

Binomial Negativa

Probabilidad I

12 de octubre de 2005

Proposición. $\sum_{n=r}^{\infty} \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} = 1.$

Demostración. Inducción sobre r .

$$\boxed{r = 1}$$

En éste caso tenemos la distribución geométrica con parámetro p , por lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n-1}{1-1} p(1-p)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} = p \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n = p \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1.$$

$\boxed{\text{Suponemos que el resultado es verdadero para } r}$

Suponemos entonces que $\sum_{n=r}^{\infty} \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} = 1$. Simplifiquemos un poco antes de hacer el paso inductivo:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{n=r}^{\infty} \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} \\ &= \sum_{n=r}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} p^r (1-p)^{n-r} \\ &= \frac{p^r}{(r-1)!} \sum_{n=r}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(n-r)!} (1-p)^{n-r} \\ &= \frac{p^r}{(r-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+r-1)!}{n!} (1-p)^n. \end{aligned}$$

Entonces podemos cambiar nuestra hipótesis de inducción (HI) suponiendo que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+r-1)!}{n!} (1-p)^n = \frac{(r-1)!}{p^r} \quad (1)$$

y demostrar que la ecuación (1) es verdadera para $r + 1$.

Por demostrar que (1) es válida para $r + 1$

Hay que demostrar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+r)!}{n!} (1-p)^n = \frac{r!}{p^{r+1}} \quad (2)$$

Veamos, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+r)!}{n!} (1-p)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) \frac{(n+r-1)!}{n!} (1-p)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(n+r-1)!}{n!} (1-p)^n + r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+r-1)!}{n!} (1-p)^n \\ &\stackrel{HI}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(n+r-1)!}{n!} (1-p)^n + r \frac{(r-1)!}{p^r} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(n+r-1)!}{n!} (1-p)^n + \frac{r!}{p^r} \end{aligned} \quad (3)$$

Trabajemos ahora con $\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(n+r-1)!}{n!} (1-p)^n$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(n+r-1)!}{n!} (1-p)^n &= (1-p) \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(n+r-1)!}{n!} (1-p)^{n-1} \\ &= (1-p) \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{d}{dp} \left(\frac{(n+r-1)!}{n!} (1-p)^n \right) \\ &= -(1-p) \frac{d}{dp} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(n+r-1)!}{n!} (1-p)^n \right) \\ &\stackrel{HI}{=} -(1-p) \frac{d}{dp} \left(\frac{(r-1)!}{p^r} \right) \\ &= (1-p) \frac{r!}{p^{r+1}}. \end{aligned} \quad (4)$$

($\frac{d}{dp}$ denota la *derivada* con respecto a p). Insertando (4) en (3) obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+r)!}{n!} (1-p)^n &= (1-p) \frac{r!}{p^{r+1}} + \frac{r!}{p^r} \\ &= \frac{(1-p)r! + p(r!)}{p^{r+1}} \\ &= \frac{r!}{p^{r+1}} \end{aligned} \quad (5)$$

y por lo tanto hemos demostrado (2), lo que implica que la proposición es verdadera!