

Presentando al toro y sus simetrías

Rita Jiménez Rolland
Juanita Claribel Santiago

2 de mayo de 2022

El *toro* es la superficie que resulta de hacer girar una circunferencia alrededor de un eje que no la corta. Varios objetos cotidianos tienen forma de toro: la dona (hueca), el aro salvavidas, una cámara de llanta, etc. La palabra “toro” proviene del latín¹ *torus*, que significa protuberancia o elevación curva.

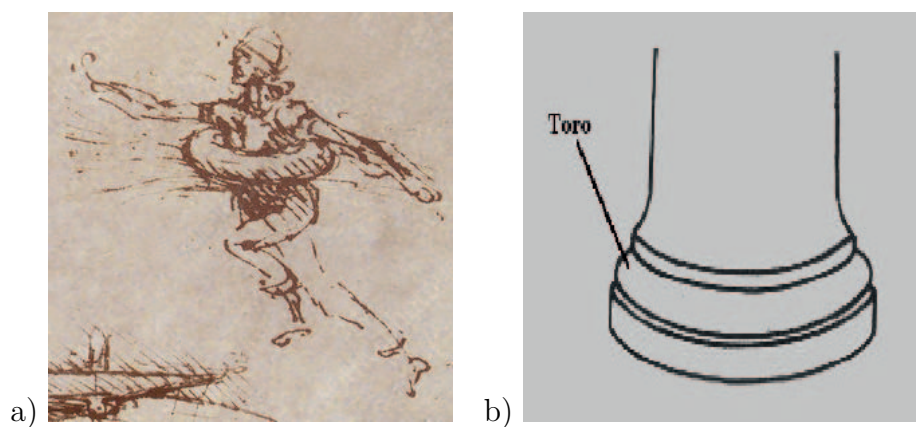


Figura 1: a) Salvavidas con forma de toro. b) En arquitectura, el toro es una moldura redondeada de la base de una columna.

En este artículo estamos interesados en estudiar el toro como objeto topológico y a sus simetrías. Un grupo que captura estas simetrías es el *grupo modular del toro* que definiremos en la Sección 2 y probaremos que es isomorfo

¹Otra acepción común, muy distinta, de “toro” proviene de la raíz latina *taurus*.

al grupo especial lineal $SL_2(\mathbb{Z})$. En particular, estudiaremos conjuntos generadores en la Sección 3 y describiremos una presentación del grupo modular del toro en la Sección 4.

La perspectiva que hemos elegido sirve de punto de partida al estudio de los *grupos modulares de superficies*, llamados ‘*mapping class groups*’ en inglés. Estos grupos capturan las simetrías de las superficies topológicas. De hecho, varias de las propiedades que serán mencionadas, así como las técnicas usadas para las demostraciones de las mismas, se generalizan a grupos modulares de superficies compactas de género mayor.

En nuestra exposición asumimos familiaridad con nociones básicas de topología de conjuntos, teoría de grupos, grupo fundamental y teoría de cubrientes.

1. El toro topológico

Empezaremos por introducir nuestro objeto de interés. Consideremos los siguientes espacios topológicos:

- a) La superficie de revolución obtenida al hacer girar una circunferencia alrededor de un eje que no la corta; ver Figura 2. Esta superficie está contenida en $\mathbb{R}^3$ y es un espacio topológico con la topología de subespacio. Consideramos una circunferencia de radio r en el plano xz con centro $(R, 0, 0)$ y la giramos alrededor del eje z , entonces las ecuaciones paramétricas que definen a esta superficie son $x = \cos \theta \cdot (R + r \cos \varphi)$, $y = \sin \theta \cdot (R + r \cos \varphi)$ y $z = r \sin \varphi$, donde $0 < r < R$ y $\theta, \varphi \in [0, 2\pi)$.

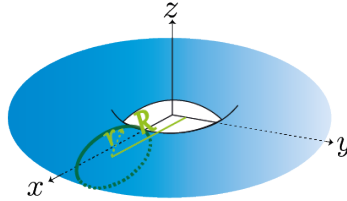


Figura 2: El toro como superficie de revolución.

- b) El cuadrado con lados opuestos identificados y la topología cociente. Es decir, $[0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$ módulo la relación de equivalencia, donde $(0, t) \sim (1, t)$ y $(t, 0) \sim (t, 1)$ si $0 \leq t \leq 1$ y también $(s, t) \sim (s, t)$ si $s, t \neq 0, 1$. Ver Figura 3.

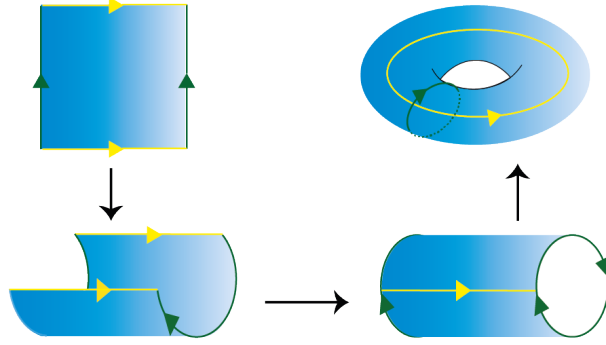


Figura 3: Cuadrado con lados opuestos identificados.

- c) El espacio de $\mathbb{Z}^2$ -órbitas $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. El grupo $\mathbb{Z}^2$ actúa libremente en el plano $\mathbb{R}^2$ vía

$$(n, m) \cdot (x, y) = (x + n, y + m), \text{ donde } (n, m) \in \mathbb{Z}^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Consideramos al conjunto de órbitas $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ con la topología cociente. La proyección natural

$$p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \quad \text{dada por } p(x, y) = [(x, y)] \quad (1)$$

es una función cubriente² regular con grupo de transformaciones cubrientes $\text{Deck}(p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z}^2$. Ver Figura 4.

- d) El espacio $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ con la topología producto, donde la circunferencia $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ tiene la topología de subespacio.

²La función p es *cubriente*, es decir, es una función continua y sobreyectiva tal que para todo $[(x, y)] \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ existe una vecindad abierta U con $p^{-1}(U) \approx \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n$, donde $p|_{V_n} : V_n \rightarrow U$ es un homeomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Dado que $\mathbb{R}^2$ es simplemente conexo (tiene grupo fundamental trivial), es el *cubriente universal* de $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ y p es una función cubriente regular. Para más información sobre teoría de espacios cubrientes ver [Mu02, Capítulos 9 & 13] y [Ha02, Sección 1.3].

Todos los espacios topológicos descritos anteriormente son homeomorfos (¿puedes probarlo?). Llamaremos *toro topológico* o *toro* a cualquiera de las descripciones anteriores y lo denotaremos por $\mathbb{T}^2$. El toro es un ejemplo de *superficie topológica*: es un espacio topológico localmente homeomorfo³ a $\mathbb{R}^2$, Hausdorff, segundo numerable y conexo. Además, $\mathbb{T}^2$ es orientable (no tiene una banda de Möbius encajada), compacto y es una superficie sin frontera.

Las superficies topológicas compactas están clasificadas en clases de homeomorfismo. El *teorema de clasificación de superficies compactas* establece que toda superficie compacta, orientable y sin frontera es homeomorfa a la esfera o a Σ_g , la *suma conexa*⁴ de un número finito $g \geq 1$ de toros topológicos. Recomendamos al lector el artículo de Zeeman [Ze66] para una introducción amigable del tema (ver también [Mu02, Capítulo 12]). En esta clasificación el toro $\mathbb{T}^2$ es Σ_1 , la superficie orientable estándar de género $g = 1$.

En la siguiente sección será útil considerar la descripción del inciso c) del toro, donde $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Esta perspectiva nos permite un análisis de las simetrías de $\mathbb{T}^2$ al plano $\mathbb{R}^2$ a través de la función cubriente $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ descrita en (1).

Definición 1.1. Una **curva cerrada en el toro** $\mathbb{T}^2$ es una función continua

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^2 \text{ tal que } \gamma(0) = \gamma(1).$$

Si además la función γ es inyectiva en $(0, 1)$, entonces decimos que γ es una **curva cerrada simple** (c.c.s.). Abusando de la notación, γ denotará en ocasiones a la función y en otras a su imagen en $\mathbb{T}^2$.

Sea $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, definimos la curva $\ell_{(n,m)} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, donde

$$\ell_{(n,m)}(t) = t(n, m) \text{ para cada } t \in [0, 1]$$

y con la función cubriente $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, definimos la curva $\gamma_{(n,m)} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^2$ dada por

$$\gamma_{(n,m)}(t) = p \circ \ell_{(n,m)}(t) \text{ para cada } t \in [0, 1]. \text{ Ver Figura 4.}$$

³Para todo punto en $\mathbb{T}^2$ existe una vecindad abierta homeomorfa a $\mathbb{R}^2$. De las descripciones anteriores del toro no es difícil probar que esta propiedad se satisface.

⁴Una *suma conexa* de dos superficies es la superficie obtenida tras eliminar un disco abierto en cada superficie y ‘pegar’ las fronteras que estas eliminaciones producen (ver [Mu02, Capítulo 12]).

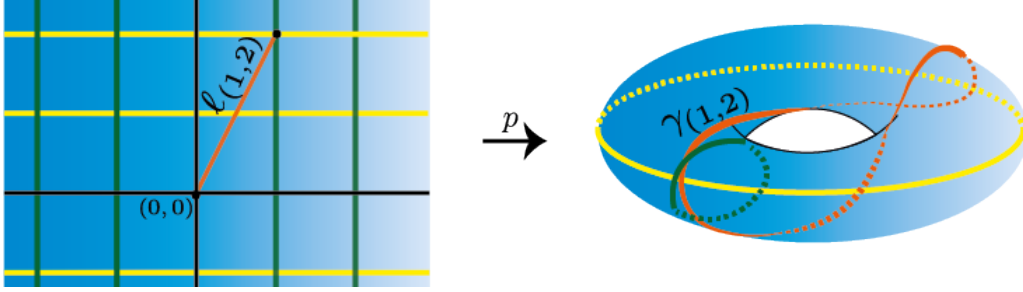


Figura 4: La curva $\ell_{(1,2)}$ en $\mathbb{R}^2$ define, vía la función p , la c.c.s. $\gamma_{(1,2)}$ en $\mathbb{T}^2$.

Definición 1.2. Decimos que $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es **primitivo** si $\text{mcd}(n, m) = 1$.

Como $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, la curva $\gamma_{(n,m)}$ es cerrada. Además, si (n, m) es primitivo, $\gamma_{(n,m)}$ es una c.c.s. en $\mathbb{T}^2$ (¿por qué?). De hecho, puede usarse la teoría de espacios cubrientes para mostrar que se tiene la siguiente biyección:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Elementos primitivos} \\ \text{de } \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Clases de homotopía no triviales} \\ \text{de c.c.s. orientadas en } \mathbb{T}^2 \end{array} \right\} \quad (2)$$

para más detalles ver [FM12, Proposición 1.5].

Tomemos $\mathbf{x}_0 = p(0, 0) = [(0, 0)] \in \mathbb{T}^2$ como punto base. El *grupo fundamental*⁵ del toro está dado por

$$\pi_1(\mathbb{T}^2, \mathbf{x}_0) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} : \mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}^{-1} = 1 \rangle. \quad (3)$$

Este resultado puede obtenerse de la teoría de espacios cubrientes o utilizando el teorema de Seifert-Van Kampen; ver por ejemplo [Mu02, Capítulo 12] y [Ha02, Sección 1.2]. Los generadores preferidos para $\pi_1(\mathbb{T}^2, \mathbf{x}_0)$ serán las clases de homotopía $\mathbf{a} = [\alpha]$ y $\mathbf{b} = [\beta]$ de las curvas $\alpha = \gamma_{(1,0)}$ y $\beta = \gamma_{(0,1)}$, mismas que se ilustran en la Figura 5. El isomorfismo $\pi_1(\mathbb{T}^2, \mathbf{x}_0) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ está dado por $\mathbf{a} \mapsto (1, 0)$ y $\mathbf{b} \mapsto (0, 1)$.

⁵Recordemos que el *grupo fundamental* de un espacio X con punto base $x_0 \in X$, denotado por $\pi_1(X, x_0)$, se define como el conjunto de clases de homotopía de caminos $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ con $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ (curvas cerradas basadas en x_0) con el producto inducido por la concatenación de caminos.

Dos curvas o caminos $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^2$ son *homotópicas* si existe una función continua $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^2$ tal que $H(0, \cdot) = \gamma_1(\cdot)$ y $H(1, \cdot) = \gamma_2(\cdot)$. Si además se tiene $H(t, 0) = H(t, 1) = x_0$ para todo $t \in [0, 1]$, decimos que H es una *homotopía de caminos*. Ver [Mu02, Capítulo 9] o [Ha02, Capítulos 0 & 1].

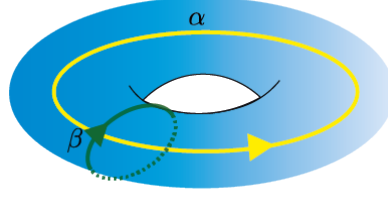


Figura 5: Las clases de homotopía de las curvas α y β generan $\pi_1(\mathbb{T}^2, \mathbf{x}_0)$.

2. Simetrías del toro

Estamos interesados en estudiar las simetrías del toro $\mathbb{T}^2$: las biyecciones del toro que preservan su estructura topológica. Recordemos que un homeomorfismo es una función continua, biyectiva, con inversa continua.

Ejemplos de homeomorfismos del toro.

- i) Si consideramos la descripción del toro como superficie de revolución, las rotaciones a lo largo del eje z definen homeomorfismos de $\mathbb{T}^2$ que preservan la orientación. Ver figura 2.
- ii) La rotación en $\mathbb{R}^2$ por un ángulo de $\pi/2$ con respecto al origen induce una simetría en el toro $\mathbb{T}^2$, vía la función cubriente p . Este homeomorfismo preserva la orientación y tiene orden 4. Asimismo la reflexión en $\mathbb{R}^2$ a lo largo del eje y induce una simetría de orden 2 en el toro, pero ésta no preserva la orientación. ¿Puedes encontrar una simetría del toro de orden 6?
- iii) Sea $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ el disco unitario cerrado. Para cada función $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ continua, estrictamente creciente, donde $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ y $g(t) \rightarrow \infty$ si $t \rightarrow \infty$ (e.g. $g(t) = t^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$), podemos definir el homeomorfismo

$$F_g : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2 \text{ dado por } z \mapsto g(|z|)z,$$

tal que preserva la orientación y es la identidad en la frontera del disco. Encajando el disco $\mathbb{D}^2$ en el toro $\mathbb{T}^2$ (¡hay muchas maneras de hacerlo!), podemos definir un homeomorfismo en $\mathbb{T}^2$ extendiendo a la función F_g por la identidad.

iv) **Giros de Dehn en el toro.** Sea γ una c.c.s. en $\mathbb{T}^2$ con clase de homotopía no trivial y consideremos una vecindad regular⁶ cerrada $N(\gamma)$ de γ , misma que podemos identificar con el anillo $\mathbb{A} := \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ a través de un homeomorfismo φ que preserve la orientación. El *giro de Dehn a lo largo de γ* se define como el homeomorfismo que preserve orientación $T_\gamma : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ dado por

$$T_\gamma(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin N(\gamma) \\ \varphi^{-1} \circ T \circ \varphi(x) & \text{si } x \in N(\gamma), \end{cases}$$

donde $T : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ está dado por $T(e^{2\pi i\theta}, t) = (e^{2\pi i(\theta+t)}, t)$. En particular, consideremos α y β las curvas cerradas simples de la Figura 5. Los giros de Dehn T_α y T_β son homeomorfismos del toro que satisfacen lo siguiente (ver Figura 6):

- El homeomorfismo T_α (resp. T_β) manda a la curva α (resp. β) a una reparametrización de la curva α (resp. β).
- El giro de Dehn T_α (resp. T_β), deja fija a la curva β (resp. α) fuera de la vecindad regular y en la vecindad regular da una vuelta “siguiendo” a α (resp. β) en dirección de la mano derecha.

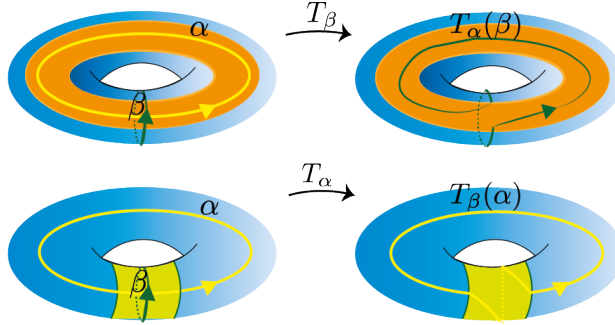


Figura 6: Giros de Dehn T_α y T_β en $\mathbb{T}^2$.

⁶Una *vecindad regular* N de γ en $\mathbb{T}^2$ es una subsuperficie de $\mathbb{T}^2$ que es una vecindad abierta de γ y tal que la inclusión $\iota : \gamma \hookrightarrow N$ es un retracto por deformación fuerte. La vecindad regular cerrada $N(\gamma)$ es la cerradura de N . Puesto que $\mathbb{T}^2$ es orientable, $N(\gamma)$ es homeomorfa al anillo $\mathbb{A}$. Para leer más sobre vecindades regulares ver, por ejemplo, [HZ64] o [Hi94, Sección 4.5] para vecindades regulares suaves.

Notemos que la definición del homeomorfismo T_γ depende de la elección de vecindad regular cerrada $N(\gamma)$, del homeomorfismo φ y de la dirección de las curvas α y β .

Consideremos el conjunto

$$\text{Homeo}(\mathbb{T}^2) = \{F : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 : F \text{ es un homeomorfismo}\}.$$

Este conjunto tiene estructura de grupo con la operación ‘composición de funciones’ y es un grupo topológico con la topología compacto-abierta⁷ (ver por ejemplo [Ar46, Teorema 4]). Centraremos nuestra atención en el subgrupo topológico $\text{Homeo}^+(\mathbb{T}^2)$ de homeomorfismos que preservan la orientación. Como lo ilustran los ejemplos anteriores $\text{Homeo}^+(\mathbb{T}^2)$ es un grupo muy grande. ¿Qué tan distintos son estos homeomorfismos? Consideraremos que dos homeomorfismos son equivalentes si podemos “deformar continuamente” uno en otro. De manera más precisa:

Definición 2.1. Sean $F, G \in \text{Homeo}^+(\mathbb{T}^2)$, diremos que F y G son **isotópicos**, y escribimos $F \sim G$, si existe una isotopía de F a G ; es decir, una función $H : [0, 1] \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ continua tal que

- a) $H(0, \cdot) = F(\cdot)$ y $H(1, \cdot) = G(\cdot)$, i.e. H es una *homotopía* entre F y G .
- b) $H(t, \cdot) : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ es un homeomorfismo que preserva la orientación para toda $t \in [0, 1]$.

Equivalentemente, $F \sim G$ si están en la misma componente arcoconexa de $\text{Homeo}^+(\mathbb{T}^2)$ (¿por qué?). Denotamos por $[F]$ a la clase de isotopía de $F \in \text{Homeo}^+(\mathbb{T}^2)$.

Observación. El grupo topológico $\text{Homeo}^+(\mathbb{T}^2)$ es localmente conexo (ver por ejemplo [Ha58, Teorema 1]). En particular, esto implica que las componentes conexas y componentes arcoconexas coinciden en $\text{Homeo}^+(\mathbb{T}^2)$. Denotamos por $\text{Homeo}_0^+(\mathbb{T}^2)$ a la componente conexa de $\text{Homeo}^+(\mathbb{T}^2)$ que contiene a la función identidad, $\text{id} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$.

⁷La *topología compacto-abierta* es una topología definida en el conjunto de funciones continuas entre dos espacios topológicos. En el caso de $\text{Homeo}(\mathbb{T}^2)$, denotamos por $V(K, U) = \{F \in \text{Homeo}(\mathbb{T}^2) : F(K) \subset U\}$, donde $K, U \subset \mathbb{T}^2$ son conjuntos compacto y abierto, respectivamente. La topología compacto-abierta de $\text{Homeo}(\mathbb{T}^2)$ tiene por subbase a la colección $\{V(K, U) : K \subset \mathbb{T}^2 \text{ compacto y } U \subset \mathbb{T}^2 \text{ abierto}\}$.

Por la observación anterior

$$\text{Homeo}_0^+(\mathbb{T}^2) = \{F \in \text{Homeo}^+(\mathbb{T}^2) : F \sim \text{id}\}.$$

Todos los homeomorfismos de los ejemplos i) y iii) anteriores son isotópicos al homeomorfismo identidad (¿cuáles son las homotopías?), así que pertenecen a $\text{Homeo}_0^+(\mathbb{T}^2)$. El lector puede probar que el conjunto $\text{Homeo}_0^+(\mathbb{T}^2)$ es un subgrupo normal de $\text{Homeo}^+(\mathbb{T}^2)$.

Definición 2.2. El **grupo modular del toro** es el grupo cociente

$$\text{Mod}(\mathbb{T}^2) = \text{Homeo}^+(\mathbb{T}^2) / \text{Homeo}_0^+(\mathbb{T}^2).$$

El grupo $\text{Mod}(\mathbb{T}^2)$ es también llamado *grupo modular de Teichmüller* de $\mathbb{T}^2$ o *grupo de homeotopías* de $\mathbb{T}^2$ y en inglés se conoce con el nombre de *mapping class group* de $\mathbb{T}^2$. Otras notaciones comunes son $MCG(\mathbb{T}^2)$, $MCG(\Sigma_1)$, $\text{Mod}(\Sigma_1)$, Mod_1 , Γ_1 .

Observación: Si consideramos el cociente del grupo $\text{Homeo}^+(\mathbb{T}^2)$ por la relación de equivalencia dada por homotopía (i.e. sólo consideramos la condición a) en la definición 2.1), resulta que obtenemos un grupo isomorfo a $\text{Mod}(\mathbb{T}^2)$; ver por ejemplo [FM12, Teorema 1.12] y las referencias ahí citadas.

En $\text{Mod}(\mathbb{T}^2)$ los giros de Dehn están bien definidos⁸ y sólo dependen de la clase de homotopía de la c.c.s. Denotaremos por $T_{\mathbf{a}}$ y $T_{\mathbf{b}}$ a los giros de Dehn en $\text{Mod}(\mathbb{T}^2)$ correspondientes a las clases $[T_{\alpha}]$ y $[T_{\beta}]$, respectivamente; ver Figura 6.

Con la topología cociente, $\text{Mod}(\mathbb{T}^2)$ es un grupo discreto⁹ (¿por qué?) que captura las simetrías del toro. El grupo $\text{Mod}(\mathbb{T}^2)$ tiene elementos de torsión (¿puedes identificarlos?) y además es isomorfo a un grupo de matrices como describiremos a continuación.

Definición 2.3. El **grupo especial lineal** $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ se define como el conjunto de matrices de tamaño 2×2 con entradas enteras y determinante igual a 1, es decir

$$\text{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\},$$

con la operación dada por la multiplicación usual de matrices.

⁸La clase $[T_{\gamma}]$ en $\text{Mod}(\mathbb{T}^2)$ no depende de la elección de vecindad regular cerrada $N(\gamma)$ y sólo depende del tipo de homotopía de la c.c.s. γ . Esto puede probarse usando la unicidad, hasta por isotopía, de vecindades regulares; ver por ejemplo [Hi94, Teorema 4.5.3] para el caso suave.

⁹Todos los puntos de $\text{Mod}(\mathbb{T}^2)$ son conjuntos abiertos.

Teorema 2.1. *El grupo $Mod(\mathbb{T}^2)$ es isomorfo a $SL_2(\mathbb{Z})$.*

Esbozo de la demostración. Para establecer el resultado definiremos una función de $Mod(\mathbb{T}^2)$ a $SL_2(\mathbb{Z})$ y describiremos los pasos para probar que es un isomorfismo.

Sea $f \in Mod(\mathbb{T}^2)$ y $\mathbf{x}_0 = [(0, 0)] \in \mathbb{T}^2$. Consideremos un representante $F : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ de f tal que $F(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$. El homomorfismo inducido en el grupo fundamental del toro $F_* : \pi_1(\mathbb{T}^2, \mathbf{x}_0) \rightarrow \pi_1(\mathbb{T}^2, \mathbf{x}_0)$ es un isomorfismo.

La elección de generadores preferidos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ para $\pi_1(\mathbb{T}^2, \mathbf{x}_0)$ en el isomorfismo (3) nos permite asociar a F_* una matriz invertible A_F en $GL_2(\mathbb{Z})$. Las columnas de la matriz A_F son los elementos primitivos que corresponden a $F_*(\mathbf{a})$ y $F_*(\mathbf{b})$, respectivamente (usando la biyección (2)).

Consideremos la función

$$\phi : Mod(\mathbb{T}^2) \rightarrow GL_2(\mathbb{Z}) \text{ dada por } f = [F] \mapsto A_F.$$

La función ϕ está bien definida. Dados dos homeomorfismos F_1 y F_2 de $\mathbb{T}^2$, que fijan el punto base $\mathbf{x}_0$, tales que $f = [F_1] = [F_2] \in Mod(\mathbb{T}^2)$, existe una homotopía entre éstos (y puede escogerse tal que fije el punto base $\mathbf{x}_0$ para todo $t \in [0, 1]$). Entonces los isomorfismos inducidos en grupo fundamental son iguales y $A_{F_1} = A_{F_2}$.

La función ϕ es un homomorfismo de grupos. Sean $f, g \in Mod(\mathbb{T}^2)$ y sean F, G homeomorfismos representantes de f y g respectivamente, tales que $F(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ y $G(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$. Puesto que $(G \circ F)_* = G_* \circ F_*$, la matriz asociada a la composición es el producto de las matrices asociadas a cada una de las funciones y por lo tanto ϕ es un homomorfismo.

La imagen de ϕ es tal que $Im(\phi) \subseteq SL_2(\mathbb{Z})$. Sea $f \in Mod(\mathbb{T}^2)$ y sea F un homeomorfismo tal que $[F] = f$. Entonces F preserva la orientación y el número de intersección algebraico. Para $\mathbb{T}^2$, el *número de intersección algebraico*¹⁰ es una forma bilineal antisimétrica $\hat{\iota}(\cdot, \cdot)$ en $\pi_1(\mathbb{T}^2, \mathbf{x}_0)$. Informalmente, cuenta los puntos de intersección signados de dos clases de homotopía de c.c.s. orientadas y es preservado por homeomorfismos que preservan la orientación. Luego, puede probarse que si $\phi(f) = A_F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces

$$1 = \hat{\iota}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \hat{\iota}(F_*(\mathbf{a}), F_*(\mathbf{b})) = \hat{\iota}((a, b), (c, d)) = ad - bc.$$

Las clases de homotopía $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ tienen la orientación inducida por la orientación usual de $\mathbb{R}^2$. La última igualdad se demuestra utilizando teoría de

¹⁰Para una definición formal ver por ejemplo [FM12, Secciones 1.2.3 & 6.1].

espacios cubrientes y la correspondencia (2). Así, concluimos que $\det A_F = 1$ y por ende $\phi(f) = A_F \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

La función ϕ es sobreyectiva en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Sea $D = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, definimos

$$\tilde{F}_D : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ dado por } (x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy).$$

La función $\tilde{F}_D$ es un homeomorfismo y satisface

$$\tilde{F}_D \circ T_{(n,m)} = T_{(an+bm, cn+dm)} \circ \tilde{F}_D, \text{ para todo } (n, m) \in \mathbb{Z}^2,$$

donde $T_{(n,m)} \in \mathrm{Deck}(p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2)$ está dada por $T_{(n,m)}(x, y) = (x+n, y+m)$. Como $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ es una función cubriente regular podemos definir

$$F_D : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 \text{ dado por } F_D([x, y]) = [(ax + by, cx + dy)].$$

La función F_D es un homeomorfismo que preserva orientación y el siguiente cuadrado

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\tilde{F}_D} & \mathbb{R}^2 \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{F_D} & \mathbb{T}^2 \end{array}$$

conmuta. Luego, $\tilde{F}_D$ es el único levantamiento de F_D tal que $\tilde{F}_D(0, 0) = (0, 0)$. Entonces, $\phi([F_D]) = D$ y se sigue que ϕ es sobreyectiva en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

La función ϕ es inyectiva. Sea $f \in \ker(\phi)$. Tomemos F un representante de f y $\tilde{F}$ el único levantamiento de F tal que $\tilde{F}(0, 0) = (0, 0)$. Debemos probar que $[F] = [\mathrm{id}] \in \mathrm{Mod}(\mathbb{T}^2)$. Consideramos la homotopía $\tilde{U} : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\tilde{U}(t, (x, y)) = \tilde{U}_t(x, y) = (1 - t)\tilde{F}(x, y) + t(x, y).$$

Dado que $A_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se tiene que $T_{(n,m)} \circ \tilde{F} = \tilde{F} \circ T_{(n,m)}$ para toda transformación cubriente $T_{(n,m)}$. Entonces,

$$\tilde{U}_t \circ T_{(n,m)} = T_{(n,m)} \circ \tilde{U}_t, \text{ para todo } t \in [0, 1]$$

y $\tilde{U}$ es el levantamiento de la homotopía $U : [0, 1] \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ entre F y la función $\mathrm{id} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ dada por $U(t, [(x, y)]) = [\tilde{U}_t(x, y)]$. $\square$

Detalles de la prueba completa pueden encontrarse en [Sa20, Capítulo 5]. Una prueba alternativa de la inyectividad puede obtenerse usando el método de Alexander (ver por ejemplo [FM12, Sección 2.2.4]).

Si se consideran todas las simetrías del toro, incluyendo las que revierten orientación, se puede definir el *grupo modular extendido* $\text{Mod}^\pm(\mathbb{T}^2)$. Con un argumento similar al anterior se puede probar que $\text{Mod}^\pm(\mathbb{T}^2) \cong \text{GL}_2(\mathbb{Z})$.

3. Generando las simetrías del toro

En esta sección demostraremos que el grupo $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ es finitamente generado y daremos conjuntos explícitos de matrices generadoras. Finalmente, utilizando el isomorfismo $\text{Mod}(\mathbb{T}^2) \cong \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ de la sección anterior veremos a cuáles simetrías del toro corresponden estos generadores.

En $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$, consideremos las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El grupo $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ actúa en sí mismo por multiplicación izquierda. En particular, para cada $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, las matrices P y A^n actúan en $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ de la siguiente manera:

$$P \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^n \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + nc & b + nd \\ c & d \end{pmatrix}.$$

A continuación veremos cómo podemos usar esta acción para probar que $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ es finitamente generado. Esta prueba está basada en [Co1].

Teorema 3.1. $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ está generado por las matrices A y P .

Demostración. Sean A y P los elementos de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ definidos al principio de la sección, el subgrupo $\langle A, P \rangle_{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}$ está contenido en $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Ahora probemos que si

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}),$$

entonces S puede expresarse en términos de potencias de A y P . Notemos que es suficiente demostrar que cuando A y P actúan en la matriz S por multiplicación izquierda podemos llegar a una matriz T tal que la entrada inferior izquierda es igual a cero. Como $T \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$, entonces tiene entradas enteras y determinante igual a 1, luego

$$T = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad T = \begin{pmatrix} -1 & -n \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y entonces $T = A^n$ ó $T = P^2 A^n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.

Para llegar a la matriz T comparamos los valores absolutos de las entradas inferiores izquierdas. Si $|a| \geq |c|$, entonces por el algoritmo de la división existen $q, r \in \mathbb{Z}$ tales que $a = cq + r$ con $0 \leq |r| < |c|$, luego

$$A^{-q}S = \begin{pmatrix} 1 & -q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - qc & b - qd \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & b - qd \\ c & d \end{pmatrix}$$

donde $A^{-q}S$ tiene la entrada superior izquierda igual o más pequeña en valor absoluto que la entrada inferior izquierda. Aplicamos P y obtenemos que

$$PA^{-q}S = \begin{pmatrix} -c & -d \\ r & b - qd \end{pmatrix}, \text{ donde } |-c| > |r|.$$

Usamos el algoritmo de la división nuevamente en $|-c|$ y $|r|$. Repitiendo el procedimiento un número finito de veces obtendremos la matriz T antes mencionada.

Así, cualquier matriz de $S \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ se puede expresar en términos de las matrices A, P , es decir $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ está contenido en $\langle A, P \rangle_{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}$. $\square$

Ejemplo 3.1. Escribamos a la matriz

$$S = \begin{pmatrix} 13 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$$

en términos de las matrices A y P . Como $13=2(6)+1$, entonces

$$A^{-6}S = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

luego

$$PA^{-6}S = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que $-2=1(-2)+0$, consideramos

$$A^2PA^{-6}S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así la matriz $T = PA^2PA^{-6}S = -Id = P^2$ y tenemos que $S = A^6P^{-1}A^{-2}P$ como deseábamos.

Del Teorema 3.1 sabemos que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \langle A, P \rangle_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ y tenemos que

$$A = P^{-1}Q \quad \text{y} \quad P = (ABA)^{-1}.$$

Además, las matrices P y Q son de orden 4 y 6, respectivamente, y las matrices A y B tienen orden infinito. Entonces, obtenemos los siguientes conjuntos de generadores explícitos para $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Corolario 3.2. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ está generado por las matrices P y Q de orden finito.

Corolario 3.3. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ está generado por matrices A y B de orden infinito.

Finalmente, nos interesa saber a cuáles simetrías del toro corresponden las matrices generadoras. Bajo el isomorfismo $\phi : \mathrm{Mod}(\mathbb{T}^2) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ del Teorema 2.1 resulta que las matrices A y B corresponden a los giros de Dehn de la Figura 6:

$$T_{\mathbf{a}} \mapsto A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T_{\mathbf{b}} \mapsto B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para probarlo se pueden considerar los isomorfismos inducidos en el grupo fundamental por $T_{\mathbf{a}}$ y $T_{\mathbf{b}}$ y obtener la matriz correspondiente. Así podemos concluir lo siguiente.

Teorema 3.4. El grupo modular del toro $\mathrm{Mod}(\mathbb{T}^2)$ está generado por los giros de Dehn $T_{\mathbf{a}}$ y $T_{\mathbf{b}}$.

¿A cuáles simetrías del toro corresponden las matrices de generadoras de orden finito P y Q ?

4. Presentando las simetrías del toro

En esta sección describiremos cómo obtener una *presentación finita*¹¹ del grupo $\mathrm{Mod}(\mathbb{T}^2)$. La estrategia consiste en estudiar la acción de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ en un

¹¹Una *presentación* es una forma de definir un grupo G mediante la especificación de dos conjuntos:

- El conjunto S de *generadores*: todo elemento de G puede expresarse como producto de elementos de S .
- El conjunto R de *relaciones*: definen igualdades entre elementos del grupo G .

árbol particular, el llamado *árbol de Farey*. Las propiedades de esta acción permiten utilizar la teoría de árboles desarrollada por Jean Pierre Serre en [Se77] para obtener una presentación de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ con generadores P y Q , las matrices de orden finito descritas en la sección pasada.

Definición 4.1. La **gráfica de Farey** $\mathcal{F}$ tiene por conjunto de vértices

$$\mathcal{V}(\mathcal{F}) := \left\{ (n, m) \in \mathbb{Z}^2 : (n, m) \text{ es primitivo} \right\} / \sim,$$

donde la relación de equivalencia $\sim$ está dada por $(n, m) \sim (-n, -m)$ para cada $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ y denotamos a cada clase de equivalencia por $\pm(n, m)$. El conjunto de aristas de $\mathcal{F}$ está dado por

$$\mathcal{E}(\mathcal{F}) := \left\{ \{ \pm(p, q), \pm(r, s) \} : \det \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} = \pm 1 \right\}.$$

Para dibujar la gráfica de Farey $\mathcal{F}$ iniciamos con los vértices vecinos $\pm(0, 1)$ y $\pm(1, 0)$ y la arista que los conecta. Notamos que para esa arista existen dos (y sólo dos) vértices de $\mathcal{F}$ adyacentes a ambos, a saber, $\pm(1, -1)$ y $\pm(1, 1)$. En general, para cada arista en $\mathcal{F}$ existen dos (y sólo dos) vértices adyacentes a los vértices finales de esa arista. De este modo vemos que se forman dos triángulos adyacentes a dicha arista (ver Figura 7). Puede probarse también que cada vértice de $\mathcal{F}$ tiene grado infinito. Ver [CM17], [Mu18] y [Sa20, Capítulo 2].

Observación. Otra manera de construir la gráfica de Farey consiste en considerar el *grafo de curvas ‘modificado’* $\mathcal{C}(\mathbb{T}^2)$. Los vértices de $\mathcal{C}(\mathbb{T}^2)$ son clases de homotopía (no triviales) de c.c.s. en $\mathbb{T}^2$ y tenemos una arista entre dos clases de homotopía de c.c.s. $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$ si existen c.c.s representantes γ y τ , respectivamente, que se intersecan exactamente en un punto. Para ver que $\mathcal{C}(\mathbb{T}^2)$ coincide con $\mathcal{F}$ se utiliza la biyección (2). Para leer más sobre complejos de curvas en superficies ver [FM12, Sección 4.1] y [Sc06].

A partir de la gráfica de Farey podemos construir el *complejo de Farey* $\mathcal{C}$. Consideramos a $\mathcal{F}$ como el 1-esqueleto de $\mathcal{C}$, entonces el complejo de Farey se obtiene de adjuntar un triángulo (una 2-celda) por cada tres vértices adyacentes en $\mathcal{F}$. Denotemos por $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ al conjunto de triángulos de $\mathcal{C}$.

De manera más precisa, decimos que un grupo G tiene una presentación $\langle S | R \rangle$ si $G \cong F(S) / \langle\langle R \rangle\rangle$, donde $F(S)$ es el grupo libre generado por S , el conjunto $R \subset F(S)$ y $\langle\langle R \rangle\rangle$ es el subgrupo normal de $F(S)$ generado por R . La presentación $\langle S | R \rangle$ es *finita* si S y R son conjuntos finitos. Para más detalles ver por ejemplo [Lo17, Sección 2.2] o [Mu02, Sección 69].

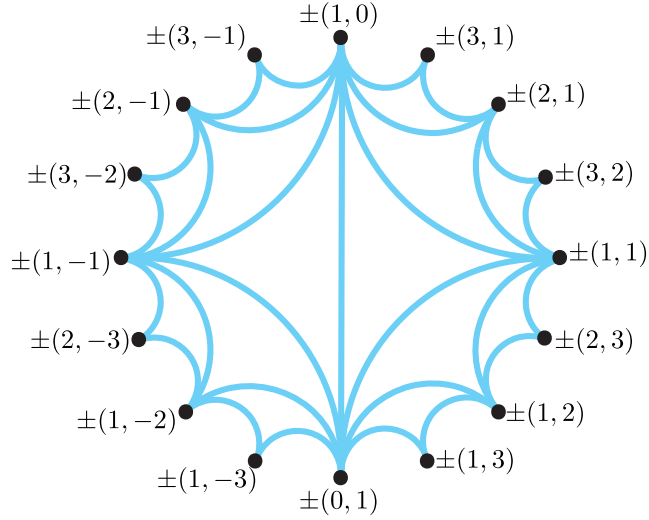


Figura 7: Algunos vértices y aristas de la gráfica de Farey $\mathcal{F}$.

Definición 4.2. El **árbol de Farey** $\mathcal{T}$ se define como la gráfica cuyo conjunto de vértices y conjunto de aristas son

$$\mathcal{V}(\mathcal{T}) = \mathcal{E}(\mathcal{F}) \cup \mathcal{T}(\mathcal{C}) \text{ y } \mathcal{E}(\mathcal{T}) = \{ \{w, t\} : w \in \mathcal{E}(\mathcal{F}), t \in \mathcal{T}(\mathcal{C}) \text{ y } w \subseteq t \},$$

respectivamente. Es decir, los vértices de $\mathcal{T}$ son las aristas de $\mathcal{F}$ y los triángulos de $\mathcal{C}$ y en las aristas de $\mathcal{T}$ conectamos un vértice correspondiente a $w \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$ con un vértice correspondiente a $t \in \mathcal{T}(\mathcal{C})$ siempre que w sea una arista del triángulo t en $\mathcal{C}$.

Denotaremos por $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ a los siguientes vértices del árbol de Farey $\mathcal{T}$:

$$\mathbf{p} = \{ \pm(1,0), \pm(0,1) \} \text{ y } \mathbf{q} = \{ \pm(1,0), \pm(0,1), \pm(1,1) \}$$

y a la arista que conecta a $\mathbf{p}$ con $\mathbf{q}$ en $\mathcal{T}$ la denotaremos por $\mathbf{e}$. En la Figura 8 sobreponemos algunos vértices y aristas de $\mathcal{T}$ sobre la gráfica de Farey. La manera en que construimos el árbol de Farey $\mathcal{T}$ nos permite distinguir entre dos tipos de vértices adyacentes: los provenientes de aristas de $\mathcal{F}$ (representados con $\bullet$) y los que corresponden a triángulos de $\mathcal{C}$ (representados con $\star$). Se puede demostrar que existe un único camino que conecta a $\mathbf{p}$ con cualquier otro vértice de $\mathcal{T}$, este resultado implica que $\mathcal{T}$ es un árbol.

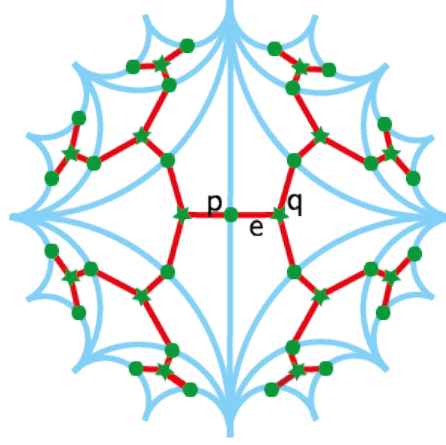


Figura 8: Algunos vértices y aristas del árbol de Farey $\mathcal{T}$.

Proposición 4.1. *La gráfica $\mathcal{T}$ es un árbol (una gráfica conexa sin ciclos).*

Para un esbozo de la prueba de esta proposición ver [CM17, Sección 3.1], los detalles están incluidos en [Sa20, Capítulo 2].

El grupo $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ actúa en:

- *La gráfica de Farey $\mathcal{F}$.* Sean $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ y $\pm(p, q) \in \mathcal{V}(\mathcal{F})$, entonces consideramos

$$S \cdot (\pm(p, q)) = \pm(p, q)S^T.$$

Esta acción en vértices respeta adyacencia de vértices en $\mathcal{F}$ e induce una acción en las aristas de $\mathcal{F}$.

- *El complejo de Farey $\mathcal{C}$.* Esta acción es inducida por la definición anterior; basta probar que la acción manda triángulos a triángulos y no triángulos en no triángulos (ver Figura 9). Esto se cumple pues un triángulo está formado por aristas adyacentes dos a dos.
- *El árbol de Farey $\mathcal{T}$.* Las acciones anteriores inducen una acción $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ en el árbol de Farey $\mathcal{T}$ que preserve el tipo de vértices: $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ manda aristas de $\mathcal{F}$ en aristas de $\mathcal{F}$ y triángulos de $\mathcal{C}$ en triángulos de $\mathcal{C}$.

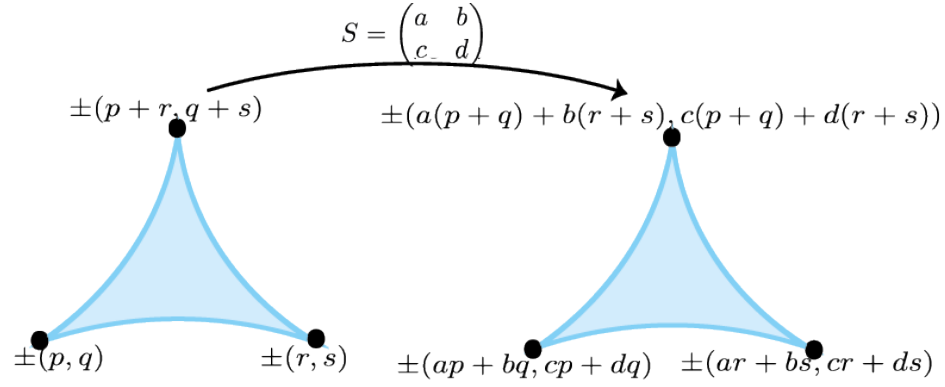


Figura 9: Acción de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ en el complejo de Farey $\mathcal{C}$.

Proposición 4.2. *La acción de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ en el árbol de Farey $\mathcal{T}$ definida antes, cumple lo siguiente:*

- a) *Es libre de inversiones, es decir, no existe un elemento de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ que intercambie vértices adyacentes.*
- b) *Es transitiva¹² en vértices de $\mathcal{T}$ del mismo tipo y en aristas de $\mathcal{T}$.*
- c) *El estabilizador¹³ del vértice $\mathbf{p}$, $\text{SL}_2(\mathbb{Z})_{\mathbf{p}}$, es un grupo cíclico de orden 4 y está generado por la matriz P .*
- d) *El estabilizador del vértice $\mathbf{q}$, $\text{SL}_2(\mathbb{Z})_{\mathbf{q}}$, es un grupo cíclico de orden 6 y está generado por la matriz Q .*
- e) *El estabilizador de la arista $\mathbf{e}$, $\text{SL}_2(\mathbb{Z})_{\mathbf{e}}$, es isomorfo a un grupo cíclico de orden 2 y está generado por la matriz $P^2 = Q^3$.*

Esbozo de la demostración. Consideramos la acción de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ en el árbol de Farey como se definió antes.

- a) Como la acción de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ en el árbol de Farey no puede intercambiar vértices de dos tipos diferentes (una arista y un triángulo), entonces es libre de inversiones.

¹²La acción es *transitiva* si dados dos vértices del mismo tipo $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ en $\mathcal{T}$ (o dos aristas), existe $S \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ tal que $S \cdot \mathbf{v} = \mathbf{w}$.

¹³Dado un grupo G actuando en un conjunto X , el *estabilizador* de un elemento $x \in X$ es el subgrupo $G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}$.

b) Recordemos que $\mathcal{V}(\mathcal{T}) = \mathcal{E}(\mathcal{F}) \cup \mathcal{T}(\mathcal{C})$.

Sea $\mathbf{v} = \{\pm(p, q), \pm(r, s)\} \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$, luego $ps - rq = \pm 1$. Observemos que

$$S \cdot \mathbf{p} = \{\pm(1, 0)S^T, \pm(0, 1)S^T\} = \mathbf{v}, \text{ donde } S = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \text{ o } S = \begin{pmatrix} p & -r \\ q & -s \end{pmatrix}.$$

Asimismo puede mostrarse que los elementos de $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ son de la forma

$$\mathbf{w} = \{\pm(p, q), \pm(r, s), \pm(p + r, q + s)\} \text{ con } ps - rq = \pm 1.$$

Entonces, tenemos

$$S \cdot \mathbf{q} = \{\pm(1, 0)S^T, \pm(0, 1)S^T, \pm(1, 1)S^T\} = \mathbf{w},$$

donde $S \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ es una de las matrices anteriores. Esto muestra que el grupo $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ actúa transitivamente en vértices de $\mathcal{T}$ del mismo tipo. La transitividad en aristas de $\mathcal{T}$ puede probarse de manera similar.

c) El estabilizador del vértice $\mathbf{p} = \{\pm(1, 0), \pm(0, 1)\}$, $\text{SL}_2(\mathbb{Z})_{\mathbf{p}}$, está dado por

$$\text{SL}_2(\mathbb{Z})_{\mathbf{p}} = \{S \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) : S \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}\}.$$

Por la definición de la acción de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ en vértices de $\mathcal{T}$ y por cómo se multiplican las matrices, las columnas de las matrices en $\text{SL}_2(\mathbb{Z})_{\mathbf{p}}$ deben estar en el conjunto $W = \{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}$. Entonces tenemos $\binom{4}{2} = 6$ posibles matrices. Puesto que las matrices también deben tener determinante 1, concluimos que

$$\text{SL}_2(\mathbb{Z})_{\mathbf{p}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \langle P \rangle_{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}.$$

d) Similar al inciso c).

e) El estabilizador de $\mathbf{e}$ es igual al estabilizador de $\mathbf{p}$ intersectado con el estabilizador de $\mathbf{q}$, entonces

$$\text{SL}_2(\mathbb{Z})_{\mathbf{e}} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}. \quad \square$$

Las propiedades de la proposición anterior, nos permiten aplicar un resultado de la teoría de árboles de Serre [Se77, Sección I.4, Teorema 6] para concluir que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ es isomorfo a un producto amalgamado¹⁴ de sus subgrupos estabilizadores:

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\mathfrak{p}} *_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\mathfrak{e}}} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\mathfrak{q}}.$$

Luego, de la Proposición 4.2 (c),(d) y (e) se sigue que

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_4 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6.$$

Para detalles de la demostración de este resultado ver [Se77, Sección I.4] o [Sa20, Capítulo 2].

Corolario 4.3. *El grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tiene una presentación dada por*

$$\langle P, Q : Q^6 = 1, P^2 = Q^3 \rangle.$$

En la presentación anterior, P y Q corresponden a las matrices de orden 4 y 6 que generan los subgrupos estabilizadores $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\mathfrak{p}}$ y $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\mathfrak{q}}$, respectivamente (ver también Corolario 3.2). La relación $P^2 = Q^3$ corresponde al generador de estabilizador $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\mathfrak{e}}$.

Finalmente, de esta presentación y usando el isomorfismo del Teorema 2.1 se puede deducir la siguiente presentación (¿puedes probarlo?).

Corolario 4.4. *El grupo $\mathrm{Mod}(\mathbb{T}^2)$ admite la siguiente presentación finita*

$$\langle T_{\mathbf{a}}, T_{\mathbf{b}} \mid (T_{\mathbf{a}}T_{\mathbf{b}})^6 = 1, T_{\mathbf{a}}T_{\mathbf{b}}T_{\mathbf{a}} = T_{\mathbf{b}}T_{\mathbf{a}}T_{\mathbf{b}} \rangle,$$

donde $T_{\mathbf{a}}$ y $T_{\mathbf{b}}$ son los giros de Dehn generadores en el Teorema 3.4.

¹⁴Sean G , H y K grupos tales que $i : K \hookrightarrow G$ y $j : K \hookrightarrow H$ son monomorfismos. El producto de G y H amalgamado en K , denotado por $G *_K H$, se define como el cociente del producto libre $G * H$ por el subgrupo N normalmente generado por los elementos $\{i(k)^{-1}j(k) : k \in K\}$. Para leer más sobre productos libres y productos amalgamados ver, por ejemplo, [Lo17, Sección 2.3.2].

5. Epílogo: grupos y sus acciones

Los grupos, como las personas, son conocidos por sus acciones.

GUILLERMO MORENO

Esperamos haber ilustrado que es posible obtener propiedades algebraicas del grupo $\text{Mod}(\mathbb{T}^2)$ a través de sus acciones:

- La acción de $\text{Mod}(\mathbb{T}^2)$ en el grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{T}^2, 1)$ nos permitió demostrar que $\text{Mod}(\mathbb{T}^2) \cong \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ (ver Teorema 2.1).
- Usando la acción de $\text{Mod}(\mathbb{T}^2)$ en el conjunto de matrices $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ demostramos que $\text{Mod}(\mathbb{T}^2)$ es un grupo finitamente generado y obtuvimos conjuntos de generadores explícitos (ver Teoremas 3.1, 3.2 y 3.4).
- Con la acción de $\text{Mod}(\mathbb{T}^2)$ en el árbol de Farey $\mathcal{F}$ se puede probar que $\text{Mod}(\mathbb{T}^2)$ es finitamente presentado y obtener presentaciones explícitas (ver Corolarios 4.3 y 4.4).

Por otro lado, la acción de $\text{Mod}(\mathbb{T}^2)$ en el árbol de Farey $\mathcal{F}$ también se puede utilizar para probar que $\text{Mod}(\mathbb{T}^2)$ es virtualmente libre; ver [CM17, Sección 2.3]. Una prueba alternativa de este hecho utiliza la acción de $\text{Mod}(\mathbb{T}^2)$ en $\mathbb{R}^2$ (ver por ejemplo [Lo17] y [Co1]). Además, el estudio de los puntos fijos de la acción de $\text{Mod}(\mathbb{T}^2)$ en la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ (o de su acción en el plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$) puede usarse para probar que los elementos de $\text{Mod}(\mathbb{T}^2)$ están clasificados en elípticos, hiperbólicos y parabólicos.

Las técnicas ilustradas en este artículo han sido generalizadas para estudiar grupos modulares de superficies compactas $\text{Mod}(\Sigma)$. Por ejemplo, se puede probar que $\text{Mod}(\Sigma)$ es un grupo finitamente generado, y encontrar conjuntos explícitos de generadores que consistan de un número finito de giros de Dehn, estudiando la acción de $\text{Mod}(\Sigma)$ en el complejo de curvas de la superficie, un complejo análogo a la gráfica de Farey. Asimismo, se puede demostrar que $\text{Mod}(\Sigma)$ admite una presentación finita estudiando su acción en el complejo de Hatcher-Thurston de sistemas de corte, mismo que generaliza al árbol de Farey. Para leer más al respecto, ver [Iv02] ó el libro [FM12] y las referencias ahí incluidas.

Agradecimientos. Agradecemos a Israel Morales Jiménez y a los árbitros por sus cuidadosas sugerencias para mejorar la presentación de este escrito. La primera autora agradece el financiamiento del Proyecto CONACyT Ciencia Frontera 217392.

Fuentes Figuras

Figura 1 a). Boceto de Leonardo da Vinci extraído de:
<https://www.sciencephoto.com/media/363221/view/drawings-by-leonardo-da-vinci>

Figura 1 b). <http://www.sabelotodo.org/arquitectura/arquigriega.html>.

Referencias

- [Ar46] Arens R. *Topologies for Homeomorphism Groups*. American Journal of Mathematics Vol. 68, No. 4 (Oct., 1946), pp. 593-610.
- [CM17] Clay, M. ; Margalit, D. (editores). *Office hours with a geometric group theorist*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2017. xii+441 pp.
- [Co1] Conrad, K. $SL_2(\mathbb{Z})$. Notas consultadas en 2020 disponibles en: [https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/grouptheory/SL\(2,Z\).pdf](https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/grouptheory/SL(2,Z).pdf)
- [DF04] Dummit, D. y Foote, R., *Abstract Algebra*, 3rd Edition, John Wiley and Sons, 2004, pp. xii+932. <https://es.overleaf.com/project/60ad30f3d129b743d2e9a0be>
- [FM12] Farb, B.; Margalit, D. *A primer on mapping class groups*. Princeton Mathematical Series, 49. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012. xiv+472 pp.
- [Ha58] Hamstrom, M. E. ; Dyer, E. *Regular mappings and the space of homeomorphisms on a 2-manifold*. Duke Math. J. 25 (1958), 521–531.
- [Ha02] Hatcher, H. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002, pp. xii+544.
- [Hi94] Hirsch, M. W. *Differential topology*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 33, SpringerVerlag, New York, 1994. Reimpresión corregida del original de 1976.
- [HZ64] Hudson, J. F. P.; Zeeman E.C. *On regular neighbourhoods*. Proc. London Math. Soc. (3) 14 (1964), 719-745.
- [Iv02] Ivanov, V. (2002), *Handbook of geometric topology: Mapping class groups*, North-Holland, Amsterdam. pages 523-633.
- [Lo17] Löh, Clara. *Geometric group theory. An introduction*. Universitext. Springer, Cham, 2017. xi+389 pp.
- [Mu02] Munkres, J. *Topología*. Pearson Educación, Prentice-Hall ; 2da edición (2002) pp. 607.
- [Mu18] Muñoz, D. E. *Amalgam Decomposition and Cohomology of the Group $SL_2(\mathbb{Z})$ and the Bianchi Groups*. Tesis consultada en 2020 disponible en: <https://pdfs.semanticscholar.org/68e8/fbab972cfdb15fcf5aa5a212a06a5acdf349.pdf>
- [Sa20] Santiago, J. C. *El grupo modular $SL(2, \mathbb{Z})$* . Tesis de licenciatura. Universidad Autónoma Benito Juárez de Oaxaca (2020), pp. 112.
- [Sc06] Schleimer, S. *Notes on the curve complex*. Notas sin publicar disponibles en: <http://homepages.warwick.ac.uk/~masgar/Maths/notes.pdf>
- [Se77] Serre, J. P. *Trees*. Editorial Springer-Verlag Berlín Heidelberg. Edición francesa original publicada por Société Mathématique France, 1977.
- [Ze66] Zeeman, E. C. (1966), *An Introduction to Topology: The Classification theorem for Surfaces*. University of Warwick, Mathematics Institute. Notas sin publicar disponibles en: <https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/surgery/zeeman.pdf>.

Juanita Claribel Santiago (claribel@matmor.unam.mx)
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
MORELIA, MICHOACÁN, MÉXICO 58089

Rita Jiménez Rolland (rita@im.unam.mx)
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
OAXACA DE JUÁREZ, OAXACA, MÉXICO 68000