

SUPERFICIES TOPOLÓGICAS Y SUS SIMETRÍAS

*Una introducción a los grupos modulares de superficies
de tipo finito e infinito*

Nestor Colin¹ Rita Jiménez Rolland² Israel Morales³

Versión en desarrollo: Capítulo 1

Agradecemos cualquier comentario o corrección enviada por correo electrónico.

¹Instituto de Matemáticas UNAM Unidad Oaxaca, México. ncolin@im.unam.mx

²Instituto de Matemáticas UNAM Unidad Oaxaca, México. rita@im.unam.mx

³Departamento de Matemática y Estadística, Universidad de La Frontera, Chile.
israel.morales@ufrontera.cl

Índice general

1. Superficies topológicas	1
1.1. Definición y primeros ejemplos de superficies	1
1.1.1. El problema de clasificación de superficies	5
1.1.2. Suma conexa de superficies	7
1.2. Invariantes topológicos de superficies	11
1.2.1. Componentes de frontera de una superficie	12
1.2.2. Tipo de orientabilidad	13
1.2.3. Característica de Euler y género de una superficie compacta	14
1.2.4. Clasificación de superficies compactas	17
1.3. Invariantes topológicos de superficies no compactas	19
1.3.1. Espacios de fines de una superficie	20
1.3.2. Género de una superficie no compacta	25
1.3.3. Espacios de fines acumulados por género y de fines no orientables .	26
1.3.4. Cuatro tipos de orientabilidad	29
1.3.5. El Teorema de Clasificación de Superficies	31
Bibliografía	35

Notación

$\mathbb{S}^1$	Círculo unitario $\{z \in \mathbb{C} : z = 1\}$.
$\mathbb{R}^2$	Plano euclidiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
$\mathbb{H}^2$	Semiplano superior $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$.
$\overline{\mathbb{H}^2}$	Semiplano superior cerrado $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$.
$\mathbb{D}^2$	Disco unitario abierto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.
$\overline{\mathbb{D}^2}$	Disco unitario cerrado $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
$\mathbb{S}^2$	2-esfera unitaria $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
Σ	Superficie topológica.
S	Superficie orientable.
N	Superficie no orientable.
$S_{g,b}^n$	Superficie orientable de tipo finito de género g , con b componentes de frontera y n ponchaduras.
$N_{g,b}^n$	Superficie no orientable de tipo finito de género g , con b componentes de frontera y n ponchaduras.
$\text{Map}(\Sigma)$	Grupo Modular (mapping class group) de la superficie Σ .
$\approx$	Homeomorfismo / Equivalencia topológica.
$\cong$	Isomorfismo / Congruencia.
$\simeq$	Homotopía / Isotopía.
$\sim$	Relación de equivalencia.

Capítulo 1

Superficies topológicas

En matemáticas, el *problema de clasificación* para una colección de objetos de un tipo determinado, respecto a una relación de equivalencia dada (por ejemplo, homeomorfismo, difeomorfismo, isomorfismo, etc.), consiste en identificar, estructurar y organizar dichos objetos de modo que cada uno pertenezca a una única clase de equivalencia. Por lo general, resolver un problema de este tipo equivale a encontrar un conjunto adecuado (usualmente finito) de *invariantes* capaces de distinguir de forma inequívoca entre las distintas clases.

El objetivo principal de este capítulo es familiarizar al lector con los invariantes topológicos que clasifican por completo, salvo homeomorfismo, a cualquier superficie topológica (orientable o no orientable) con frontera compacta. Dichos invariantes son: (1) el número de *componentes de frontera*, (2) el *tipo de orientabilidad*, (3) la *característica de Euler*, (4) el *espacio de fines*, (5) el *espacio de fines acumulados por género* y (6) el *espacio de fines no orientables*.

Si bien estos invariantes y los teoremas de clasificación correspondientes se presentan de manera formal, nuestra exposición no pretende detallar todas las demostraciones; en su lugar, se proporcionan referencias específicas para quien desee profundizarlas. Asimismo, se incluye una selección de ejercicios pensada para que el lector interiorice los conceptos y adquiera una formación sólida en el tema.

Por último, dado que estas notas están diseñadas para un curso introductorio a grupos modulares de superficies, el docente puede utilizarlas directamente como guía de clase.

1.1. Definición y primeros ejemplos de superficies

Para el lector que se inicia en el estudio de la topología y geometría de superficies, recomendamos consultar la obra de Stahl y Stenson [SS14].

Notación 1.1.1. Si X e Y son dos espacios topológicos homeomorfos, denotaremos esta relación por $X \approx Y$.

Definición 1.1.2. Una *superficie topológica* (o simplemente *superficie*) es un espacio topológico X conexo, Hausdorff, segundo numerable y localmente homeomorfo¹ al *semiplano superior cerrado*

$$\overline{\mathbb{H}^2} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2,$$

este último dotado con la topología de subespacio relativa de $\mathbb{R}^2$.

¹Es decir, para cada $x \in X$ existe un entorno abierto $U \subset X$ que contiene a x tal que U es homeomorfo a un conjunto abierto del semiplano superior cerrado $\overline{\mathbb{H}^2}$.

Ejemplos elementales e inmediatos de superficies son: el plano euclidiano $\mathbb{R}^2$, el semiplano superior $\mathbb{H}^2$, el semiplano superior cerrado $\overline{\mathbb{H}^2}$, el disco unitario abierto $\mathbb{D}^2$ y el disco unitario cerrado $\overline{\mathbb{D}^2}$.

Problema 1.1.3. Probar que el plano euclidiano $\mathbb{R}^2$, el semiplano superior $\mathbb{H}^2$ y el disco unitario abierto $\mathbb{D}^2$ son mutuamente homeomorfos.

Problema 1.1.4. Demostrar que la esfera $\mathbb{S}^2$ es una superficie topológica compacta.

Sugerencia: Utilice la proyección estereográfica.

Problema 1.1.5. Demostrar que el semiplano superior cerrado $\overline{\mathbb{H}^2}$ es homeomorfo al espacio $\overline{\mathbb{D}^2} \setminus \{\mathbf{p}\}$, donde $\mathbf{p}$ es un punto en la frontera topológica de $\overline{\mathbb{D}^2}$.

Observación 1.1.6. En la literatura, al definir una superficie suele asumirse implícitamente la condición de ser segundo numerable. En esta exposición la hacemos explícita como un requisito técnico esencial para la metrizabilidad y paracompacidad. No obstante, al omitir este axioma surgen objetos patológicos de gran interés, como la *superficie de Prüfer*, la cual es una 2-variedad de Hausdorff que no admite una base numerable (véase [Spi70], Apéndice A).

A continuación, se listan más ejemplos de superficies de gran relevancia. En algunos casos, se ilustran modelos que son topológicamente equivalentes; invitamos al lector a demostrar formalmente dichas equivalencias.

Ejemplo 1.1.7. En la Figura 1.1 se ilustran los siguientes ejemplos de superficies:

1. El *plano euclidiano* $\mathbb{R}^2$.
2. El *disco unitario cerrado* $\overline{\mathbb{D}^2}$.
3. La *esfera* $\mathbb{S}^2$.
4. El *plano proyectivo real* $\mathbb{RP}^2$, definido como el espacio cociente $\mathbb{S}^2 / \sim$, donde $\mathbf{x} \sim -\mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2$ bajo la función antipodal.
5. El *anillo cerrado* (o cilindro) $\mathbb{A} := \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$, dotado con la topología producto.
6. La *banda de Möbius* $\mathbb{BM}$, definida como el espacio cociente $[0, 1] \times [0, 1] / \sim$, donde $(0, y) \sim (1, 1 - y)$ para todo $y \in [0, 1]$.
7. El *toro* $\mathbb{T}^2$, definido como el espacio cociente $[0, 1] \times [0, 1] / \sim$, bajo las identificaciones $(0, y) \sim (1, y)$ y $(x, 0) \sim (x, 1)$ para todo $x, y \in [0, 1]$.
8. La *botella de Klein* $\mathbb{K}$, definida como el espacio cociente $[0, 1] \times [0, 1] / \sim$, mediante las identificaciones $(0, y) \sim (1, 1 - y)$ y $(x, 0) \sim (x, 1)$ para todo $x, y \in [0, 1]$.
9. La *superficie flauta*, definida como $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N}$.
10. El *árbol de Cantor*, definido como la superficie $\mathbb{S}^2 \setminus C$, donde $C \subset \mathbb{S}^2$ es un conjunto de Cantor situado sobre el ecuador de la esfera.

Problema 1.1.8. Demostrar que cada uno de los espacios topológicos presentados en el Ejemplo 1.1.7 satisface rigurosamente la definición de superficie topológica.

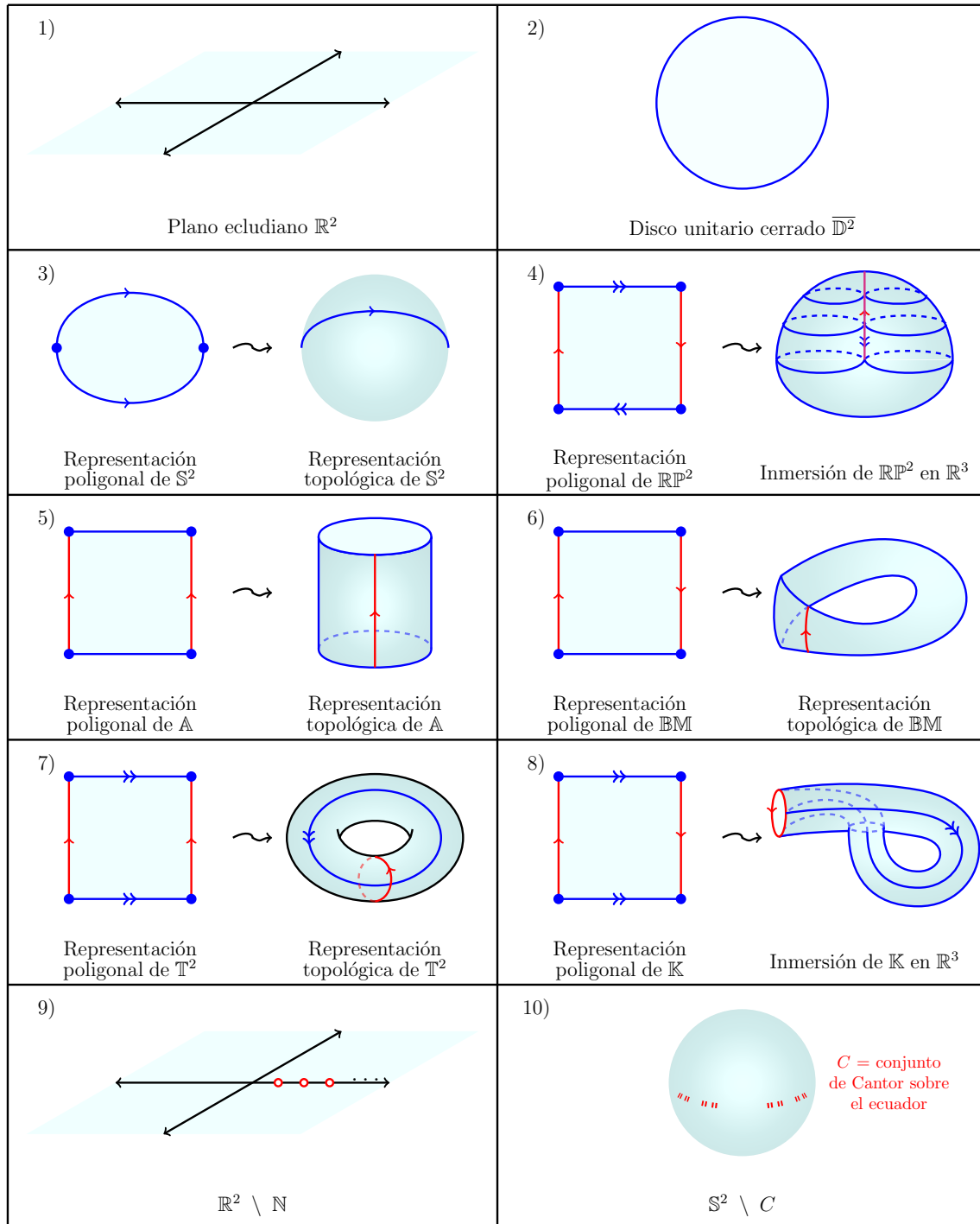


Figura 1.1: Ejemplos de superficies topológicas.

Interior y frontera de una superficie. En una superficie topológica podemos distinguir cualitativamente dos tipos de puntos: aquellos que admiten un entorno homeomorfo a un disco abierto en $\mathbb{R}^2$ y aquellos que solo admiten entornos homeomorfos a vecindades abiertas del origen en el semiplano cerrado $\overline{\mathbb{H}^2}$. Este fenómeno geométrico se ilustra en la Figura 1.2. Esta distinción topológica permite introducir de manera rigurosa la noción de frontera, la cual constituye el primer invariante topológico fundamental de una superficie.

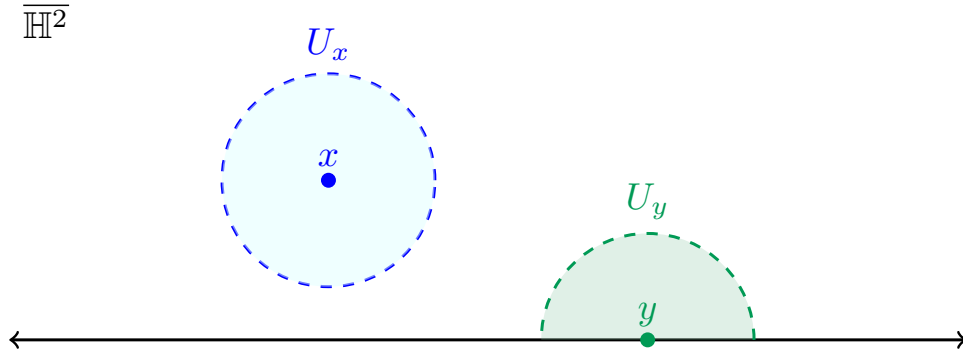


Figura 1.2: El punto $x \in \overline{\mathbb{H}^2}$ posee un entorno U_x homeomorfo a un disco abierto. Por el contrario, cualquier entorno U_y del punto $y \in \overline{\mathbb{H}^2} \setminus \mathbb{H}^2$ es homeomorfo a un semicírculo abierto que contiene a y sobre su diámetro basal.

Definición 1.1.9 (Interior y Frontera). El *interior* de una superficie Σ , denotado por $\text{Int}(\Sigma)$, es el conjunto de todos los puntos de Σ que poseen un entorno abierto homeomorfo al plano euclidiano $\mathbb{R}^2$. Asimismo, definimos y denotamos la *frontera* de Σ como el conjunto complementario $\partial\Sigma := \Sigma \setminus \text{Int}(\Sigma)$.

Problema 1.1.10. Describir explícitamente el interior y la frontera de cada una de las superficies presentadas en el Ejemplo 1.1.7.

Todas las superficies enumeradas en el Ejemplo 1.1.7 poseen frontera vacía o bien una frontera no vacía que es compacta. El modelo más elemental de una superficie con frontera no compacta es el propio semiplano superior cerrado $\overline{\mathbb{H}^2}$. En este caso, la frontera $\partial\overline{\mathbb{H}^2}$ es homeomorfa a la recta real $\mathbb{R}$ y su interior coincide con el semiplano abierto $\mathbb{H}^2$. A partir de modificaciones en superficies conocidas, es sencillo construir espacios con fronteras de topología más rica.

Ejemplo 1.1.11. Las siguientes superficies presentan fronteras no compactas:

11. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $D_n \subset \mathbb{R}^2$ el disco abierto centrado en $(n, 0)$ con radio $1/3$. El espacio definido por $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ es una superficie cuya frontera total es no compacta, donde cada una de sus componentes conexas de frontera es homeomorfa al círculo $\mathbb{S}^1$.
12. El espacio $\overline{\mathbb{D}^2} \setminus C$, donde C es un conjunto de Cantor contenido en la frontera topológica de $\overline{\mathbb{D}^2}$, es una superficie con frontera no compacta. En este caso, cada componente conexa de la frontera es homeomorfa a la recta real $\mathbb{R}$ (ver Figura 1.3).

Definición 1.1.12 (Superficie cerrada). Una superficie se denomina *cerrada* si es compacta y su frontera es vacía ($\partial\Sigma = \emptyset$).

Problema 1.1.13. Identificar cuáles superficies del Ejemplo 1.1.7 son compactas, cuáles son cerradas y cuáles poseen frontera no vacía.

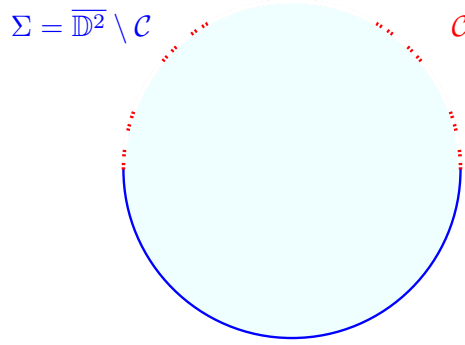


Figura 1.3: Al remover un conjunto de Cantor sobre la frontera del disco cerrado $\overline{\mathbb{D}^2}$, se obtiene una superficie con frontera no vacía y no compacta, la cual consta de una cantidad numerable de componentes conexas, cada una de ellas homeomorfa a la recta real.

Discusión sobre la topología de las superficies. Toda superficie que satisface nuestra definición resulta ser una 2-variedad topológica Hausdorff y segundo numerable. La exigencia de que el espacio cumpla con el axioma de Hausdorff es indispensable para evitar comportamientos patológicos en los límites de las sucesiones y asegurar la unicidad de entornos locales bien formados. El siguiente problema ilustra las consecuencias de omitir dicha condición en la estructura geométrica global.

Problema 1.1.14. Sea X el espacio topológico que, como conjunto, consiste en la esfera $\mathbb{S}^2$ junto con un punto abstracto adicional $\mathbf{p}$ ($X = \mathbb{S}^2 \cup \{\mathbf{p}\}$). Definimos la topología de X de modo que los entornos abiertos de los puntos en $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ correspondan a los abiertos usuales de la esfera, mientras que los entornos abiertos del punto $\mathbf{p}$ sean de la forma $[\mathbf{U} \setminus \{(0, 0, 1)\}] \cup \{\mathbf{p}\}$, donde $\mathbf{U}$ es un entorno abierto estándar del polo norte $(0, 0, 1)$ en $\mathbb{S}^2$. Demostrar que X es localmente homeomorfo a $\mathbb{H}^2$, pero no es un espacio de Hausdorff y, por lo tanto, no constituye una superficie topológica.

1.1.1. El problema de clasificación de superficies

El objetivo central de la topología geométrica en dimensiones bajas consiste en clasificar las estructuras algebraicas y geométricas de los espacios. En nuestro contexto, estamos interesados en determinar bajo qué condiciones topológicas dos superficies dadas son homeomorfas.

Definición 1.1.15. Dos superficies topológicas Σ_1 y Σ_2 son *homeomorfas* si existe un homeomorfismo entre ellas. Denotamos esta relación de equivalencia mediante $\Sigma_1 \approx \Sigma_2$.

Dado que la relación $\approx$ constituye una relación de equivalencia sobre la clase de todas las superficies, resolver el *problema de clasificación de superficies* equivale a caracterizar y describir un representante explícito para cada clase de homeomorfismo. Un primer enfoque natural consiste en identificar superficies homeomorfas construyendo homeomorfismos explícitos entre ellas.

Problema 1.1.16. Demostrar que los siguientes pares de superficies son espacios topológicos homeomorfos:

- (1) El plano euclidiano $\mathbb{R}^2$ y la esfera pinchada $\mathbb{S}^2 \setminus \{\mathbf{p}\}$, donde $\mathbf{p} \in \mathbb{S}^2$.
- (2) El disco abierto $\mathbb{D}^2$ y el plano euclidiano $\mathbb{R}^2$. ¿Es el disco cerrado $\overline{\mathbb{D}^2}$ homeomorfo a $\mathbb{R}^2$? Justifique su respuesta.

- (3) El cilindro infinito $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ (con la topología producto) y el espacio cociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$, donde el cociente se toma bajo la acción de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{R}^2$ generada por la traslación $\phi(x, y) = (x + 1, y)$.
 - (4) El toro $\mathbb{T}^2$ y el producto cartesiano de círculos $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, provisto de la topología producto.
 - (5) El toro $\mathbb{T}^2$ y el espacio cociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, donde la acción de $\mathbb{Z}^2$ sobre $\mathbb{R}^2$ está generada por las traslaciones elementales $\phi_1(x, y) = (x + 1, y)$ y $\phi_2(x, y) = (x, y + 1)$.
 - (6) La banda de Möbius abierta $\mathbb{BM}$ y el espacio cociente $(\mathbb{R} \times (-1, 1))/\mathbb{Z}$, bajo la acción de $\mathbb{Z}$ generada por la reflexión deslizada $\psi(x, y) = (x + 1, -y)$.
 - (7) La botella de Klein $\mathbb{K}$ y el espacio cociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, donde la acción de $\mathbb{Z}^2$ está determinada por los generadores $\psi_1(x, y) = (x + 1, y)$ y $\psi_2(x, y) = (-x, y + 1)$.
 - (8) Considere el anillo cerrado $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ junto con la relación de equivalencia $\sim$ que identifica antipodalmente los puntos de la frontera interior; es decir, si $x^2 + y^2 = 1$, entonces $(x, y) \sim (-x, -y)$, y en cualquier otro caso la identificación es trivial. El *gorro cruzado* (*crosscap*) M se define como el espacio cociente $M := A/\sim$. Demostrar que M es una superficie homeomorfa tanto a la banda de Möbius cerrada como al plano proyectivo real $\mathbb{RP}^2$ tras remover el interior de un disco encajado.
- A lo largo de este texto, adoptaremos la convención gráfica de la Figura 1.4 (b) para representar los gorros cruzados.
- (9) (*) Sean $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^2$ dos subconjuntos homeomorfos al conjunto de Cantor. Demostrar que sus complementos $\mathbb{R}^2 \setminus C_1$ y $\mathbb{R}^2 \setminus C_2$ son homeomorfos. ¿Bajo qué condiciones se preserva este resultado si C_1 y C_2 son subconjuntos cerrados y totalmente disjuntos cualesquiera de $\mathbb{R}^2$?

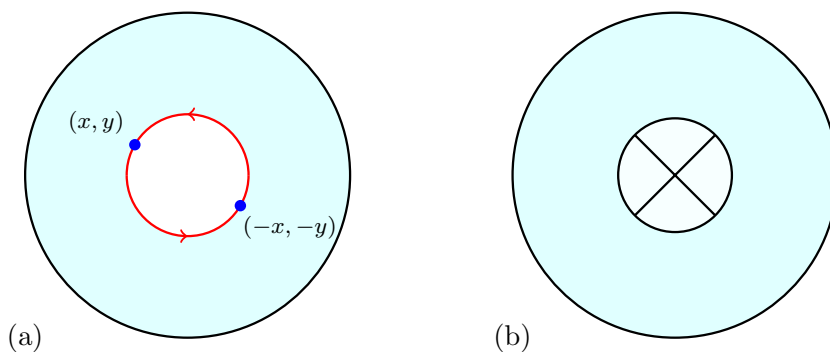


Figura 1.4: Representación del gorro cruzado (*crosscap*). (a) Identificación antipodal explícita de los puntos en el borde interior del disco. (b) Convención por medio de una cruz central que indica la identificación antipodal implícita.

Por otra parte, para demostrar que dos superficies no son homeomorfas, recurrimos a obstrucciones topológicas conocidas como *invariantes topológicos*. Un invariante es un objeto matemático (un número, un grupo, un espacio topológico) o una propiedad cualitativa preservada por homeomorfismos. De este modo, si dos superficies poseen invariantes topológicos distintos, se concluye de forma inmediata que no pueden ser homeomorfas.

Es bien sabido que propiedades como la conexidad y la compacidad constituyen invariantes topológicos elementales. Nuestra definición de superficie exige de forma intrínseca que el espacio sea conexo. No obstante, aunque la compacidad permite discriminar de forma inmediata entre el plano $\mathbb{R}^2$ y la esfera $\mathbb{S}^2$, estas propiedades clásicas resultan insuficientes para caracterizar por completo las clases de homeomorfismo de superficies más complejas.

Problema 1.1.17. Demostrar que la esfera $\mathbb{S}^2$ y el toro $\mathbb{T}^2$ no son superficies homeomorfas.

La solución al problema de clasificación de superficies es notablemente elegante, ya que es posible formularla a partir de un conjunto finito de invariantes que determinan unívocamente la topología global del espacio. Determinar dicha familia exhaustiva de invariantes requirió un esfuerzo histórico colectivo substancial. Durante la década de 1920 se consolidó la clasificación completa para el caso de superficies compactas; sin embargo, no fue sino hasta la década de 1960 que se obtuvo la generalización total mediante el *Teorema de Clasificación de Superficies* (TCS), extendiendo el resultado a superficies no compactas.

En las secciones subsecuentes analizaremos en detalle los diversos invariantes fundamentales: el número de componentes de frontera, el tipo de orientabilidad (el cual admite cuatro variantes en el caso no compacto y dos en el compacto), la característica de Euler, el espacio de fines, el espacio de fines acumulados por género y el espacio de fines no orientables. Demostraremos que esta familia de invariantes es suficiente para caracterizar de manera completa cualquier superficie con frontera compacta. Para un estudio riguroso de las demostraciones estructurales del TCS, sugerimos al lector consultar [FW99, Kin93] en el caso cerrado, y la obra clásica de Richards [Ric63] para superficies no compactas con frontera compacta. Por último, la clasificación generalizada que incorpora fronteras no compactas se encuentra detallada en el trabajo de Brown y Messer [BM79].

1.1.2. Suma conexa de superficies

En esta sección describiremos una operación fundamental para construir nuevas superficies a partir de dos superficies dadas: la *suma conexa*. Más adelante, en el Teorema 1.1.21, veremos cómo esta construcción permite caracterizar completamente las clases de homeomorfismo de todas las superficies cerradas.

Definición 1.1.18 (Suma conexa). Sean Σ_1 y Σ_2 dos superficies topológicas. Para cada $i \in \{1, 2\}$, elijamos un disco abierto $D_i \subset \Sigma_i$ tal que su clausura $\overline{D_i}$ sea homeomorfa al disco cerrado $\overline{\mathbb{D}^2}$. Sean $\Sigma'_i := \Sigma_i \setminus \text{Int}(D_i)$ y sea $h : \partial\overline{D_1} \rightarrow \partial\overline{D_2}$ un homeomorfismo entre sus fronteras circulares. La *suma conexa* de Σ_1 con Σ_2 , denotada por $\Sigma_1 \# \Sigma_2$, se define como el espacio cociente

$$\Sigma_1 \# \Sigma_2 := \frac{\Sigma'_1 \sqcup \Sigma'_2}{\{\partial D_1 \ni x \sim h(x) \in \partial D_2\}}.$$

Geométricamente, $\Sigma_1 \# \Sigma_2$ es el espacio obtenido al «pegar» las superficies agujeradas Σ'_1 y Σ'_2 a lo largo de sus componentes de frontera mediante la identificación h .

Problema 1.1.19. Demostrar las siguientes propiedades topológicas de la suma conexa:

- (I) La suma conexa $\Sigma_1 \# \Sigma_2$ es una superficie topológica conexa.

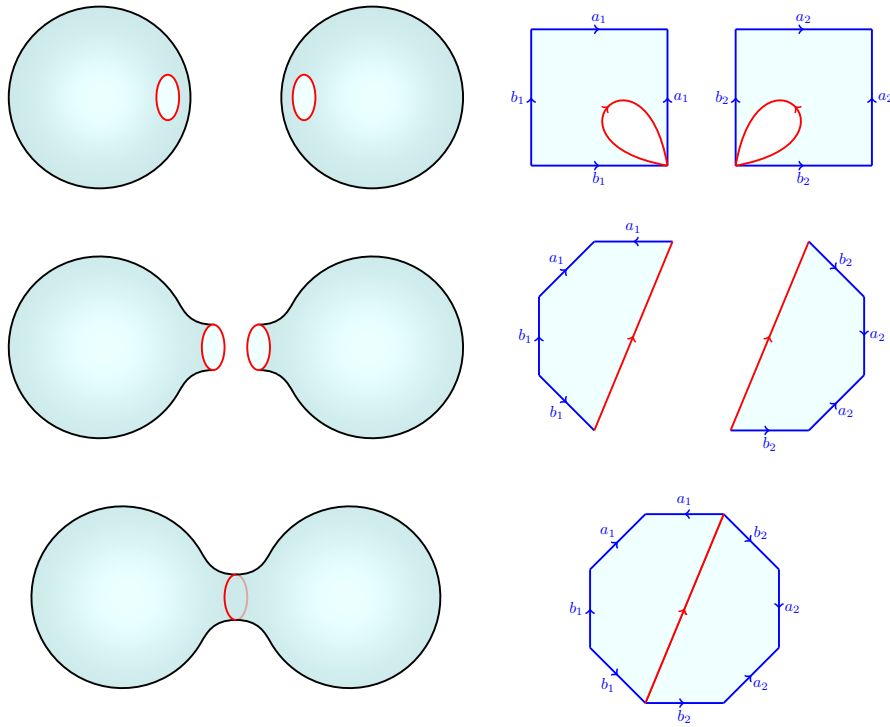


Figura 1.5: Representación topológica y poligonal de la suma conexa de dos esferas.

- (II) Si Σ_1 y Σ_2 son conexas y orientadas, la clase de homeomorfismo de $\Sigma_1 \# \Sigma_2$ es independiente de la elección de los discos D_i y del homeomorfismo h (siempre que h invierta la orientación de las fronteras).
- (III) Para cualesquiera superficies Σ_1, Σ_2 y Σ_3 , se verifican las siguientes equivalencias, salvo homeomorfismo:

$$\Sigma_1 \# \Sigma_2 \approx \Sigma_2 \# \Sigma_1, \quad \Sigma_1 \# \mathbb{S}^2 \approx \Sigma_1, \quad \Sigma_1 \# (\Sigma_2 \# \Sigma_3) \approx (\Sigma_1 \# \Sigma_2) \# \Sigma_3.$$

Ejemplo 1.1.20 (Sumas conexas y representación poligonal).

- (1) La Figura 1.5 ilustra la suma conexa de dos esferas, la cual satisface $\mathbb{S}^2 \# \mathbb{S}^2 \approx \mathbb{S}^2$.
- (2) La Figura 1.6 muestra la suma conexa de dos toros $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$, junto con su representación como el espacio cociente de un octágono regular cuyos lados se identifican adecuadamente (representación poligonal).
- (3) La Figura 1.7 ilustra la suma conexa de dos planos proyectivos reales $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ y su respectiva representación poligonal. De forma equivalente, $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ se obtiene al pegar dos gorros cruzados (*crosscaps*) a lo largo de sus fronteras circulares (véase el Problema 1.1.16, ítem 8).

Gracias al Problema 1.1.19, sabemos que la operación $\#$ es asociativa y conmutativa, con elemento neutro $\mathbb{S}^2$. Por lo tanto, podemos definir rigurosamente la suma conexa de cualquier familia finita de superficies. Sorprendentemente, toda superficie cerrada se puede construir mediante la suma conexa de la esfera $\mathbb{S}^2$ con un número finito de toros $\mathbb{T}^2$ o de planos proyectivos $\mathbb{RP}^2$.

Teorema 1.1.21 (Clasificación de superficies cerradas [GX12]). *Toda superficie cerrada Σ es homeomorfa a una y solo una de las siguientes superficies canónicas:*

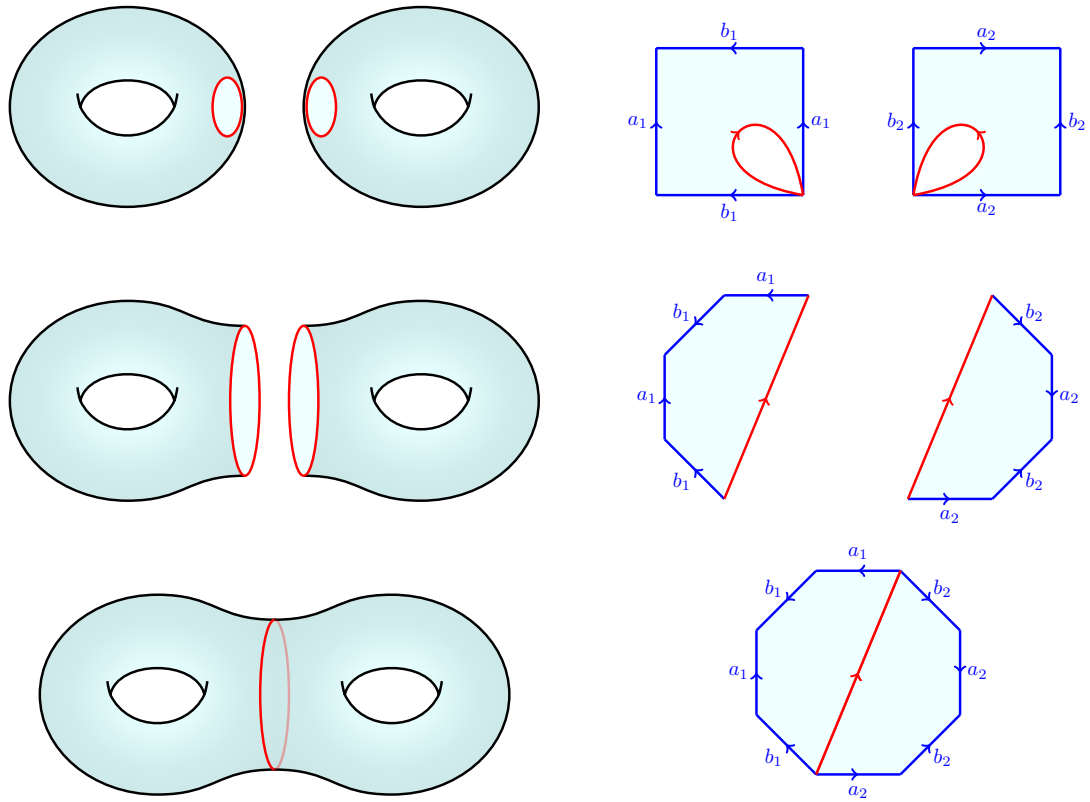


Figura 1.6: Representación topológica y poligonal de la suma conexa de dos toros.

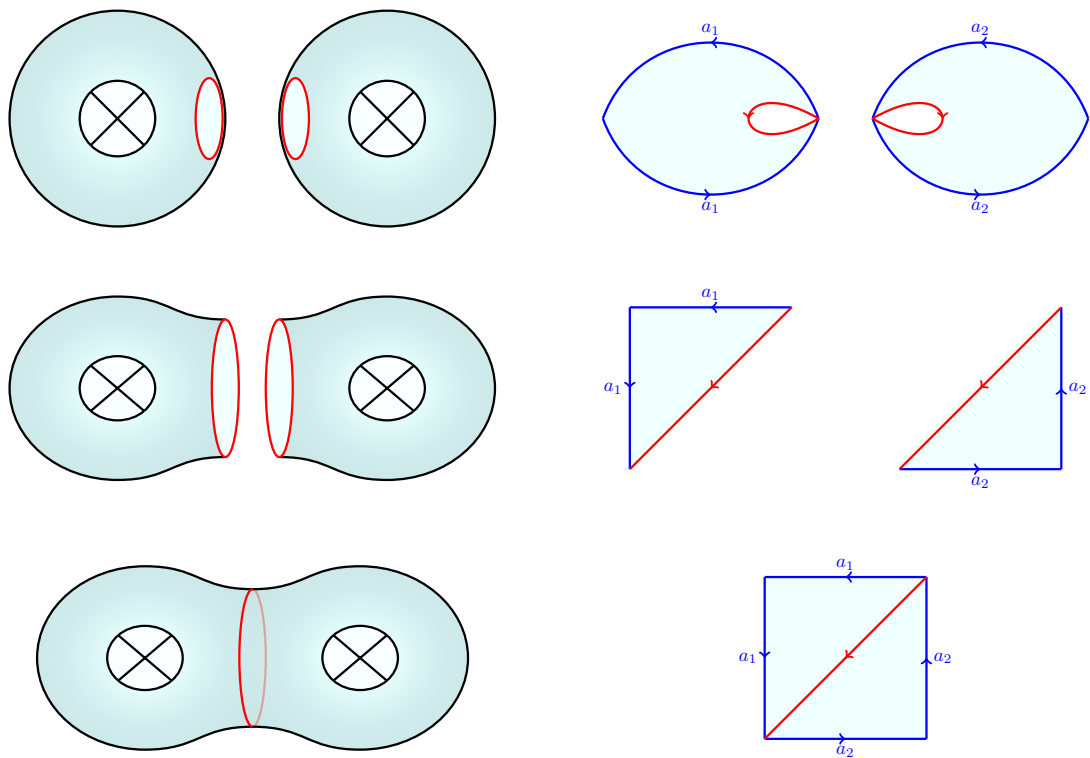


Figura 1.7: Representación topológica y poligonal de la suma conexa de dos planos proyectivos.

(1) La esfera $\mathbb{S}^2$.

(2) Una suma conexa finita de toros:

$$S_g := \underbrace{\mathbb{T}^2 \# \cdots \# \mathbb{T}^2}_{g \text{ veces}} \quad (g \geq 1).$$

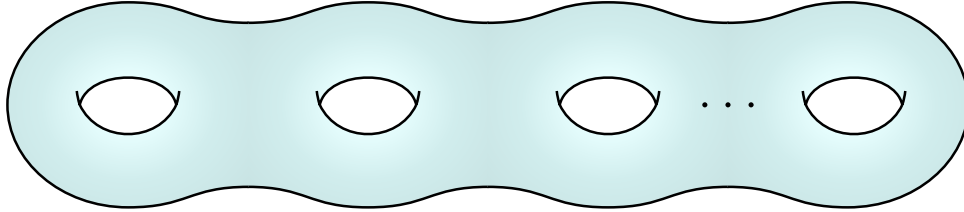


Figura 1.8: Representación de la superficie orientable S_g (suma conexa de g toros)

(3) Una suma conexa finita de planos proyectivos reales:

$$N_g := \underbrace{\mathbb{RP}^2 \# \cdots \# \mathbb{RP}^2}_{g \text{ veces}} \quad (g \geq 1).$$

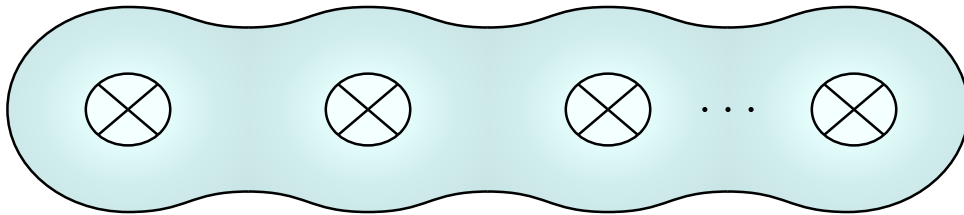


Figura 1.9: Representación de la superficie no orientable N_g (suma conexa de g planos proyectivos)

El siguiente problema muestra una relación fundamental conocida como el *Teorema de Dyck*, la cual explica por qué las familias S_g y N_g en el Teorema 1.1.21 son suficientes para clasificar todas las superficies cerradas sin necesidad de combinar toros y planos proyectivos en una misma expresión.

Problema 1.1.22. Demostrar las siguientes equivalencias topológicas:

- (I) La botella de Klein $\mathbb{K}$ es homeomorfa a la suma conexa $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ (es decir, $\mathbb{K} \approx N_2$).
- (II) $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{RP}^2 \approx \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ (Teorema de Dyck: un toro unido a un plano proyectivo equivale a tres planos proyectivos).

Problema 1.1.23. Sea $S_{g,1}$ una superficie orientable de género g con una única componente de frontera ($\partial S_{g,1} \approx S^1$). Pruebe que la superficie que resulta de pegar un gorro cruzado (*crosscap*) a lo largo de la frontera de $S_{g,1}$ es homeomorfa a la superficie no orientable N_{2g+1} .

Observación 1.1.24. En la literatura es habitual encontrar descripciones alternativas para S_g y N_g . En el caso orientable, la superficie S_g puede interpretarse como el resultado de adjuntar g «asas» a la esfera S^2 . Este proceso consiste en remover el interior de un disco abierto en la esfera S^2 y pegar en su lugar un toro agujerado (toro con una componente frontera). Dado que adjuntar un asa equivale a realizar la suma conexa con el toro T^2 , la superficie S_g se denomina usualmente *esfera con g asas*.

Análogamente, en el contexto no orientable, los gorros cruzados (*crosscaps*) desempeñan un papel equivalente al de las asas. Como se estableció en el Problema 1.1.16, un gorro cruzado es homeomorfo a un plano proyectivo $\mathbb{RP}^2$ al que se le ha extraído el interior de un disco. Por consiguiente, la superficie no orientable N_g coincide con la construcción obtenida al añadir g gorros cruzados a una esfera, motivo por el cual se le conoce como la *esfera con g gorros cruzados* (véase la Figura 1.9).

Problema 1.1.25. Sea $g \geq 1$. Utilice las representaciones poligonales del toro T^2 y del plano proyectivo $\mathbb{RP}^2$ para demostrar los siguientes enunciados:

- (I) La superficie orientable S_g es homeomorfa al espacio cociente obtenido de un $4g$ -ágono regular identificando sus lados según la palabra de bordes

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1};$$

ver la Figura 1.10 (izquierda).

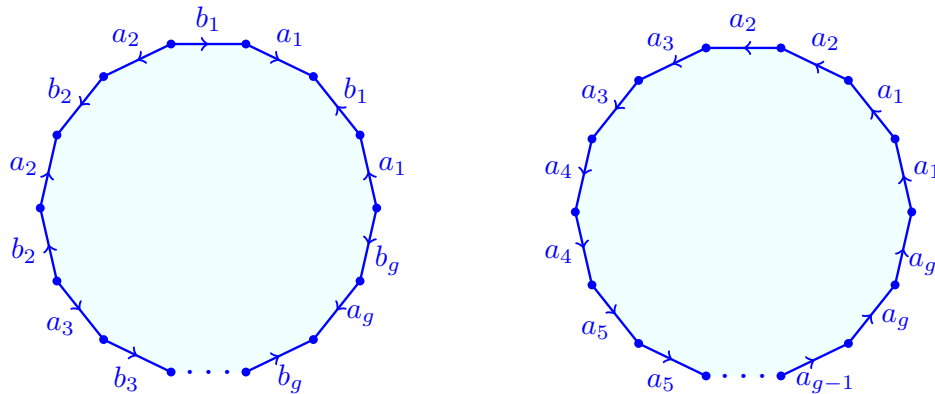


Figura 1.10: Representaciones poligonales canónicas de las superficies S_g (izquierda) y N_g (derecha).

- (II) La superficie no orientable N_g es homeomorfa al espacio cociente obtenido de un $2g$ -ágono regular identificando sus lados mediante la palabra de bordes

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_g a_g;$$

ver la Figura 1.10 (derecha).

- (III) Mediante el Teorema de Seifert-van Kampen, calcule las presentaciones del grupo fundamental $\pi_1(S_g)$ y $\pi_1(N_g)$.

1.2. Invariantes topológicos de superficies

En esta sección analizaremos diversos invariantes topológicos de superficies que resultan fundamentales para resolver el problema de clasificación. Comenzaremos introduciendo dos invariantes estructurales para superficies (tanto compactas como no compactas)

que poseen frontera compacta: el *número de componentes de frontera* y el *tipo de orientabilidad*. Posteriormente, nos restringiremos al estudio de superficies compactas para definir otros dos invariantes clásicos: la *característica de Euler* y el *género*. Como veremos más adelante, la clase de homeomorfismo de cualquier superficie compacta queda completamente determinada por la combinación de estos invariantes.

1.2.1. Componentes de frontera de una superficie

A lo largo de esta subsección, asumiremos que Σ es una superficie topológica cuya frontera $\partial\Sigma$ es compacta (posiblemente vacía).

Definición 1.2.1 (Componentes de frontera). A cada componente conexa de la frontera $\partial\Sigma$ se le denomina *componente de frontera* o *círculo frontera* de Σ . Denotamos por $b(\Sigma) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ al número total de componentes conexas de $\partial\Sigma$.

Problema 1.2.2. Sea Σ una superficie topológica con frontera (no necesariamente compacta). Demostrar las siguientes propiedades:

- (I) La frontera $\partial\Sigma$ es un subconjunto cerrado de Σ . En consecuencia, si Σ es una superficie compacta, su frontera $\partial\Sigma$ es también un subespacio compacto.
- (II) Si la frontera $\partial\Sigma$ es compacta, entonces consta de un número finito $b(\Sigma) \geq 0$ de componentes conexas, cada una de las cuales es homeomorfa al círculo unitario $\mathbb{S}^1$.
- (III) Proporcionar un ejemplo explícito de una superficie no compacta cuya frontera sea no vacía. Analizar los casos en los que la frontera es compacta y en los que no lo es.

Proposición 1.2.3 (El número de componentes de frontera es un invariante topológico). Sean Σ_1 y Σ_2 dos superficies con frontera compacta. Si Σ_1 es homeomorfa a Σ_2 , entonces $b(\Sigma_1) = b(\Sigma_2)$.

Problema 1.2.4. Sean Σ_1 y Σ_2 dos superficies topológicas homeomorfas.

- (I) Demostrar que si $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ es un homeomorfismo, entonces $f(\text{Int}(\Sigma_1)) = \text{Int}(\Sigma_2)$ y $f(\partial\Sigma_1) = \partial\Sigma_2$. Deducir que las restricciones

$$f|_{\text{Int}(\Sigma_1)} : \text{Int}(\Sigma_1) \longrightarrow \text{Int}(\Sigma_2) \quad \text{y} \quad f|_{\partial\Sigma_1} : \partial\Sigma_1 \longrightarrow \partial\Sigma_2$$

son homeomorfismos. Concluir a partir de esto la validez de la Proposición 1.2.3.

Sugerencia: Utilice la Invariancia del Dominio para caracterizar los puntos del interior y de la frontera.

- (II) (*) Sea $g : \partial\Sigma_1 \rightarrow \partial\Sigma_2$ un homeomorfismo entre las fronteras de dos superficies compactas homeomorfas. ¿Existe siempre un homeomorfismo global $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ tal que su restricción a la frontera coincida con g ($f|_{\partial\Sigma_1} = g$)?

Nota: Considere la orientación inducida en las componentes de la frontera cuando las superficies son orientables.

1.2.2. Tipo de orientabilidad

Intuitivamente, una superficie como la esfera S^2 encajada en $\mathbb{R}^3$ posee dos caras bien diferenciadas («adentro» y «afuera»). En contraste, la banda de Möbius cuenta con una sola cara, lo que impide definir una noción global consistente de orientación o de lados diferenciados (véase la Figura 1.1).

En topología de superficies, esta propiedad permite clasificar los espacios en dos categorías disjuntas: superficies *orientables* y superficies *no orientables*. Como demostraremos a continuación, la orientabilidad es una propiedad intrínseca y constituye un invariante topológico.

Recordemos formalmente el concepto de encaje (*embedding*):

Definición 1.2.5 (Encaje topológico). Un espacio topológico X está *encajado* en otro espacio topológico Y si existe una función continua e inyectiva $f : X \rightarrow Y$ tal que la restricción $f : X \rightarrow f(X)$ es un homeomorfismo, donde la imagen $f(X) \subseteq Y$ está dotada de la topología relativa o de subespacio heredada de Y .

Definición 1.2.6 (Superficie orientable vs. no orientable). Una superficie Σ es *no orientable*² si contiene una banda de Möbius $\mathbb{M}$ encajada. En caso contrario, se dice que Σ es *orientable*.

Problema 1.2.7. Demostrar las siguientes afirmaciones:

- (I) La botella de Klein $\mathbb{K}$ y el plano proyectivo real $\mathbb{RP}^2$ son superficies no orientables.
- (II) El anillo cerrado $A \approx S^1 \times [0, 1]$, la esfera S^2 y el toro T^2 son superficies orientables.

Sugerencia: Muestre que no contienen subespacios homeomorfos a una banda de Möbius.

- (III) La suma conexa $\Sigma_1 \# \Sigma_2$ es una superficie no orientable si y solo si al menos una de las superficies componentes Σ_1 o Σ_2 es no orientable. En particular, deducir que la superficie S_g es orientable para todo $g \geq 0$ y que la superficie N_g es no orientable para todo $g \geq 1$.

Si $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ es un homeomorfismo entre superficies y Σ_1 contiene un subespacio $B \subseteq \Sigma_1$ homeomorfo a la banda de Möbius, entonces su imagen $f(B) \subseteq \Sigma_2$ es también una banda de Möbius encajada en Σ_2 . Esta observación directa justifica la siguiente proposición:

Proposición 1.2.8 (El tipo de orientabilidad es un invariante topológico). Sean Σ_1 y Σ_2 dos superficies topológicas homeomorfas. Entonces, Σ_1 es orientable si y solo si Σ_2 es orientable.

Notación 1.2.9. A lo largo de este escrito, adoptaremos la convención usual de denotar por S a una superficie orientable y por N a una superficie no orientable. Cuando no se especifique o no sea relevante el tipo de orientabilidad, emplearemos la letra Σ para designar a una superficie en general.

²Véase [GX12, Definition 4.6] para una definición formal en términos del grado de funciones de identificación, o [GX12, Proposition 5.9] para la detección de orientabilidad mediante el primer grupo de homología $H_1(\Sigma; \mathbb{Z})$.

1.2.3. Característica de Euler y género de una superficie compacta

Como se estableció en el Teorema 1.1.21, toda superficie cerrada es homeomorfa a la esfera $S^2 = S_0$, a la suma conexa de g toros S_g ($g \geq 1$), o bien a la suma conexa de h planos proyectivos N_h ($h \geq 1$).

Puesto que el tipo de orientabilidad es un invariante topológico, ninguna superficie de la familia orientable $\{S_g\}_{g \geq 0}$ puede ser homeomorfa a una superficie de la familia no orientable $\{N_h\}_{h \geq 1}$. Sin embargo, el Teorema 1.1.21 no garantiza por sí solo si dos superficies dentro de una misma familia con distintos índices pueden ser homeomorfas (es decir, si $S_n \approx S_m$ o $N_n \approx N_m$ para $n \neq m$). Para distinguir completamente estas clases de equivalencia, introducimos dos invariantes topológicos fundamentales: la *característica de Euler* y el *género*.

Definición 1.2.10 (Triangulación de una superficie). Una *triangulación* de una superficie Σ (compacta o no) consiste en una familia $\mathcal{T} = \{T_i\}$ de triángulos topológicos (homeomorfos al triángulo estándar $\Delta \subset \mathbb{R}^2$) encajados en Σ que satisfacen:

- (I) $\Sigma = \bigcup_i T_i$, es decir, $\mathcal{T}$ recubre totalmente a Σ .
- (II) Cualesquiera dos triángulos distintos $T_i, T_j \in \mathcal{T}$ son disjuntos, comparten exactamente un único vértice, o bien comparten una arista completa en común (véase la Figura 1.11).

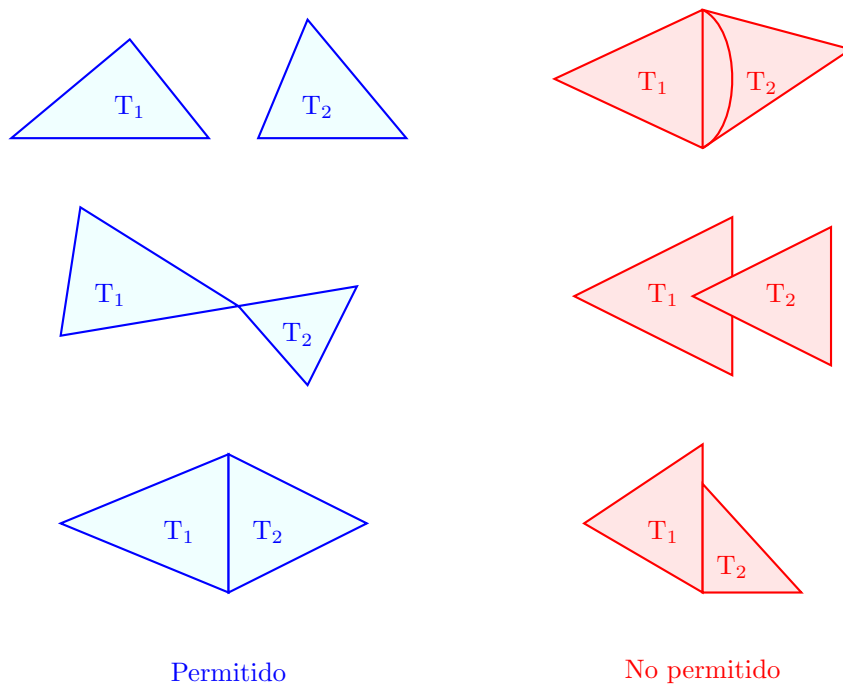


Figura 1.11: Ejemplos de intersecciones de triángulos permitidas y no permitidas.

- (III) Cada arista pertenece a lo más a 2 triángulos. En particular, si la frontera es vacía ($\partial\Sigma = \emptyset$), cada arista es compartida por exactamente 2 triángulos.
- (IV) Para cada vértice v , el conjunto de triángulos que contienen a v es finito.

Observación 1.2.11. Una triangulación dota a la superficie Σ de una estructura natural de CW-complejo de dimensión 2 (véase, por ejemplo, [Hat02]), donde los vértices de la triangulación corresponden al 0-esqueleto, las aristas a las 1-celdas y las caras triangulares a las 2-celdas.

Ejemplo 1.2.12. La Figura 1.12 ilustra triangulaciones finitas para la esfera $\mathbb{S}^2$, el toro $\mathbb{T}^2$ y el plano proyectivo real $\mathbb{RP}^2$.

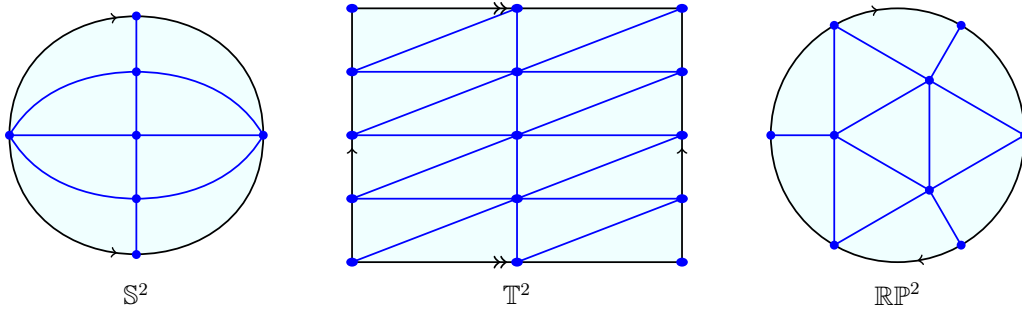


Figura 1.12: Triangulaciones de la esfera, el toro y el plano proyectivo.

Problema 1.2.13. Construir explícitamente triangulaciones para la banda de Möbius $\mathbb{BM}$, la botella de Klein $\mathbb{K}$ y el anillo $\mathbb{A} \approx \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$.

La existencia general de estas estructuras fue demostrada por T. Radó:

Teorema 1.2.14 (Radó [Rad25]). *Toda superficie topológica admite una triangulación.*

Observación 1.2.15. Para una demostración en el caso compacto basada en métodos elementales, véase [GX12, Appendix E] (atribuida a C. Thomassen). La prueba general para superficies no necesariamente compactas puede consultarse en [AS60, Chapter I] o en [Moi77, Theorem 8.3].

Problema 1.2.16. Demostrar que si una superficie Σ no es compacta, entonces toda triangulación de Σ consta de una cantidad infinita numerable de triángulos.

Cuando la superficie Σ es compacta, cualquier triangulación es finita, lo que permite definir la siguiente cantidad entera:

Definición 1.2.17 (Característica de Euler). Sea Σ una superficie compacta y sea $\mathcal{T}$ una triangulación de Σ . La *característica de Euler* de Σ respecto a $\mathcal{T}$ se define como:

$$\chi(\Sigma; \mathcal{T}) := V - A + C,$$

donde V denota el número de vértices, A el número de aristas y C el número de triángulos (caras) en la triangulación $\mathcal{T}$.

El hecho de que $\chi(\Sigma; \mathcal{T})$ sea independiente de la triangulación elegida se fundamenta en la validez de la *Hauptvermutung* para superficies (Moise [Moi77, Theorem 8.5]): cualesquiera dos triangulaciones de una superficie admiten una refinación o subdivisión baricéntrica común.

Teorema 1.2.18. *Sea Σ una superficie compacta y sean $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ dos triangulaciones cualesquiera de Σ . Entonces $\chi(\Sigma; \mathcal{T}_1) = \chi(\Sigma; \mathcal{T}_2)$. En consecuencia, la característica de Euler depende únicamente del tipo de homeomorfismo de Σ , por lo que se denota simplemente por $\chi(\Sigma)$ y constituye un invariante topológico.*

Problema 1.2.19. Resolver las siguientes afirmaciones:

- (I) Demostrar que si $\mathcal{T}'$ es una subdivisión baricéntrica de $\mathcal{T}$, entonces $\chi(\Sigma; \mathcal{T}) = \chi(\Sigma; \mathcal{T}')$.
- (II) A partir de la representación poligonal canónica, demostrar que $\chi(S_g) = 2 - 2g$ para todo $g \geq 0$.
- (III) Demostrar análogamente que $\chi(N_g) = 2 - g$ para todo $g \geq 1$.
- (IV) Probar que para cualesquiera dos superficies compactas Σ_1 y Σ_2 , se cumple:

$$\chi(\Sigma_1 \# \Sigma_2) = \chi(\Sigma_1) + \chi(\Sigma_2) - 2.$$

Como aplicación, deducir que $\chi(\mathbb{RP}^2 \# S_g) = 1 - 2g$ y $\chi(\mathbb{K} \# S_g) = -2g$.

Definición 1.2.20 (Género de una superficie cerrada). Sea Σ una superficie cerrada (compacta y $\partial\Sigma = \emptyset$). Se define el *género* de Σ , denotado por $g(\Sigma)$, como:

$$g(\Sigma) := \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}\chi(\Sigma), & \text{si } \Sigma \text{ es orientable,} \\ 2 - \chi(\Sigma), & \text{si } \Sigma \text{ es no orientable.} \end{cases}$$

En particular, esta definición satisface $g(S_g) = g$ para $g \geq 0$ (tomando $S_0 = \mathbb{S}^2$) y $g(N_h) = h$ para $h \geq 1$.

Dado que la característica de Euler y la orientabilidad son invariantes topológicos, se deduce que dos superficies orientables S_m y S_n (o no orientables N_m y N_n) son homeomorfas si y solo si sus géneros coinciden ($m = n$). Esto culmina en el teorema estructural de clasificación:

Teorema 1.2.21 (Teorema de Clasificación de Superficies Cerradas). *Dos superficies cerradas Σ_1 y Σ_2 son homeomorfas ($\Sigma_1 \approx \Sigma_2$) si y solo si poseen el mismo tipo de orientabilidad y el mismo género $g(\Sigma_1) = g(\Sigma_2)$.*

Notación 1.2.22. Dado que la esfera $\mathbb{S}^2$ es orientable y $g(\mathbb{S}^2) = 0$, adoptaremos libremente la convención $S_0 := \mathbb{S}^2$.

Triangulaciones coherentes y orientabilidad

El tipo de orientabilidad admite también una caracterización combinatoria de carácter local mediante orientaciones compatibles sobre los triángulos de una triangulación.

Un triángulo estándar $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ admite dos orientaciones posibles según la orientación dada a su curva frontera $\partial\Delta$. Si fijamos el recorrido de sus aristas (e_1, e_2, e_3) en sentido antihorario, decimos que Δ tiene *orientación positiva*; en caso contrario, tiene *orientación negativa* (véase la Figura 1.13(a)). Un triángulo en una superficie Σ está *orientado* si se ha fijado una orientación inducida por un homeomorfismo desde un triángulo del plano orientado.

Definición 1.2.23 (Triangulación coherente). Una triangulación $\mathcal{T}$ de una superficie Σ se dice *coherente* (o compatible) si satisface:

- (I) Cada triángulo $T \in \mathcal{T}$ está orientado.

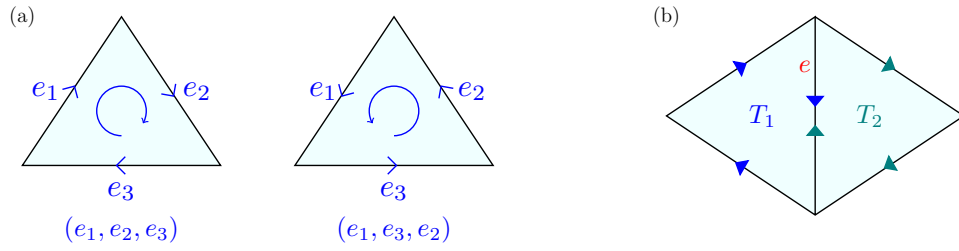


Figura 1.13: (a) Orientación positiva y negativa sobre un triángulo plano. (b) Condición de compatibilidad sobre una arista compartida e en una triangulación coherente.

- (II) Si dos triángulos $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ comparten una arista e , la orientación inducida por T_1 sobre e es opuesta a la orientación inducida por T_2 sobre la misma arista e (véase la Figura 1.13(b)).

Observación 1.2.24. Si $\mathcal{T}$ es una triangulación coherente de Σ , invertir la orientación de absolutamente todos los triángulos de $\mathcal{T}$ produce una nueva triangulación coherente $\mathcal{T}'$.

Problema 1.2.25. Demostrar que una superficie Σ es orientable (de acuerdo con la Definición 1.2.6) si y solo si admite una triangulación coherente.

1.2.4. Clasificación de superficies compactas

Supongamos que Σ es una superficie compacta. Su frontera $\partial\Sigma$ es un subespacio compacto de dimensión 1 y, por lo tanto, consta de una cantidad finita de componentes conexas homeomorfas a círculos, las cuales denotamos por $b(\Sigma) = b \geq 0$.

Si $b > 0$, escribimos $\partial\Sigma = C_1 \sqcup C_2 \sqcup \cdots \sqcup C_b$. Para cada $1 \leq i \leq b$, adjuntamos un disco cerrado $D_i \approx \mathbb{D}^2$ identificando su frontera $\partial D_i \approx \mathbb{S}^1$ con el círculo C_i mediante un homeomorfismo $h_i : \partial D_i \rightarrow C_i$. Definimos el espacio cociente resultante por:

$$\Sigma' := \frac{\Sigma \sqcup D_1 \sqcup \cdots \sqcup D_b}{x \sim h_i(x) \text{ para } x \in \partial D_i}.$$

Si $b = 0$, simplemente hacemos $\Sigma' = \Sigma$. Así, Σ' es una superficie cerrada (compacta y con frontera vacía).

Puesto que cada disco adherido $\mathbb{D}^2$ posee característica de Euler $\chi(\mathbb{D}^2) = 1$ y su frontera $\mathbb{S}^1$ satisface $\chi(\mathbb{S}^1) = 0$, un cálculo directo mediante el principio de inclusión-exclusión (o sucesiones de Mayer-Vietoris) nos da la relación:

$$\chi(\Sigma') = \chi(\Sigma) + b(\Sigma). \quad (1.1)$$

Esta propiedad permite trasladar la definición de género al caso con frontera.

Definición 1.2.26 (Género de una superficie compacta). Sea Σ una superficie compacta con $b(\Sigma) = b \geq 0$ componentes de frontera. Definimos el *género* de Σ , denotado por $g(\Sigma)$, como el género de la superficie cerrada asociada Σ' , a saber:

$$g(\Sigma) := \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}(\chi(\Sigma) + b), & \text{si } \Sigma \text{ es orientable,} \\ 2 - (\chi(\Sigma) + b), & \text{si } \Sigma \text{ es no orientable.} \end{cases}$$

A diferencia de las superficies cerradas, donde la característica de Euler y la orientabilidad bastan para caracterizar la clase de homeomorfismo, en el caso con frontera no vacía se requiere el número de componentes de frontera como invariante adicional.

Problema 1.2.27. Encontrar ejemplos de pares de superficies compactas con el mismo tipo de orientabilidad y la misma característica de Euler, pero que no sean homeomorfas entre sí.

Combinando la Ecuación (1.1) con el Teorema de Clasificación de Superficies Cerradas, se obtiene la clasificación completa para el caso compacto:

Teorema 1.2.28 (Teorema de Clasificación de Superficies Compactas, Brahana 1921 [Bra21]). *Sean Σ_1 y Σ_2 dos superficies compactas. Entonces $\Sigma_1 \approx \Sigma_2$ si y solo si ambas superficies tienen el mismo tipo de orientabilidad, el mismo número de componentes de frontera ($b(\Sigma_1) = b(\Sigma_2)$) y el mismo género ($g(\Sigma_1) = g(\Sigma_2)$).*

Notación 1.2.29. Denotamos por $S_{g,b}$ a la superficie orientable construida al remover de S_g el interior de $b \geq 0$ discos cerrados disjuntos. De forma análoga, $N_{h,b}$ denota a la superficie no orientable obtenida al remover el interior de $b \geq 0$ discos cerrados disjuntos de N_h . Si $b = 0$, escribimos simplemente $S_{g,0} = S_g$ y $N_{h,0} = N_h$.

Problema 1.2.30. Verificar que el género de $S_{g,b}$ es igual a g y que el género de $N_{h,b}$ es igual a h .

Como consecuencia del Teorema 1.2.28, toda superficie compacta Σ es homeomorfa a exactamente una superficie de la siguiente familia disjunta:

$$\{S_{g,b} \mid g \geq 0, b \geq 0\} \sqcup \{N_{h,b} \mid h \geq 1, b \geq 0\}.$$

Problema 1.2.31. Resolver las siguientes cuestiones:

- (I) Proporcionar una representación poligonal para una superficie compacta con frontera no vacía y demostrar que su grupo fundamental $\pi_1(\Sigma)$ es libre en un número finito de generadores.
- (II) Dado $n \in \mathbb{Z}$, describir (hasta homeomorfismo) todas las superficies compactas cuya característica de Euler es igual a n .

Notas históricas sobre la prueba del Teorema de Clasificación

La primera prueba completa y rigurosa del Teorema de Clasificación para Superficies Cerradas bajo la concepción moderna de espacio topológico se debe a Henry Roy Brahana (1895–1972) en 1921 [Bra21]. No obstante, la intuición y versiones previas tienen un extenso recorrido histórico. August Ferdinand Möbius (1790–1868) anunció el teorema para superficies orientables en $\mathbb{R}^3$ en 1863. De manera independiente, Camille Jordan publicó su propia aproximación en 1866. A esta línea se sumaron aportes fundamentales de Walther von Dyck (1888), Max Dehn y Poul Heegaard (1907), y James Waddell Alexander (1915). Para una cronología pormenorizada y las fuentes originales, véase el Apéndice D en Gallier y Xu [GX12, Appendix D].

La prueba clásica más difundida se basa en la reducción de polígonos con bordes identificados a una *forma normal canónica*, célebremente expuesta por Seifert y Threlfall [ST80] y abordada también en varios textos estándar [Mun75, Bre93, Moi77, Ful95]. Por otra parte, John Conway desarrolló la prueba conocida como *Zero Irrelevancy Proof* (ZIP) [FW99], la cual prescinde por completo de pasar por formas normales poligonales. Una exposición moderna, rigurosa e integral se encuentra en el texto de Gallier y Xu [GX12].

1.3. Invariantes topológicos de superficies no compactas

En esta sección introducimos los invariantes topológicos requeridos para enunciar el Teorema de Clasificación de Superficies no Compactas con frontera compacta (Teorema de Kerékjártó-Richards). Estos invariantes son el *espacio de fines*, el *espacio de fines acumulados por género* y el *espacio de fines acumulados por género no-orientable*.

Comenzamos ilustrando algunos ejemplos fundamentales de superficies no compactas con frontera vacía.

Ejemplo 1.3.1. La Figura 1.14 muestra las siguientes superficies no compactas:

- (1) $S_{g,b} \setminus P$, donde $P \subset \text{int}(S_{g,b})$ es un conjunto finito de $n \geq 1$ puntos.
- (2) $N_{g,b} \setminus P$, donde $P \subset \text{int}(N_{g,b})$ es un conjunto finito de $n \geq 1$ puntos.
- (3) La superficie *peine* o *flauta* $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N}$.
- (4) La superficie $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}$, la cual es homeomorfa al peine $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N}$.

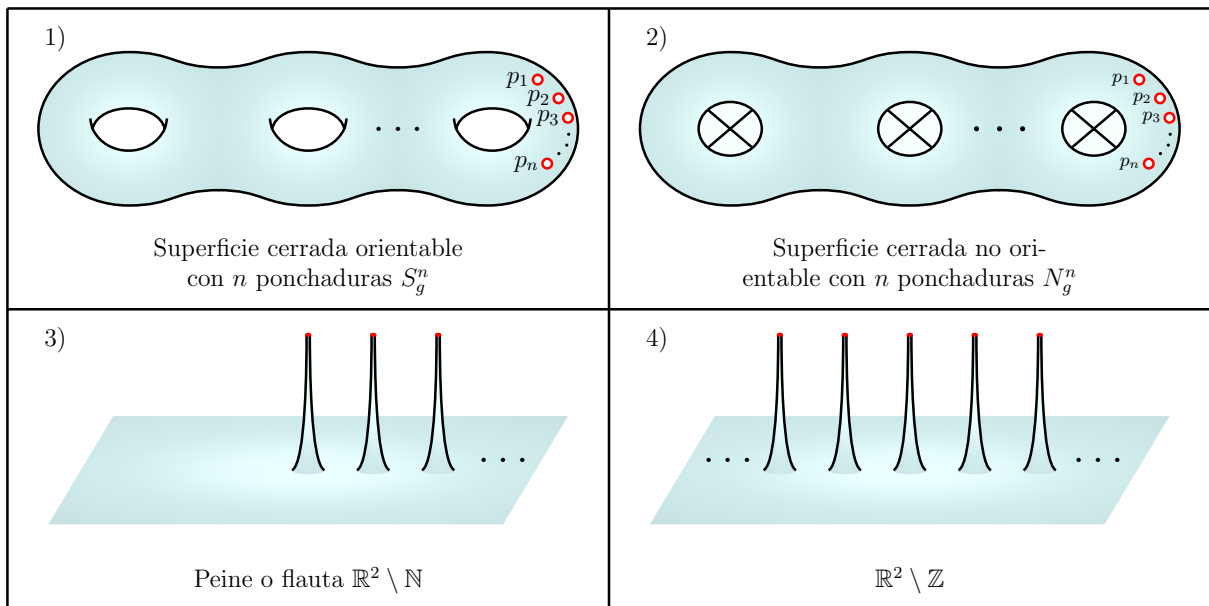


Figura 1.14: Ejemplos clásicos de superficies no compactas obtenidas por remoción de puntos.

Construcción combinatoria de superficies mediante grafos

Para formalizar la construcción de numerosos ejemplos con topología más compleja, recordamos algunos conceptos de teoría de grafos.

Un *grafo simple y no dirigido* $\mathcal{G}$ consta de un par de conjuntos (V, E) , donde $V \neq \emptyset$ es el conjunto numerable de *vértices* y $E \subseteq \mathcal{P}_2(V)$ es el conjunto numerable de *aristas*. Decimos que $\mathcal{G}$ es *conexo* si para cualquier par de vértices existe un camino en el grafo que los une. El *grado* de un vértice $v \in V$, denotado por $\deg(v)$, es el número de aristas incidentes en v . Un grafo es *localmente finito* si $\deg(v) < \infty$ para todo $v \in V$.

Sea $\mathcal{G} = (V, E)$ un grafo conexo y localmente finito. Asociamos a cada vértice $v \in V$ una superficie compacta orientable o no orientable M_v provista de exactamente $b(M_v) = \deg(v)$ componentes de frontera. Asignamos a cada círculo frontera de M_v una etiqueta las cuales están en correspondencia biyectiva con las aristas incidentes en v .

Definimos el espacio topológico $S(\mathcal{G}, \{M_v\}_{v \in V})$ como el cociente de la unión disjunta $\bigsqcup_{v \in V} M_v$ obtenido al identificar, para cada arista $e = \{u, v\} \in E$, la componente frontera de M_u etiquetada por e con la componente frontera de M_v etiquetada por e mediante un homeomorfismo $h_e : S^1 \rightarrow S^1$.

Problema 1.3.2. Demostrar que $S(\mathcal{G}, \{M_v\}_{v \in V})$ es una superficie topológica conexa. ¿Por qué es fundamental la hipótesis de que el grafo $\mathcal{G}$ sea localmente finito?

Ejemplo 1.3.3 (Continuación del Ejemplo 1.3.1). La Figura 1.15 ilustra las siguientes superficies no compactas construidas mediante este procedimiento combinatorio:

- (1) El *Monstruo del Lago Ness (orientable)*: La superficie $S(\mathcal{G}, \{M_v\}_{v \in V})$, donde $\mathcal{G}$ es el grafo rayo infinito con vértices en $\mathbb{N}$, $M_1 \approx S_{1,1}$ (toro agujerado) y $M_j \approx S_{1,2}$ para todo $j \geq 2$.
- (2) El *Monstruo del Lago Ness no orientable*: La superficie $S(\mathcal{G}, \{M_v\}_{v \in V})$, donde $\mathcal{G}$ es el grafo rayo infinito con vértices en $\mathbb{N}$, $M_1 \approx N_{1,1}$ (plano proyectivo agujerado) y $M_j \approx N_{1,2}$ para todo $j \geq 2$.
- (3) La *Escalera de Jacob*: La superficie $S(\mathcal{G}, \{M_v\}_{v \in V})$, donde $\mathcal{G}$ es el grafo bi-infinito con vértices en $\mathbb{Z}$ y $M_j \approx S_{1,2}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$.
- (4) El *Árbol de Cantor*: La superficie $S(\mathcal{G}, \{M_v\}_{v \in V})$, donde $\mathcal{G}$ es el árbol binario infinito de raíz $\emptyset$, la raíz satisface $M_\emptyset \approx S_{0,2}$ (un cilindro) y para todo $v \neq \emptyset$, $M_v \approx S_{0,3}$ (un par de pantalones).
- (5) El *Árbol Florido de Cantor*: La superficie $S(\mathcal{G}, \{M_v\}_{v \in V})$, donde $\mathcal{G}$ es el árbol binario infinito de raíz $\emptyset$, $M_\emptyset \approx S_{0,2}$ y para todo $v \neq \emptyset$, $M_v \approx S_{1,3}$ (un par de pantalones con género 1).

1.3.1. Espacios de fines de una superficie

En esta sección definimos el espacio de fines de una superficie topológica. Esta noción es lo suficientemente general como para aplicarse a cualquier superficie, incluyendo aquellas no compactas y con componentes de frontera no compactas.

Más precisamente, el espacio de fines de una superficie Σ , denotado por $E(\Sigma)$, es un espacio topológico asociado a Σ que resulta ser un invariante topológico y es homeomorfo a un subespacio cerrado del espacio de Cantor $2^{\mathbb{N}}$. Además, el espacio $\Sigma \cup E(\Sigma)$ admite una estructura de compactación³ conocida como la *compactación de Freudenthal* de Σ . Intuitivamente, el espacio de fines captura todas las formas posibles en que se puede «escapar al infinito» dentro de la superficie.

La noción de espacio de fines fue introducida por Richards [Ric63], aunque la mayoría de sus propiedades fueron enunciadas allí sin demostración. Para un desarrollo riguroso de la teoría de fines en variedades topológicas recomendamos el trabajo de Raymond [Ray60].

³Es decir, $\Sigma \cup E(\Sigma)$ es un espacio compacto que contiene a Σ como subespacio abierto y denso.

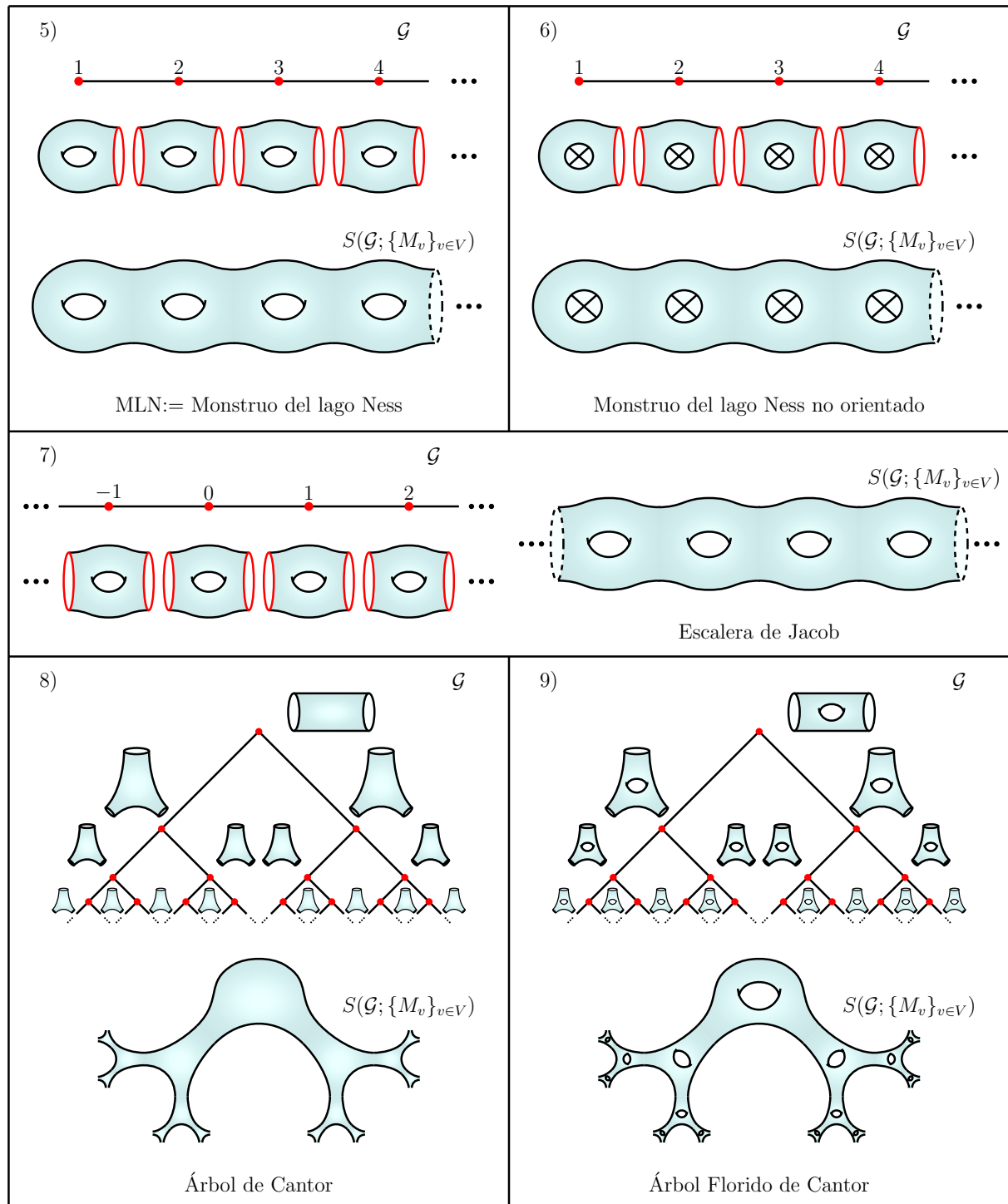


Figura 1.15: Superficies no compactas representadas mediante la pegadura combinatoria sobre grafos localmente finitos.

Por otro lado, en el texto clásico de Ahlfors y Sario [AS60], el espacio de fines se presenta bajo el término de *frontera ideal*.

A lo largo de esta sección, Σ denotará una superficie topológica (orientable o no orientable), posiblemente no compacta y con frontera posiblemente no vacía o no compacta.

Definición 1.3.4 (Región, región acotada y no acotada). Un subconjunto no vacío $A \subseteq \Sigma$ es una *región* de Σ si es abierto y conexo. Una región A es *acotada* si su clausura $\overline{A}$ en Σ

es compacta (es decir, si A es relativamente compacto). En caso contrario, diremos que A es una *región no acotada*.

Problema 1.3.5. Demostrar que una superficie Σ contiene una región no acotada si y solo si Σ no es compacta.

Definición 1.3.6 (Prefin). Un *prefin* de una superficie Σ es una sucesión anidada decreciente $\mathbf{p} = (P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dada por $P_1 \supseteq P_2 \supseteq P_3 \supseteq \dots$, de regiones no acotadas de Σ que satisface las siguientes condiciones:

1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, la frontera ∂P_n en Σ es compacta.
2. Para todo compacto $K \subseteq \Sigma$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $P_n \cap K = \emptyset$ para todo $n \geq N$.

Problema 1.3.7. Demostrar que si Σ es compacta, entonces Σ no admite prefines.

Ejemplo 1.3.8. La Figura 1.16 ilustra ejemplos de prefines en diversas superficies no compactas:

- a) Prefines en el Monstruo del lago Ness (Figura 1.16 a).
- b) Prefines en el Monstruo del lago Ness no orientable (Figura 1.16 b).
- c) Sea Σ una superficie cerrada (orientable $S_{g,b}$ o no orientable $N_{g,b}$) y sea $P \subseteq \text{int}(\Sigma)$ un conjunto finito de $n \geq 1$ puntos. Entonces la superficie no compacta $\Sigma \setminus P$ tiene al menos n prefines distintos (Figura 1.16 c).

Dos prefines $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(P'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Σ se dicen *equivalentes* si satisfacen:

- I) Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $P_N \subseteq P'_n$.
- II) Para todo $m \in \mathbb{N}$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $P'_M \subseteq P_m$.

Dado un prefin $\mathbf{p} = (P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, denotamos por $\mathbf{p}^*$ a su clase de equivalencia.

Definición 1.3.9 (Espacio de fines). El *espacio de fines* de una superficie Σ , denotado por $E(\Sigma)$, es el conjunto de todas las clases de equivalencia de prefines de Σ .

Dotamos a $E(\Sigma)$ de la topología generada por los conjuntos de la forma U^* , donde $U \subseteq \Sigma$ es un abierto y U^* se define como:

$$U^* = \{\mathbf{p}^* \in E(\Sigma) \mid \text{existe } n \geq 1 \text{ tal que } P_n \subseteq U \text{ para algún representante } (P_n) \in \mathbf{p}^*\}.$$

Problema 1.3.10. Describir el espacio de fines de las superficies de la Figura 1.14. En particular:

1. Probar que $S_{g,b} \setminus P$ y $N_{g,b} \setminus P$ (con $|P| = n$) tienen exactamente n fines.
2. ¿Cuál es el espacio de fines de la «flauta infinita» $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N}$?
3. Demostrar que el espacio de fines de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N}$ es homeomorfo al espacio de fines de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}$.

Proposición 1.3.11 (Invariancia topológica del espacio de fines). Si Σ_1 y Σ_2 son superficies homeomorfas, entonces sus espacios de fines $E(\Sigma_1)$ y $E(\Sigma_2)$ son homeomorfos.

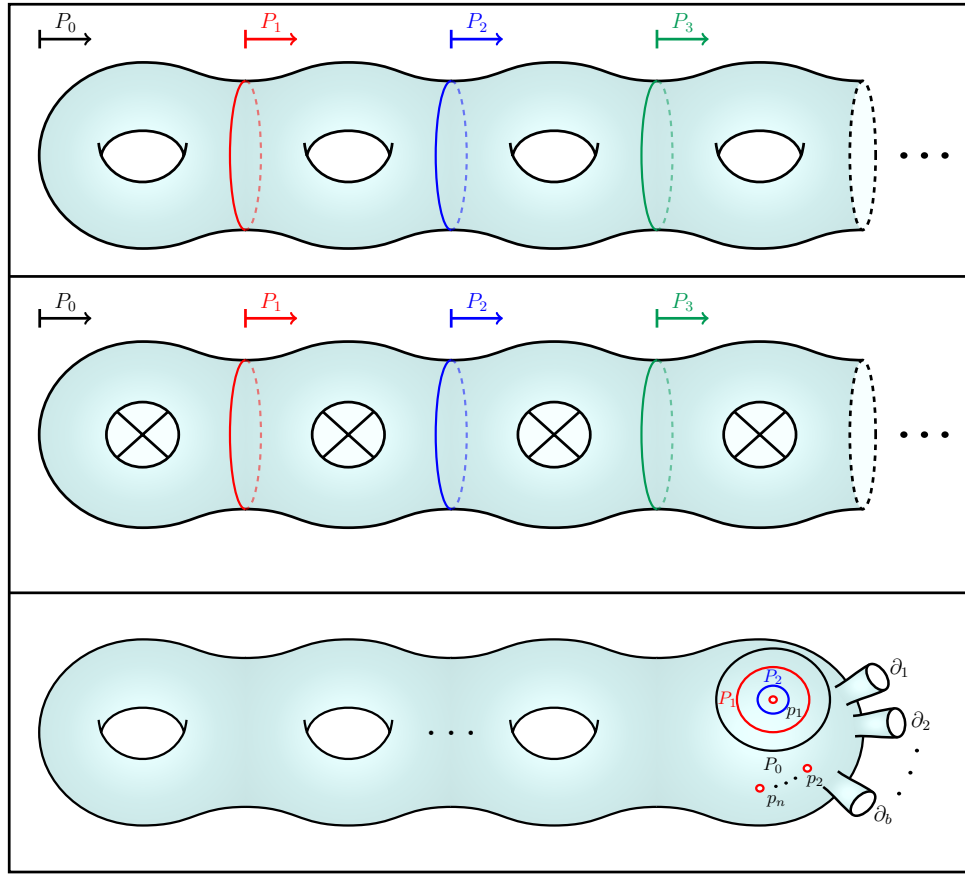


Figura 1.16: Ejemplos de prefines en distintas superficies.

Propiedades topológicas de $E(\Sigma)$. A continuación demostramos que el espacio de fines $E(\Sigma)$ de cualquier superficie Σ satisface las siguientes propiedades esenciales:

- **$E(\Sigma)$ es Hausdorff:** Sean $p^*, q^* \in E(\Sigma)$ con $p^* \neq q^*$, representados por (P_n) y (Q_m) , respectivamente. Como no son equivalentes, existe un n_0 tal que ningún Q_m está contenido en P_{n_0} . Dado que ∂P_{n_0} es compacto, la propiedad de prefin implica que existe m_0 tal que $Q_{m_0} \cap \partial P_{n_0} = \emptyset$. Siendo Q_{m_0} conexo y no contenido en P_{n_0} , se deduce que $Q_{m_0} \subseteq \Sigma \setminus \overline{P_{n_0}}$. En consecuencia, $P_{n_0} \cap Q_{m_0} = \emptyset$, por lo que $P_{n_0}^*$ y $Q_{m_0}^*$ son entornos abiertos disjuntos de p^* y q^* en $E(\Sigma)$.
- **$E(\Sigma)$ es segundo numerable:** Construimos primero una exhaustión por compactos para Σ :

Afirmación 1. *Existe una sucesión $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de regiones acotadas tales que $\Sigma = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $\overline{A_n} \subseteq A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración de la Afirmación. Dado que Σ es un espacio métrico separable y localmente compacto, se puede cubrir por una cantidad numerable de discos cerrados. Uniendo sucesivamente estos discos mediante caminos conexos, se obtiene la sucesión de regiones relativamente compactas deseada. $\square$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{C}_n = \{C_n^1, \dots, C_n^{m_n}\}$ la colección de las componentes conexas no acotadas de $\Sigma \setminus \overline{A_n}$. Se demuestra que $\mathcal{C}_n$ es siempre un conjunto finito. Afirmamos

que la familia numerable

$$\mathcal{B} = \{(C_n^i)^* \mid n \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, m_n\}$$

constituye una base para la topología de $E(\Sigma)$. En efecto, dado un abierto $U^* \subseteq E(\Sigma)$ con $p^* \in U^*$, existe un representante (P_k) con $P_k \subseteq U$. Como ∂P_k es compacto, existe j tal que $\partial P_k \subseteq A_j$. Luego, la componente no acotada C_j^i que contiene a los conjuntos de la cola del prefin satisface $C_j^i \subseteq P_k \subseteq U$, lo que demuestra que $p^* \in (C_j^i)^* \subseteq U^*$.

- **$E(\Sigma)$ es cero-dimensional:** Demostraremos que cada elemento de la base numerable $\mathcal{B}$ es también cerrado. Tomemos $(C_m^i)^* \in \mathcal{B}$ y sea $p^* \notin (C_m^i)^*$ representado por (P_n) . Existe n tal que $A_m \cap P_n = \emptyset$, lo que implica $P_n \subseteq \Sigma \setminus \overline{A_m}$. Como P_n es conexo y $p^* \notin (C_m^i)^*$, P_n debe estar contenido en alguna otra componente C_m^j con $j \neq i$. Así, $p^* \in (C_m^j)^*$ y $(C_m^i)^* \cap (C_m^j)^* = \emptyset$, probando que $(C_m^i)^*$ es abierto y cerrado (clopen).
- **$E(\Sigma)$ es totalmente desconexo:** Todo espacio de Hausdorff cero-dimensional admite una base de abiertos-cerrados y es, por lo tanto, totalmente desconexo (véase [Eng89, Teorema 6.2.1]).
- **$E(\Sigma)$ es compacto:** Consideremos el sistema inverso de conjuntos finitos disjuntos $(C_n, f_{n,m})$, donde para $m > n$, $f_{n,m}: C_m \rightarrow C_n$ asigna a cada componente no acotada de $\Sigma \setminus \overline{A_m}$ la única componente de $\Sigma \setminus \overline{A_n}$ que la contiene.

El límite inverso del sistema,

$$\mathcal{C} = \lim C_n = \left\{ (u_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} C_n \mid f_{n,m}(u_m) = u_n \text{ para todo } m > n \right\},$$

es un subespacio cerrado del producto cartesiano $\prod C_n$. Como cada C_n es finito (y compacto con la topología discreta), el Teorema de Tychonoff garantiza que $\prod C_n$ es compacto, y por ende $\mathcal{C}$ es compacto.

Definimos la función $\Phi: \mathcal{C} \rightarrow E(\Sigma)$ dada por $\Phi((u_n)) = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}^*$.

- *Injectividad:* Si $(u_n) \neq (v_n)$, existe n tal que $u_n \neq v_n$. Como son componentes conexas disjuntas de $\Sigma \setminus \overline{A_n}$, sus clases de equivalencia definen fines distintos.
- *Sobreyectividad:* Dado $p^* \in E(\Sigma)$, para cada n existe $N(n)$ tal que $P_{N(n)} \cap \overline{A_n} = \emptyset$. Definimos u_n como la única componente en C_n que contiene a $P_{N(n)}$. La compatibilidad $f_{n,m}(u_m) = u_n$ se satisface trivialmente por el anidamiento de los P_k , por lo que $(u_n) \in \mathcal{C}$ y $\Phi((u_n)) = p^*$.
- *Continuidad:* La preimagen del abierto básico $(C_n^i)^*$ bajo Φ es de la forma $\pi_n^{-1}(\{C_n^i\}) \cap \mathcal{C}$, donde π_n es la proyección canónica. Esto es un abierto en la topología heredada de $\mathcal{C}$.

Dado que Φ es una biyección continua desde un espacio compacto $\mathcal{C}$ hacia un espacio de Hausdorff $E(\Sigma)$, concluimos que Φ es un homeomorfismo. Por lo tanto, $E(\Sigma)$ es compacto.

Proposición 1.3.12. *El espacio de fines $E(\Sigma)$ de una superficie Σ es Hausdorff, segundo numerable, totalmente desconexo y compacto. En particular, $E(\Sigma)$ es homeomorfo a un subespacio cerrado del espacio de Cantor $2^{\mathbb{N}}$.*

Compactación de Freudenthal. Dado el espacio de fines $E(\Sigma)$, definimos el conjunto $\widehat{\Sigma} := \Sigma \sqcup E(\Sigma)$. La colección formada por todos los abiertos de Σ junto con las familias de la forma $U \cup U^*$, donde $U \subseteq \Sigma$ es abierto con frontera ∂U compacta en Σ , constituye una base para una topología sobre $\widehat{\Sigma}$.

Teorema 1.3.13. [Ray60, Teorema 1.5] *El espacio topológico $\widehat{\Sigma} = \Sigma \sqcup E(\Sigma)$ satisface las siguientes propiedades:*

1. $\widehat{\Sigma}$ es Hausdorff, conexo y localmente conexo.
2. $E(\Sigma)$ es un subconjunto cerrado y denso en ninguna parte (sin puntos interiores) dentro de $\widehat{\Sigma}$.
3. $E(\Sigma)$ es totalmente desconexo como subespacio de $\widehat{\Sigma}$.
4. $\widehat{\Sigma}$ es compacto.
5. Si $V \subseteq \widehat{\Sigma}$ es abierto y conexo, entonces $V \setminus E(\Sigma)$ es conexo.

El espacio $\widehat{\Sigma}$ recibe el nombre de *compactación de Freudenthal* de la superficie Σ . La demostración del Teorema de Clasificación de Superficies no Compactas (debida a I. Richards [Ric63]) se apoya de manera fundamental en la estructura topológica de esta compactación.

Problema 1.3.14. 1. Demostrar el Teorema 1.3.13.

2. Demostrar que $\widehat{\Sigma}$ es la única compactación de Σ (salvo homeomorfismo) que satisface las propiedades del Teorema 1.3.13 (véase [Ray60, Teorema 1.8] o [AS60, Teorema 36.B]).

1.3.2. Género de una superficie no compacta

A diferencia del caso compacto, la característica de Euler no puede definirse de manera directa para superficies no compactas generales, ya que toda triangulación de una superficie no compacta consta de una cantidad infinita numerable de triángulos (véase el Problema 1.2.16). No obstante, la noción de género para superficies compactas (Definición 1.2.26) admite una extensión natural que proporciona un invariante topológico fundamental en el estudio de superficies no compactas.

Definición 1.3.15 (Género de una superficie). El *género* de una superficie topológica Σ , denotado por $g(\Sigma)$, se define como:

$$g(\Sigma) := \sup\{g(A) \mid A \subseteq \Sigma \text{ es una subsuperficie compacta}\} \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}.$$

Observación 1.3.16. Observemos que el supremo anterior se toma sobre la familia de subsuperficies compactas $A \subseteq \Sigma$ con frontera compacta ∂A . Si Σ es una superficie no orientable, contiene subsuperficies compactas no orientables (como la banda de Möbius), las cuales poseen género no nulo. En consecuencia, si $g(\Sigma) = 0$, ninguna subsuperficie de Σ puede ser no orientable ni contener asas, por lo que **toda superficie de género cero es necesariamente orientable**.

Proposición 1.3.17 (Invariancia topológica del género). *Si Σ_1 y Σ_2 son superficies topológicas homeomorfas, entonces $g(\Sigma_1) = g(\Sigma_2)$.*

Problema 1.3.18. 1. Calcular el género de cada una de las superficies no compactas presentadas en el Ejemplo 1.3.1.

2. Sea Σ una superficie compacta y sea $C \subset \text{int}(\Sigma)$ un subconjunto cerrado homeomorfo al espacio de Cantor $2^{\mathbb{N}}$. Demostrar que:

$$g(\Sigma \setminus C) = g(\Sigma).$$

1.3.3. Espacios de fines acumulados por género y de fines no orientables

En esta sección introducimos otros dos invariantes topológicos de una superficie no compacta: el *espacio de fines acumulados por género* y el *espacio de fines no orientables*. Ambos subespacios caracterizan modos particulares en los que una superficie se aproxima al infinito. El primero detecta los fines que acumulan género infinito (ya sea orientable o no orientable), mientras que el segundo identifica aquellos fines que son aproximados por género no orientable.

Definición 1.3.19 (Fin plano, orientable y no orientable). Sea $p^* \in E(\Sigma)$ un fin representado por el prefin $p = (P_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Se dice que p^* :

- es *plano* si existe algún $n \geq 1$ tal que la región no acotada P_n tiene género nulo ($g(P_n) = 0$). En caso contrario, se dice que el fin es *de género infinito* o *acumulado por género*.
- es *orientable* si existe algún $n \geq 1$ tal que la región no acotada P_n es orientable. De lo contrario (es decir, si P_n es no orientable para todo $n \geq 1$), se dice que el fin es *no orientable*.

Definición 1.3.20 (Espacios de fines acumulados por género y no orientables). Dada una superficie Σ :

1. El *espacio de fines acumulados por género*, denotado por $E_{\infty}(\Sigma)$, se define como:

$$E_{\infty}(\Sigma) := \{p^* \in E(\Sigma) \mid p^* \text{ no es plano}\}.$$

2. El *espacio de fines no orientables*, denotado por $E'_{\infty}(\Sigma)$, se define como:

$$E'_{\infty}(\Sigma) := \{p^* \in E(\Sigma) \mid p^* \text{ es no orientable}\}.$$

Dado que todo fin plano es, en particular, orientable (pues toda región de género cero es orientable), se cumple la inclusión

$$E'_{\infty}(\Sigma) \subseteq E_{\infty}(\Sigma) \subseteq E(\Sigma).$$

Intuitivamente, los elementos de $E'_{\infty}(\Sigma)$ son los fines aproximados por una cantidad infinita de gorros cruzados (*cross-caps* o género no orientable), mientras que los elementos del conjunto diferencia $E_{\infty}(\Sigma) \setminus E'_{\infty}(\Sigma)$ corresponden a los fines aproximados por género puramente orientable (asas). En la Figura 1.17 se ilustran estos subespacios de fines en diversas superficies.

Proposición 1.3.21. $E_{\infty}(\Sigma)$ y $E'_{\infty}(\Sigma)$ son subespacios cerrados de $E(\Sigma)$.

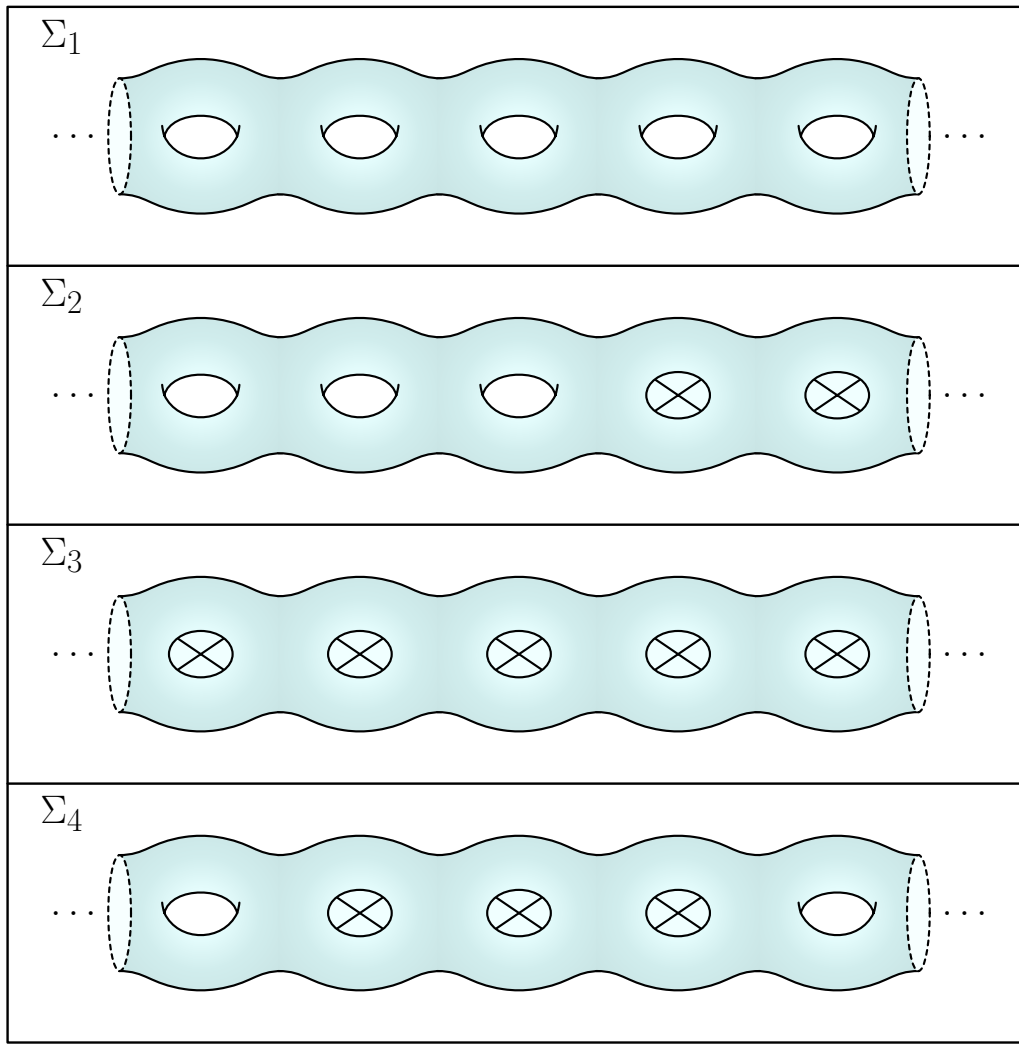


Figura 1.17: La superficie Σ_1 es orientable con exactamente 2 fines, ambos orientables y de género infinito. La superficie Σ_2 es no orientable con 2 fines, uno de los cuales es no orientable. La superficie Σ_3 es no orientable con 2 fines, ambos no orientables. Finalmente, Σ_4 es una superficie no orientable con 2 fines, ambos orientables.

Demostración. Demostremos en primer lugar que el complemento $\mathcal{U} := E(\Sigma) \setminus E_\infty(\Sigma)$ es abierto en $E(\Sigma)$. Sea $\mathbf{p}^* \in \mathcal{U}$. Por definición, $\mathbf{p}^*$ es un fin plano, por lo que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g(P_n) = 0$. Consideremos el entorno abierto $P_n^* \subseteq E(\Sigma)$ de $\mathbf{p}^*$. Dado cualquier otro fin $\mathbf{q}^* \in P_n^*$, existe un representante (Q_m) con $Q_{m_0} \subseteq P_n$ para algún m_0 . Puesto que $g(P_n) = 0$, se deduce que $g(Q_{m_0}) = 0$, de donde $\mathbf{q}^*$ es un fin plano y $\mathbf{q}^* \in \mathcal{U}$. Por tanto, $P_n^* \subseteq \mathcal{U}$, demostrando que $\mathcal{U}$ es abierto y, en consecuencia, $E_\infty(\Sigma)$ es cerrado en $E(\Sigma)$.

Un argumento análogo demuestra que $E(\Sigma) \setminus E'_\infty(\Sigma)$ es abierto: si $\mathbf{p}^*$ es orientable, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que P_n es orientable. Luego, cualquier fin en el entorno P_n^* es también orientable, probando que $E'_\infty(\Sigma)$ es un cerrado en $E(\Sigma)$. $\square$

Proposición 1.3.22 (Invariancia topológica de las cadenas de subespacios de fines). *Si Σ_1 y Σ_2 son superficies topológicas homeomorfas, entonces existe un homeomorfismo $\Phi: E(\Sigma_1) \rightarrow E(\Sigma_2)$ tal que*

$$\Phi(E_\infty(\Sigma_1)) = E_\infty(\Sigma_2) \quad \text{y} \quad \Phi(E'_\infty(\Sigma_1)) = E'_\infty(\Sigma_2).$$

En particular, los triples anidados de espacios topológicos $(E(\Sigma_1), E_\infty(\Sigma_1), E'_\infty(\Sigma_1))$ y

$(E(\Sigma_2), E_\infty(\Sigma_2), E'_\infty(\Sigma_2))$ son homeomorfos.

Invariantes topológicos del Monstruo del Lago Ness

En este apartado calculamos los invariantes topológicos fundamentales de la superficie conocida como el *Monstruo del Lago Ness*.

Proposición 1.3.23 (Invariantes topológicos del Monstruo del Lago Ness). *Sea S el Monstruo del Lago Ness (MLN), definido en el Ejemplo 1.3.3 (ítem 5). Entonces:*

- I) S tiene género infinito: $g(S) = \infty$.
- II) El espacio de fines no orientables es vacío: $E'_\infty(S) = \emptyset$.
- III) S tiene exactamente un fin, el cual es acumulado por género; esto es, $E(S) = E_\infty(S) = \{*\}$.

Demostración. Las propiedades i) e ii) son inmediatas a partir de la definición de S , ya que es una superficie orientable construida agregando recursivamente una cantidad infinitamente numerable de asas.

Para probar iii), demostraremos en primer lugar que S admite un único fin. Consideremos una exhaustión de S dada por una sucesión anidada $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subsuperficies compactas orientables de género n , con una sola componente de frontera, tales que $K_n \subseteq \text{int}(K_{n+1})$ y $S = \bigcup_{n=1}^\infty K_n$ (véase la Figura 1.16 a).

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la región no acotada $P_n := S \setminus K_n$. Puesto que cada $\partial P_n = \partial K_n$ es compacto y $P_1 \supseteq P_2 \supseteq \dots$, la sucesión $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ define un prefin cuyo fin representativo denotamos por $p^* \in E(S)$.

Sea $q^* \in E(S)$ un fin arbitrario representado por un prefin $(Q_m)_{m \in \mathbb{N}}$. Para verificar que $q^* = p^*$, debemos demostrar la equivalencia entre ambos prefines:

1. Dado $n \in \mathbb{N}$, como K_n es compacto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $K_n \cap Q_m = \emptyset$, lo que implica directamente que $Q_m \subseteq S \setminus K_n = P_n$.
2. Recíprocamente, dado $n \in \mathbb{N}$, para ver que existe $m \in \mathbb{N}$ con $P_m \subseteq Q_n$, empleamos el siguiente resultado auxiliar:

Lema 1.3.24. *Si $A \subseteq S$ es un subconjunto compacto, entonces $S \setminus A$ tiene exactamente una componente conexa no acotada.*

Demostración del Lema. Como A es compacto y $(K_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una exhaustión de S , existe un índice N tal que $A \subseteq K_N$. Observamos que $S \setminus K_N$ es una región conexa y no acotada.

Si U es cualquier componente conexa no acotada de $S \setminus A$, debe tener intersección no vacía con el complemento de K_N (de lo contrario, $U \subseteq K_N$, lo cual es imposible pues K_N es compacto). Dado que $S \setminus K_N$ es conexo y está contenido en $S \setminus A$, se deduce que $S \setminus K_N$ debe residir enteramente en una única componente no acotada U_0 de $S \setminus A$. Cualquier otra componente conexa de $S \setminus A$ estará contenida en K_N y, por lo tanto, será acotada. Por consiguiente, U_0 es la única componente no acotada de $S \setminus A$. $\square$

Aplicando el lema al conjunto compacto $A = \partial Q_n$, concluimos que Q_n es la única componente conexa no acotada de $S \setminus \partial Q_n$, lo que implica que el complemento $S \setminus Q_n$ es compacto. En consecuencia, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(S \setminus Q_n) \cap P_m = \emptyset$, es decir, $P_m \subseteq Q_n$.

Así, $p^* = q^*$, probando que $E(S) = \{*\}$. Finalmente, dado que $g(S) = \infty$ y S posee un solo fin, este fin necesariamente satisface $g(P_n) = \infty$ para todo $n \geq 1$. Por lo tanto, no es un fin plano, concluyendo que $E(S) = E_\infty(S) = \{*\}$. $\square$

Problema 1.3.25. Describir el espacio de fines $E(\Sigma)$, el espacio de fines acumulados por género $E_\infty(\Sigma)$ y el espacio de fines no orientables $E'_\infty(\Sigma)$ para cada una de las superficies no compactas del Ejemplo 1.3.1.

1.3.4. Cuatro tipos de orientabilidad

Si una superficie Σ es orientable, su espacio de fines no orientables es necesariamente vacío: $E'_\infty(\Sigma) = \emptyset$. Sin embargo, la condición recíproca no es cierta en general: existen superficies no orientables cuyo espacio de fines no orientables es vacío.

Por ejemplo, sea Σ_1 la superficie obtenida al realizar la suma conexa entre el Monstruo del Lago Ness y el plano proyectivo real $\mathbb{RP}^2$. La superficie Σ_1 es no orientable, posee un único fin acumulado por género ($E_\infty(\Sigma_1) = \{*\}$) y no contiene fines no orientables ($E'_\infty(\Sigma_1) = \emptyset$).

Considere ahora la superficie Σ_2 , construida como la suma conexa del Monstruo del Lago Ness con la botella de Klein $\mathbb{K}$. La superficie Σ_2 es también no orientable, de género infinito, con un único fin acumulado por género y sin fines no orientables ($E'_\infty(\Sigma_2) = \emptyset$).

Notemos que Σ_1 y Σ_2 son ambas superficies no orientables con los mismos espacios de fines asociados; sin embargo, **no son homeomorfas** (véase la Figura 1.18).

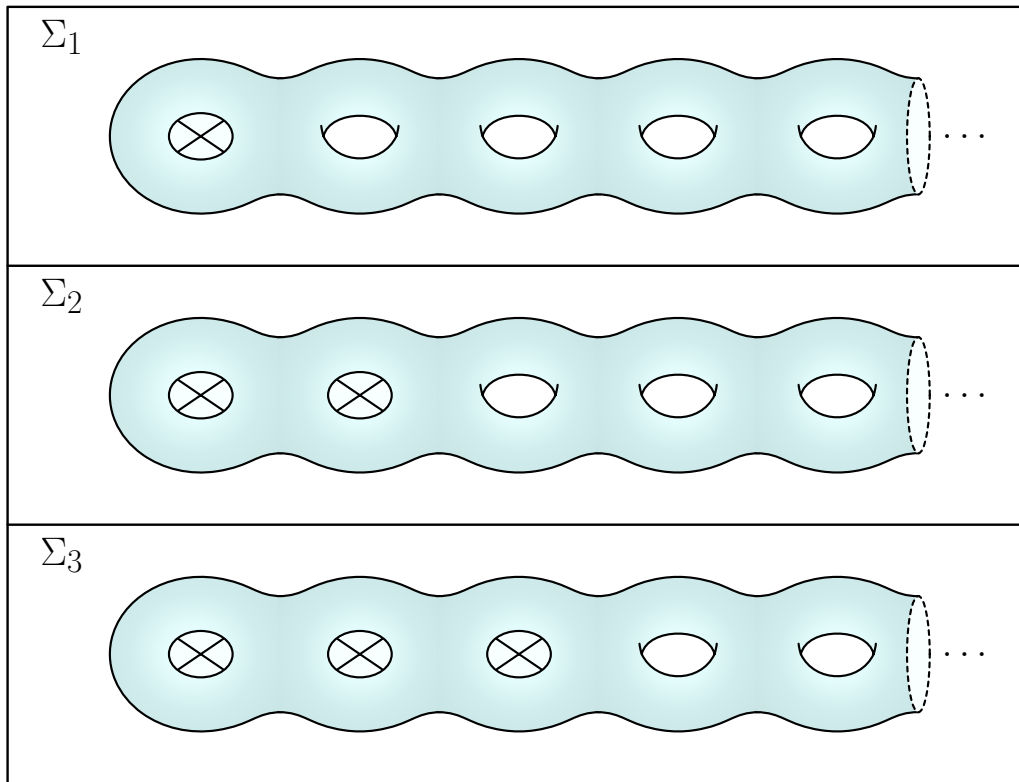


Figura 1.18: Las superficies Σ_1 , Σ_2 y Σ_3 son todas no orientables de género infinito con un solo fin. Las superficies Σ_1 y Σ_2 no son homeomorfas. Las superficies Σ_1 y Σ_3 son homeomorfas.

Problema 1.3.26. Demuestre que las superficies Σ_1 y Σ_2 descritas anteriormente no son homeomorfas.

Para distinguir topológicamente a Σ_1 de Σ_2 , se observa el siguiente hecho: en ambas superficies es posible encontrar una subsuperficie compacta no orientable $K_i \subseteq \Sigma_i$ tal que el complemento $\Sigma_i \setminus K_i$ es una superficie orientable. Sin embargo, no importa qué tan

grande se elija la subsuperficie K_i , el género no orientable $g(K_1)$ es siempre un número **impar** (posee un número impar de gorros cruzados o *cross-caps*), mientras que $g(K_2)$ es siempre **par**. Esta invariancia en la paridad del género de la subsuperficie permite diferenciar sus clases de homeomorfismo.

Por otro lado, sea Σ_3 la superficie obtenida mediante la suma conexa del Monstruo del Lago Ness con la superficie cerrada no orientable N_3 (la suma conexa de 3 planos proyectivos). En este caso, resulta que Σ_1 y Σ_3 son homeomorfas.

Problema 1.3.27. Demuestre que las superficies Σ_1 y Σ_3 son homeomorfas.

En efecto, toda subsuperficie compacta $K_3 \subseteq \Sigma_3$ con complemento orientable satisface que su género no orientable $g(K_3)$ es impar. Dado que es posible sustituir 3 gorros cruzados (*cross-caps*) por 1 gorro cruzado y 1 toro (Problema 1.1.22), la parte orientable de género infinito del Monstruo del Lago Ness «absorbe» los toros adicionales, concluyendo que $\Sigma_3 \cong \Sigma_1$.

Estas observaciones motivan la siguiente clasificación general de la orientabilidad para superficies no compactas.

Definición 1.3.28 (Los cuatro tipos de orientabilidad). Decimos que una superficie topológica Σ es:

1. *Orientable*: si la superficie Σ es orientable.
2. *No orientable impar*: si Σ es no orientable, su espacio de fines no orientables es vacío ($E'_\infty(\Sigma) = \emptyset$) y existe una subsuperficie compacta no orientable $K \subseteq \Sigma$ con complemento $\Sigma \setminus K$ orientable tal que su género no orientable $g(K)$ es impar.
3. *No orientable par*: si Σ es no orientable, su espacio de fines no orientables es vacío ($E'_\infty(\Sigma) = \emptyset$) y existe una subsuperficie compacta no orientable $K \subseteq \Sigma$ con complemento $\Sigma \setminus K$ orientable tal que su género no orientable $g(K)$ es par.
4. *Infinitamente no orientable*: si Σ es no orientable y no admite ninguna subsuperficie compacta con complemento orientable; es decir, para toda subsuperficie compacta $K \subseteq \Sigma$, el complemento $\Sigma \setminus K$ contiene al menos una componente no orientable (equivalentemente, $E'_\infty(\Sigma) \neq \emptyset$).

Cada superficie pertenece exactamente a uno de los cuatro tipos de orientabilidad descritos.

Observación 1.3.29. En las definiciones 2 y 3, la propiedad de que el género no orientable $g(K)$ sea par o impar no depende de la elección particular de la subsuperficie K : si K' es otra subsuperficie compacta con complemento orientable, la diferencia $g(K') - g(K)$ es un número par (correspondiente al género orientable de las asas contenidas en $K' \setminus K$). Por lo tanto, la paridad es un invariante bien definido de la superficie Σ .

Proposición 1.3.30 (Invariancia topológica del tipo de orientabilidad). Sean Σ_1 y Σ_2 dos superficies topológicas homeomorfas. Entonces Σ_1 y Σ_2 pertenecen al mismo tipo de orientabilidad.

1.3.5. El Teorema de Clasificación de Superficies

En esta sección presentamos el resultado central del capítulo: el Teorema de Clasificación de Superficies (TCS), derivado originalmente por I. Richards [Ric63]. Este teorema establece que los invariantes topológicos introducidos previamente —el género, el número de componentes de frontera, el tipo de orientabilidad y la cadena de subespacios de fines— caracterizan de manera completa a las superficies topológicas (orientables o no) con frontera compacta, salvo homeomorfismo. Para una exposición detallada y expandida de la demostración en español, recomendamos consultar [RP21].

Teorema 1.3.31 (Teorema de Clasificación de Superficies de Kerékjártó–Richards). *Sean Σ_1 y Σ_2 dos superficies topológicas conexas con frontera compacta. Entonces Σ_1 es homeomorfa a Σ_2 si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

- I) Σ_1 y Σ_2 tienen el mismo tipo de orientabilidad (según la Definición 1.3.4).
- II) Tienen el mismo género ($g(\Sigma_1) = g(\Sigma_2)$) y el mismo número finito de componentes de frontera ($b(\Sigma_1) = b(\Sigma_2)$).
- III) Existe un homeomorfismo de triples de espacios topológicos

$$\phi: (E(\Sigma_1), E_\infty(\Sigma_1), E'_\infty(\Sigma_1)) \longrightarrow (E(\Sigma_2), E_\infty(\Sigma_2), E'_\infty(\Sigma_2)),$$

es decir, un homeomorfismo $\phi: E(\Sigma_1) \rightarrow E(\Sigma_2)$ tal que $\phi(E_\infty(\Sigma_1)) = E_\infty(\Sigma_2)$ y $\phi(E'_\infty(\Sigma_1)) = E'_\infty(\Sigma_2)$.

Bosquejo de la demostración. La necesidad de estas condiciones es consecuencia directa de la invariancia topológica de cada uno de los elementos involucrados. Para demostrar la suficiencia, se parte de un homeomorfismo de triples $\phi: E(\Sigma_1) \rightarrow E(\Sigma_2)$ y se construye un homeomorfismo global $f: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ cuya extensión continua a la compactación de Freudenthal coincide con ϕ al restringirse a la frontera ideal.

La prueba de Richards utiliza la compactación de Freudenthal de cada superficie para construir exhaustiones por subsuperficies compactas $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Σ_1 y $(A'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Σ_2 adaptadas a la topología de los fines. Mediante un proceso inductivo de vaivén (*back-and-forth method*), se definen homeomorfismos $f_n: A_n \rightarrow A'_n$ compatibles en las fronteras, es decir, tales que $f_n|_{A_{n-1}} = f_{n-1}$. El homeomorfismo buscado $f: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ se obtiene como el límite directo (colímite) de la familia de funciones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, la cual extiende de forma continua a ϕ en los fines.

Problema 1.3.32. Utilizar la técnica de vaivén descrita en el bosquejo anterior para probar de manera directa (sin invocar explícitamente el TCS) que existen los siguientes homeomorfismos:

$$\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N} \cong \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z} \cong \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2.$$

Problema 1.3.33. Utilizar el Teorema de Clasificación de Superficies para determinar cuáles de los siguientes pares de superficies son homeomorfas entre sí:

1. La superficie flauta $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N}$ y el plano perforado por enteros $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}$.
2. El Monstruo del Lago Ness y la Escalera de Jacob.
3. La suma conexa de una superficie cerrada orientable de género g , Σ_g , con la superficie flauta $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N}$, comparada con $\Sigma_g \setminus P$, donde $P \subset \text{int}(\Sigma_g)$ es un conjunto discreto y numerablemente infinito de puntos.

4. Sean $\Sigma_1 = \text{MLN} \# \mathbb{RP}^2$ (Monstruo del Lago Ness sumado con un plano proyectivo) y $\Sigma_2 = \text{MLN} \# \mathbb{K}$ (Monstruo del Lago Ness sumado con la botella de Klein). Clasificar sus tipos de orientabilidad y verificar si son o no homeomorfas.
5. De las superficies descritas en la Figura 1.19, determinar cuáles pertenecen a la misma clase de homeomorfismo.

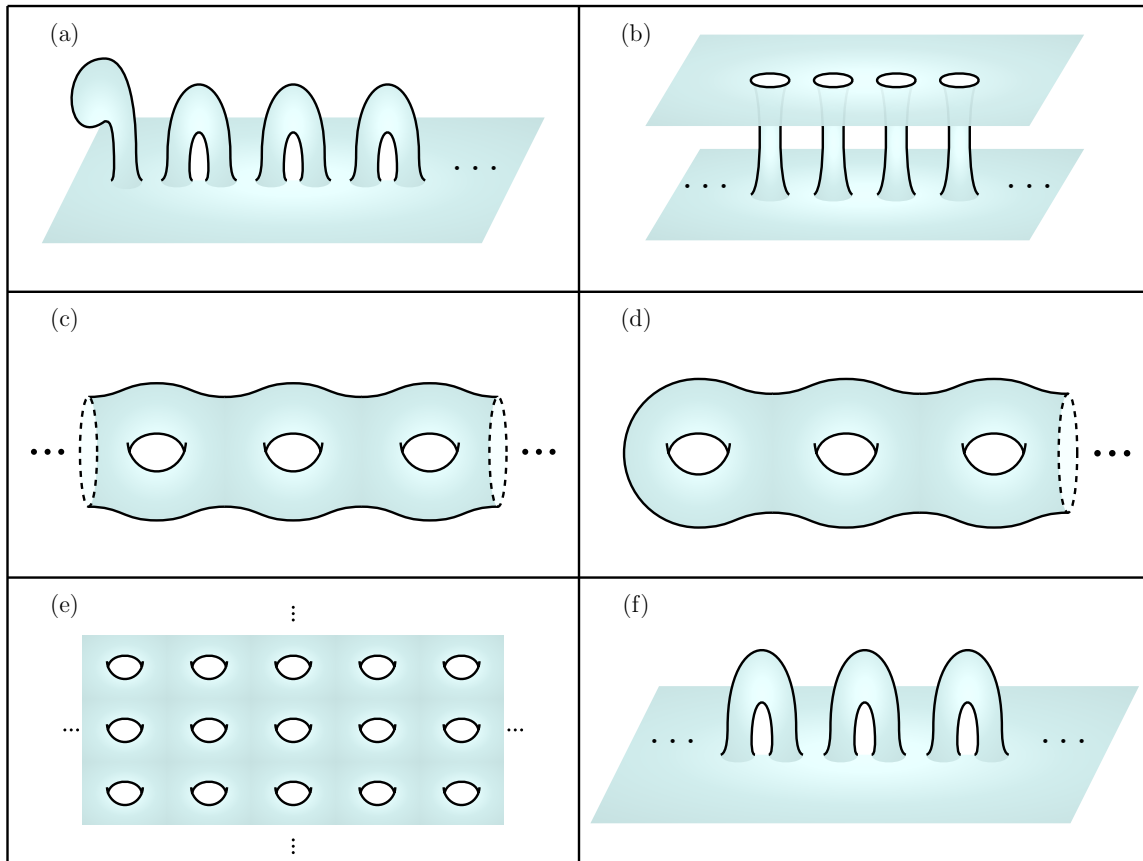


Figura 1.19: Ejemplos de superficies no compactas para clasificar.

Problema 1.3.34. Una curva cerrada simple $\alpha \subset \Sigma$ se dice *no separadora* si la subsuperficie $\Sigma \setminus \alpha$ es conexa. Demostrar que si α y β son dos curvas cerradas simples no separadoras en una superficie no compacta Σ de género no nulo, entonces existe un homeomorfismo $f: \Sigma \rightarrow \Sigma$ tal que $f(\alpha) = \beta$.

Superficies de tipo finito e infinito

Definición 1.3.35 (Superficie de tipo finito e infinito). Una superficie topológica Σ es de *tipo finito* si su grupo fundamental $\pi_1(\Sigma)$ es finitamente generado. En caso contrario, se dice que Σ es una superficie de *tipo infinito*.

Toda superficie compacta es de tipo finito; sin embargo, existen superficies no compactas que también lo son (por ejemplo, el plano $\mathbb{R}^2$ o el disco pinchado $\mathbb{D}^2 \setminus \{0\}$). A partir del Teorema de Clasificación de Superficies (TCS), se deduce que la finitud de los invariantes topológicos básicos caracteriza de forma precisa este comportamiento.

Problema 1.3.36. Demuestre que una superficie Σ con frontera compacta es de tipo finito si y solo si su género $g(\Sigma)$, el número de componentes de frontera $b(\Sigma)$ y el espacio de fines $E(\Sigma)$ son finitos. En particular, concluya que el tipo de orientabilidad junto con los tres enteros (g, b, n) , donde $n = |E(\Sigma)|$, determinan por completo la clase de homeomorfismo de cualquier superficie de tipo finito.

Como consecuencia del Teorema 1.3.31 y del Problema 1.3.36, las superficies de tipo finito están completamente clasificadas hasta homeomorfismo por cuatro invariantes: el tipo de orientabilidad, el género $g \geq 0$ (o género no orientable $h \geq 1$), el número de componentes de frontera $b \geq 0$ y el número de fines $n \geq 0$. Geométricamente, cada fin plano en una superficie de tipo finito se interpreta como la remoción de un punto del interior de una superficie compacta, razón por la cual se les denomina habitualmente *pinchaduras* (*punctures*).

Notación 1.3.37. Denotamos por $S_{g,b}^n$ a la única superficie orientable (salvo homeomorfismo) de género $g \geq 0$, con $b \geq 0$ componentes de frontera y $n \geq 0$ pinchaduras (fines). Análogamente, $N_{h,b}^n$ denota a la única superficie no orientable de género no orientable $h \geq 1$, con $b \geq 0$ componentes de frontera y $n \geq 0$ pinchaduras. Cuando no hay pinchaduras ($n = 0$), escribimos simplemente $S_{g,b}^0 = S_{g,b}$ y $N_{h,b}^0 = N_{h,b}$.

Así, toda superficie de tipo finito con frontera compacta es topológicamente equivalente a exactamente un elemento de la siguiente unión disjunta:

$$\mathcal{S}_{\text{finito}} = \{S_{g,b}^n \mid g \geq 0, b \geq 0, n \geq 0\} \sqcup \{N_{h,b}^n \mid h \geq 1, b \geq 0, n \geq 0\}.$$

Clasificación de superficies con frontera no compacta. Un marco más general abarca las superficies cuyas componentes de frontera pueden ser no compactas (homeomorfas a la recta real $\mathbb{R}$).

Cuando todas las componentes de frontera son compactas (círculos S^1), pero hay una cantidad infinita de ellas, Richards [Ric63] mostró que la clasificación requiere incorporar un nuevo invariante topológico: el *espacio de fines acumulados por componentes de frontera*, denotado por $E_b(\Sigma) \subseteq E(\Sigma)$, el cual captura los fines aproximados por una sucesión infinita de círculos frontera (véase la Figura 1.20).

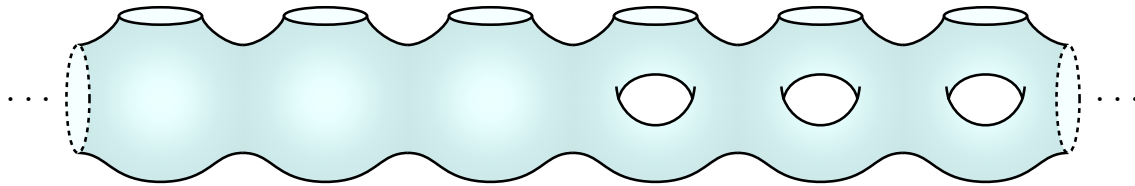


Figura 1.20: Superficie orientable Σ con dos fines. Ambos fines están acumulados por componentes de frontera compactas (círculos), y el fin superior está además acumulado por género orientable.

Para el caso general en que existen componentes de frontera no compactas, la clasificación completa fue lograda por Brown y Messer [BM79]. El ejemplo más elemental de esta familia se obtiene al remover un punto del borde del disco cerrado $\overline{\mathbb{D}^2}$. Si en su lugar se remueve un conjunto de Cantor de la frontera de $\overline{\mathbb{D}^2}$, se obtiene una superficie con frontera no compacta cuyo espacio de fines es homeomorfo al espacio de Cantor, con cada fin siendo plano.

Otro ejemplo clásico surge al cortar el Monstruo del Lago Ness a lo largo de un rayo l , obteniendo el llamado *Monstruo del Lago Ness cortado* (*sliced Loch Ness Monster*, véase

la Figura 1.21). Esta superficie es orientable, posee un único fin (el cual está acumulado tanto por género como por la frontera no compacta) y su frontera consta de una única componente no compacta homeomorfa a $\mathbb{R}$.

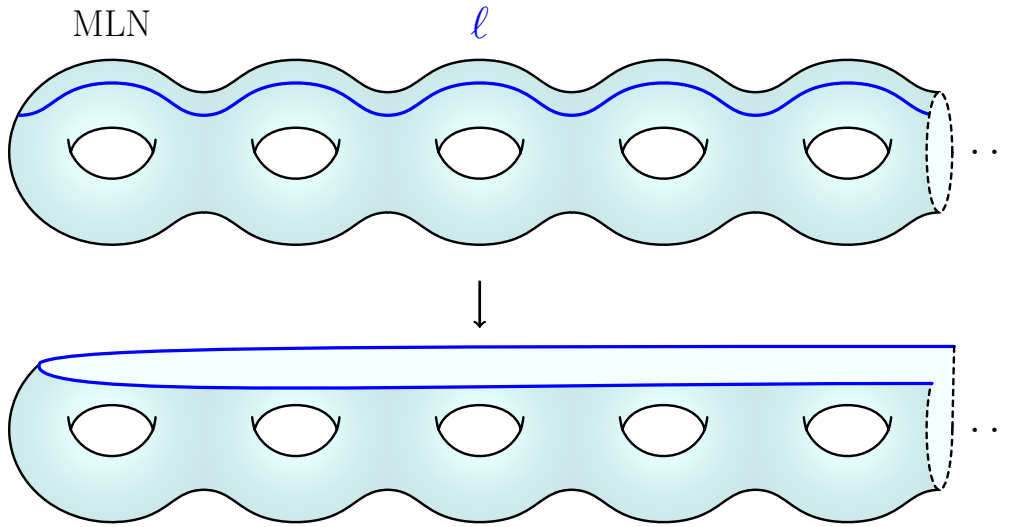


Figura 1.21: Al cortar el Monstruo del Lago Ness a lo largo del rayo l , se obtiene el *Monstruo del Lago Ness cortado*. La superficie es orientable y posee un único fin acumulado por género. Su única componente de frontera es no compacta y homeomorfa a la recta real $\mathbb{R}$.

En la teoría general de Brown–Messer, para distinguir estas superficies es necesario registrar cómo se relacionan los fines de las componentes de frontera con los fines de la superficie misma. Esto se formaliza mediante la función de inclusión de fines $e: E(\hat{\partial}\Sigma) \rightarrow E(\Sigma)$, donde $\hat{\partial}\Sigma$ denota la unión disjunta de todas las componentes no compactas de $\partial\Sigma$. La función e asigna a cada fin de una componente de frontera el único fin de la superficie hacia el cual converge; para un tratamiento riguroso véase [BM79] o [Dic23, Sección 3.1].

Nota histórica sobre el TCS no compactas. El primer intento de enunciar y demostrar el Teorema de Clasificación de Superficies no compactas fue realizado por B. Kerékjártó en 1923 [Ker23]. No obstante, su demostración contenía vacíos significativos debido a la falta de herramientas topológicas adecuadas para tratar el infinito. En 1931, H. Freudenthal [Fre31] introdujo formalmente la teoría de fines con el propósito de construir compactaciones de espacios topológicos conexos por trayectorias. Finalmente, en 1963, I. Richards [Ric63] utilizó el marco de Freudenthal para proporcionar la primera demostración rigurosa y completa del TCS para superficies con frontera compacta.

Bibliografía

- [AS60] Lars V. Ahlfors and Leo Sario. *Riemann Surfaces*, volume 26 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1960.
- [BM79] Edward M. Brown and Robert Messer. The classification of two-dimensional manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 255:377–402, 1979.
- [Bra21] Henry Roy Brahana. Systems of circuits on two-dimensional manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 23(2):144–168, 1921.
- [Bre93] Glen E. Bredon. *Topology and Geometry*, volume 139 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [Dic23] Ryan Dickmann. Mapping class groups of surfaces with noncompact boundary components. *Algebraic & Geometric Topology*, 23(6):2777–2821, 2023.
- [Eng89] Ryszard Engelking. *General Topology*, volume 6 of *Sigma Series in Pure Mathematics*. Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
- [Fre31] Hans Freudenthal. Über die Enden topologischer Räume und Gruppen. *Math. Z.*, 33(1):692–713, 1931.
- [Ful95] William Fulton. *Algebraic Topology: A First Course*, volume 153 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [FW99] George K. Francis and Jeffrey R. Weeks. Conway’s ZIP proof. *Amer. Math. Monthly*, 106(5):393–399, 1999.
- [GX12] Jean Gallier and Dianna Xu. A guide to the classification theorem for compact surfaces. Lecture Notes, University of Pennsylvania, 2012.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [Ker23] Béla Kerékjártó. *Vorlesungen über Topologie: I. Flächentopologie*. Springer, Berlin, 1923.
- [Kin93] Laura Christine Kinsey. *Topology of Surfaces*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [Moi77] Edwin E. Moise. *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*, volume 47 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1977.
- [Mun75] James R. Munkres. *Topology: A First Course*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1975.
- [Rad25] Tibor Radó. Über den Begriff der Riemannschen Fläche. *Acta Litt. Sci. Szeged*, 2:101–121, 1925.
- [Ray60] Frank Raymond. The end point compactification of manifolds. *Pacific J. Math.*, 10(3):947–963, 1960.
- [Ric63] Ian Richards. On the classification of noncompact surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 106(2):259–269, 1963.
- [RP21] Kevin J. Rodríguez Portillo. Teorema de clasificación de superficies no compactas. Master’s thesis, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, México, 2021.
- [Spi70] Michael D. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, volume 1. Publish or Perish, Inc., Boston, MA, 1970.
- [SS14] Saul Stahl and Catherine Stenson. *Introduction to Topology and Geometry*. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2nd edition, 2014.
- [ST80] Herbert Seifert and William Threlfall. *A Textbook of Topology*. Academic Press, New York-London, 1980. Translated by Michael A. Goldman.