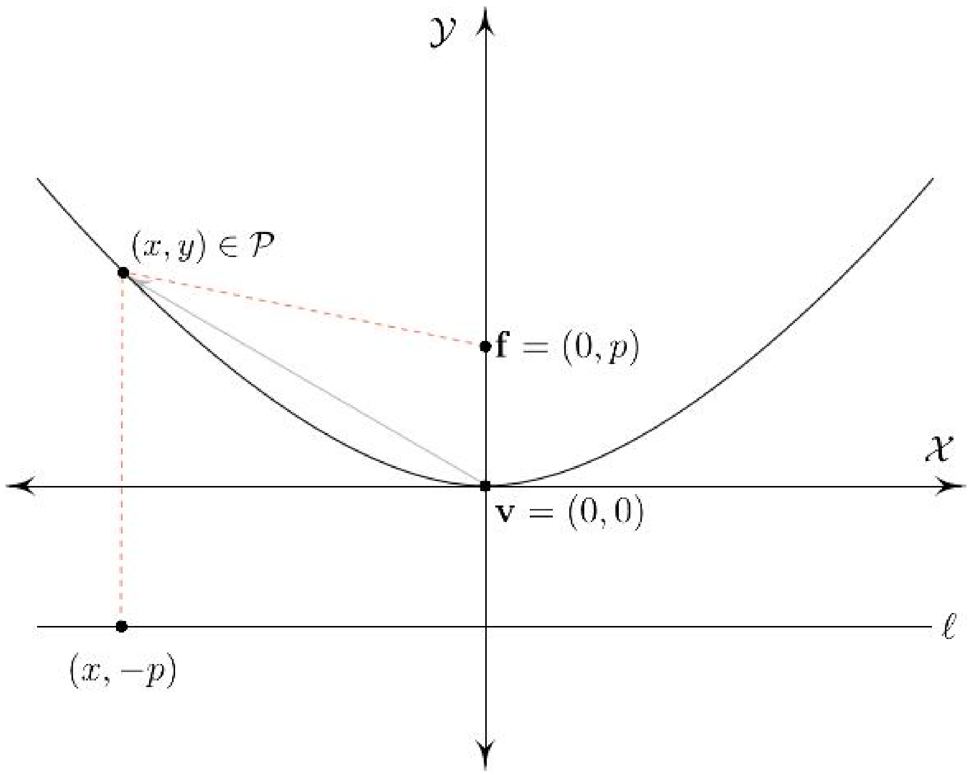
Notas

April 9, 2002

Parábola Es el conjunto $\mathcal{P}$ de puntos en un plano $\mathcal{XY}$ cuyas distancias a un punto $\mathbf{f} \in \mathcal{XY}$ y a una recta $\ell \in \mathcal{XY}$ coinciden. La ecuación

$$x^2 = 4py, \tag{1}$$

con $p > 0$, describe a todas las parábolas *no degeneradas*, que son las que corresponden al caso $\mathbf{f} \notin \ell$, módulo una traslación y/o rotación.

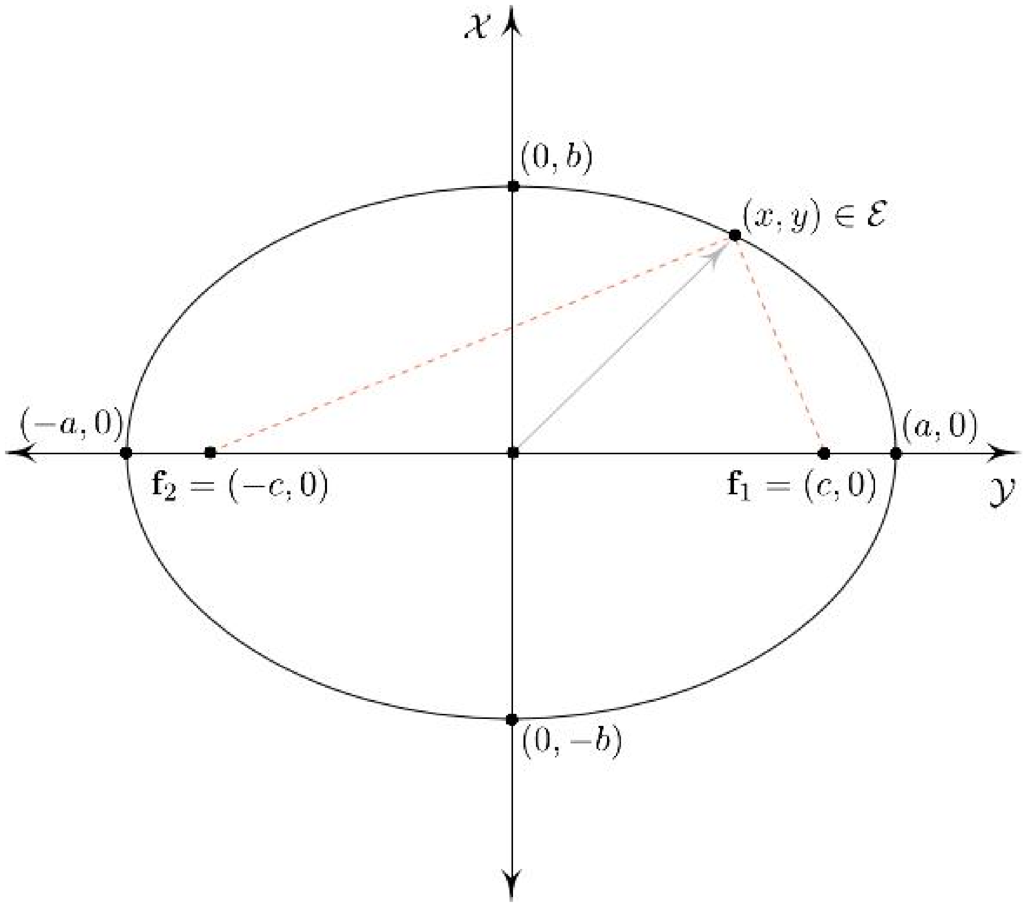


El punto $\mathbf{f}$ y la recta ℓ son el *foco* y la *directriz* de $\mathcal{P}$. El punto $\mathbf{v} \in \mathcal{P}$ más cercano a la directriz de una parábola es su *vértice*. El *eje* de una parábola es la recta que pasa por su vértice y su foco, y es normal a la directriz. En la ecuación 1, el foco de la parábola es $\mathbf{f} = (0, p)$, el vértice $\mathbf{v}$ es el origen, la ecuación de la directriz es $y = -p$ y la ecuación del eje es $x = 0$.

Elipse Es el conjunto de puntos en un plano $\mathcal{P}$ tal que la suma de sus distancias a dos puntos fijos $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in \mathcal{P}$ es una constante $2a \geq d(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$. La ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2}$$

con $a > b > 0$, describe a todas las elipses *no degeneradas*, que son las que corresponden al caso $\mathbf{f}_1 \neq \mathbf{f}_2$ y $2a > d(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$, módulo una traslación y/o rotación.

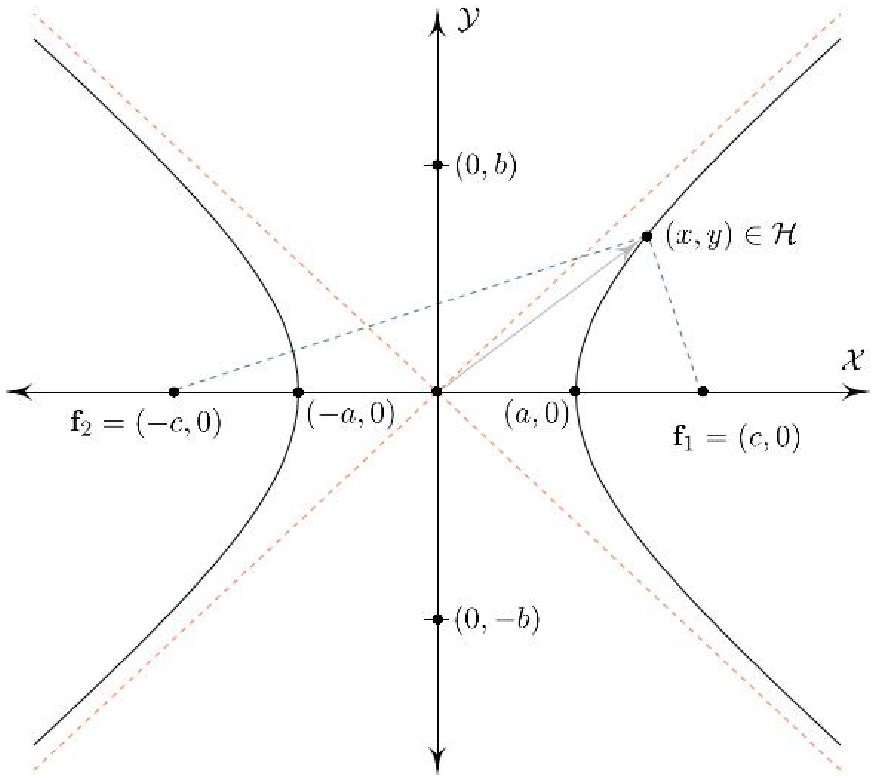


El punto medio $\mathbf{c}$ de $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$ es el *centro* de la elipse. Los *vértices* $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son los puntos de la elipse en el *eje principal*, es decir, en la recta que pasa por $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$. El *eje mayor* es el segmento de recta determinado por los vértices de una elipse y el *eje menor* es el segmento determinado por los puntos de la elipse en la recta normal al eje principal que pasa por el centro. En la ecuación 2, si $a^2 = b^2 + c^2$, entonces los focos de la parábola son $\mathbf{f}_1 = (c, 0)$ y $\mathbf{f}_2 = (-c, 0)$, los vértices son $\mathbf{v}_1 = (a, 0)$ y $\mathbf{v}_2 = (-a, 0)$, el eje principal es la recta con ecuación $y = 0$ y el eje menor es el segmento de recta determinado por $(0, b)$ y $(0, -b)$.

Hipérbola Es el conjunto de puntos en un plano $\mathcal{P}$ tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in \mathcal{P}$ es una constante $0 \leq 2a \leq d(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$. La ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3}$$

con $a, b > 0$, describe a todas las hipérbolas *no degeneradas*, que son las que corresponden al caso $0 < 2a < d(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$, módulo una traslación y/o rotación.



El punto medio $\mathbf{c}$ de $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$ es el *centro* de la hipérbola. Los *vértices* $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son los puntos de la hipérbola en el *eje principal*, es decir, en la recta que pasa por $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$. En la ecuación 3, si $c^2 = a^2 + b^2$, entonces los focos de la hipérbola son $\mathbf{f}_1 = (c, 0)$ y $\mathbf{f}_2 = (-c, 0)$, los vértices son $\mathbf{v}_1 = (a, 0)$ y $\mathbf{v}_2 = (-a, 0)$, el eje es la recta con ecuación $y = 0$, el *eje conjugado* es el segmento de recta determinado por $(0, b)$ y $(0, -b)$ y, finalmente, las *asíntotas* son las rectas con ecuaciones

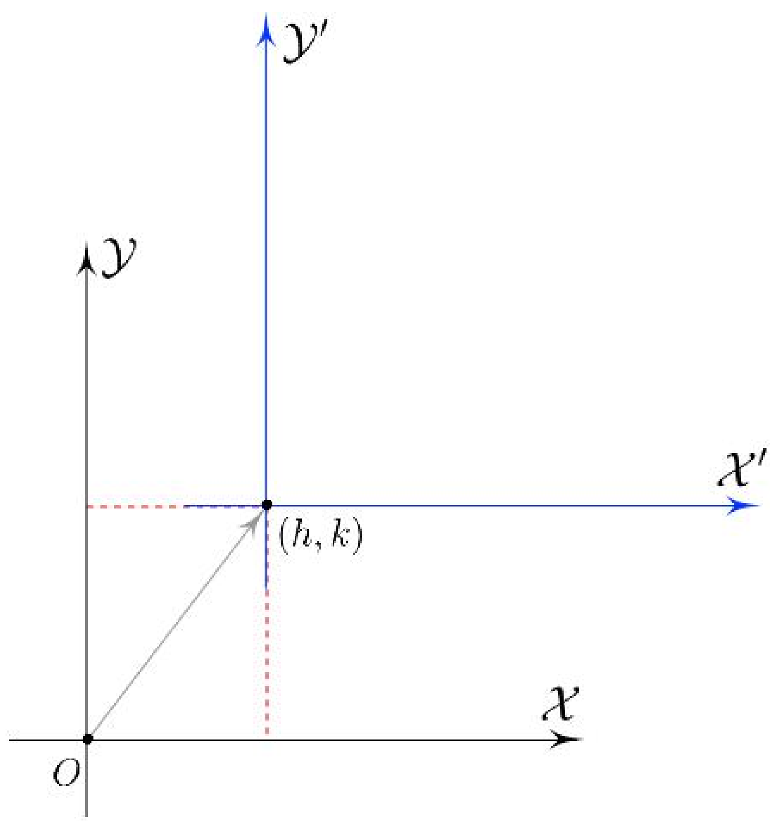
$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

Traslación La sustitución

$$\begin{aligned} x' &= x + h \\ y' &= y + k \end{aligned} \tag{4}$$

genera una traslación del sistema cartesiano $\mathcal{XY}$ tal que el origen en el nuevo sistema $\mathcal{X}'\mathcal{Y}'$ tiene coordenadas (h, k) en el sistema $\mathcal{XY}$. La sustitución inversa es

$$\begin{aligned} x &= x' - h \\ y &= y' - k \end{aligned} \tag{5}$$

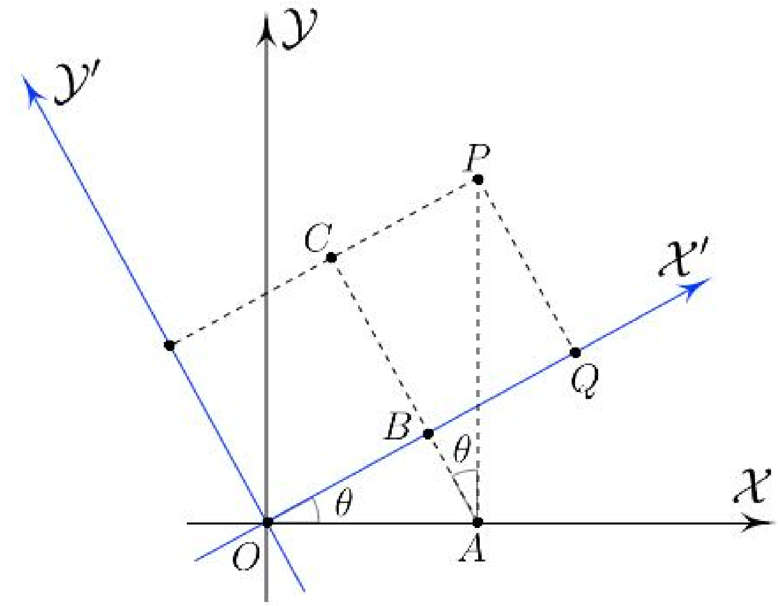


Rotación La sustitución

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\text{sen}\theta \\ y' &= -x\text{sen}\theta + y\cos\theta \end{aligned} \tag{6}$$

rota un ángulo θ al sistema cartesiano $\mathcal{XY}$, generando un nuevo sistema cartesiano $\mathcal{X}'\mathcal{Y}'$. La sustitución inversa es

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\text{sen}\theta \\ y &= x'\text{sen}\theta + y'\cos\theta \end{aligned} \tag{7}$$



Las ecuaciones en 6 se obtienen porque

$$x' = \overline{OB} + \overline{BQ} = \overline{OB} + \overline{CP} = \overline{OA}\cos\theta + \overline{AP}\text{sen}\theta = x\cos\theta + y\text{sen}\theta$$

y

$$y' = \overline{AC} - \overline{AB} = \overline{AP}\cos\theta - \overline{OA}\text{sen}\theta = y\cos\theta - x\text{sen}\theta.$$

Eliminación del término xy

Considere la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{8}$$

Una rotación de un ángulo θ del sistema cartesiano $\mathcal{XY}$ en el sistema $\mathcal{X}'\mathcal{Y}'$ convierte la ecuación 8 en una ecuación de la forma

$$A'(x')^2 + B'x'y' + C'(y')^2 + D'x + E'y' + F' = 0,$$

y queremos determinar θ de forma que $B' = 0$. Sustituyendo 7 en 8 vemos que

$$B' = 2(C - A)\,\text{sen}\theta\cos\theta + B\left(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta\right)$$

y por lo tanto

$$B' = (C - A)\,\text{sen}2\theta + B\cos 2\theta.$$

Si $B' = 0$, entonces

$$\tan 2\theta = \frac{B}{A - C}. \tag{9}$$

Concluimos entonces que

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{B}{A - C}\right). \tag{10}$$

Ejemplo 1. Consideremos la ecuación

$$xy = 1. \tag{11}$$

Entonces

$$\theta = \frac{1}{2}tan^{-1}(\infty) = \frac{\pi}{4}.$$

Sustituimos

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}x - \tfrac{1}{\sqrt{2}}y \\ y &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}x + \tfrac{1}{\sqrt{2}}y \end{aligned}$$

en 11 y obtenemos

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right) = 1,$$

que se reduce a

$$\frac{(x')^2}{2} - \frac{(y')^2}{2} = 1.$$

Entonces la ecuación 11 representa una hipérbola con $a^2 = b^2 = c = 2$.

1 $\mathbf{R}^n$

Definimos el *espacio Euclidiano de dimensión* n como

$$\mathbf{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \,|x_i \in \mathbf{R} \text{ para toda } i = 1, \ldots, n\}.$$

A los elementos de $\mathbf{R}^n$ los llamamos *puntos* o *vectores*. La *suma* $+ \colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ se define para cada $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ y $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ como

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \in \mathbf{R}^n.$$

La *multiplicación por un escalar* (u homotesia) se define para cada $\lambda \in \mathbf{R}$ y $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ como

$$\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \in \mathbf{R}^n.$$

La *norma* de un vector $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ es

$$||\mathbf{x}|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

y la *distancia* entre $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ es

$$d\,(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

El *producto escalar* (o *producto punto*) es la operación $\cdot \colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ que se define para cada $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ y $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ como

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \in \mathbf{R}.$$

Teorema 1 *Si* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}$*, entonces*

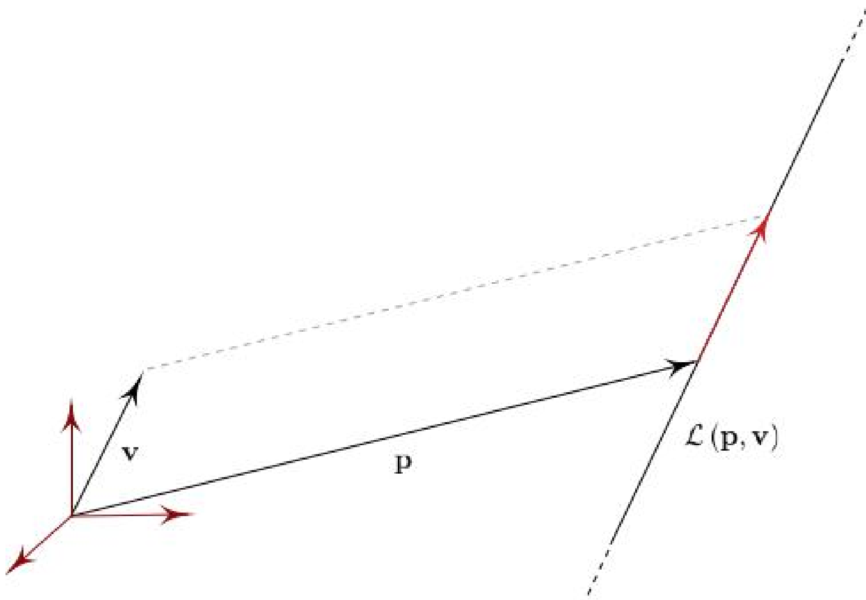
$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = ||\mathbf{x}||||\mathbf{y}|| \cos\theta,$$

donde θ *es el ángulo entre los vectores* $\mathbf{x}$ *y* $\mathbf{y}$*.*

Demostración Ejercicio.

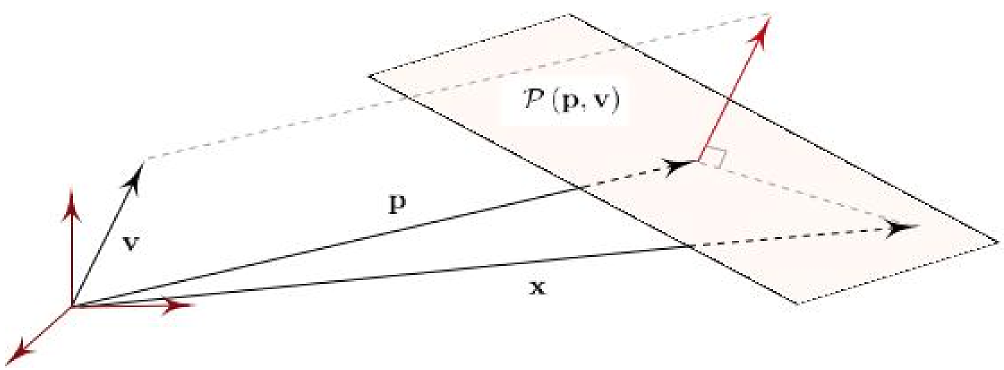
La *recta* que pasa por el punto $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$ con dirección $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ es

$$\mathcal{L}\,(\mathbf{p}, \mathbf{a}) = \{t\mathbf{a} + \mathbf{p} \in \mathbf{R}^n | t \in \mathbf{R}\}.$$



El (*hiper*)*plano* que pasa por $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$ y que es *normal* a $\mathbf{n} \in \mathbf{R}$ es

$$\mathcal{P}(\mathbf{p},\mathbf{n}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n | (\mathbf{x}-\mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} = 0\}.$$



La *esfera* con *centro* $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$ y *radio* $r \in \mathbf{R}_+$ es

$$\mathcal{S}(\mathbf{c},r) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n | d(\mathbf{x},\mathbf{c}) = r\}.$$