

Espejos, ángulos y quebrados

Me cautivaron los espejos desde chiquito. Entre mis primeros recuerdos está el de treparse al escusado y de ahí subirse, a duras penas, al lavabo para asomarse a los espejos del baño. “Botiquín” le llamaban a esas cajas de lámina blanca con entrepaños de vidrio empotradas en la pared y atiborradas de cajitas y frascos. Pero no me interesaba su interior, o quizá es que me era imposible abrir su puerta sin caerme del lavabo. La puerta cerrada era el espejo central y a ambos lados, agarrados por bisagras que corrían a todo lo largo, había otros dos espejos angostos que se movían como alas. Ahí residía la magia: se movían; los tres espejos giraban en el eje de su bisagra. Era difícil pararse quieto sin resbalarse en los contornos del lavabo, pero entonces podía uno cambiar el mundo que surgía detrás de los espejos al cerrar o abrir las alitas del botiquín. Justo atrás de la bisagra podía uno hacer aparecer a una mariposa con alas de oreja, a un monstruito de un sólo ojo, a un yo normal o a uno de tres ojos y dos narizes que acaba por despegarse en dos yos al seguir cerrándose el ángulo de espejos. Luego salían de la nada, pero justo detrás de la bisagra, otros dos espejos para crear, allá al fondo, un nuevo nicho donde se repetía la misma secuencia --orejas, uno, dos, tres, cuatro ojos-- y más y más yos que se iban concentrando alrededor de la bisagra. Controlaba la cantidad de imágenes mías. Aunque aún no supiera los nombres de los números, con el “ángulo” variaba entre pocos y muchos cambiando de uno en uno... ¿o sería de dos en dos? ¿Veríamos todos lo mismo?

Si no tienes claro de qué estoy hablando y no hay uno de estos botiquines en tu casa: consigue dos espejos rectangulares (sin filo en las orillas para no cortarte). Pon sus lados reflejantes uno sobre el otro y pégalos con masking-tape por una orilla. Haz hecho un ángulo de espejos. Ponlo sobre una mesa (con un periódico para no rayarla, y si tiene muchos colores, mucho mejor). Asómate al ángulo y juega con la imagen que se forma cuando lo varías. Verás entonces que las últimas frases del párrafo anterior cobran sentido y que además, al mover el ángulo sobre los colores del periódico puedes crear bellas figuras. Pero regresemos a mi historia.

Otro de mis recuerdos más claros de aquella época, aunque quizá ya era un poco más grande, es el de la magia hipnótica de las esferas de navidad. Me encantaba ayudarle a mi mamá a poner el árbol y, antes de pasárselas, ver a las esferas de cerquita: aparecer ahí con una narizota y modular su tamaño con la distancia. Rodeando a un yo grandote y deformado se reflejaba todo el cuarto. Parecía que todo estaba ahí metido en la esfera aunque los tamaños se cambiaran mucho y los colores se matizaran por el del espejo curvo. Y esto pasaba en cada una de las esferas. Al irse juntando en el árbol, se reflejaban unas en las otras y entraban ahí de nuevo con el cuarto y el árbol con todo y sus esferitas que ya traían a... ¿cuántas esferas había entonces reflejadas, metidas, en cualquiera de

ellas? Un poco más tarde, mi papá nos compró unos caleidoscopios en una esquina, parecían muy simples y fueron mi fascinación... ¿cómo funcionaban?

Estos juegos y ensueños fueron mi primer contacto con las matemáticas. En ellos el elemento central es el concepto de “reflexión”, que es algo importantísimo en la geometría. ¿Quién hubiera dicho entonces que, de grande, habría yo de trabajar y publicar resultados originales que usan a las reflexiones?... aunque hayan sido de dimensión cuatro. ¿O que, con espejos comunes y corrientes, hubiera yo descubierto y patentado los tres caleidoscopios de cuatro espejos? Pero me estoy adelantando y esto debía haber sido el fin de la historia. Regresemos.

Crecí y me convertí en matemático. Mi trabajo principal es descubrir nuevos resultados que en mi caso, más que con números, tienen que ver con objetos geométricos, con formas e imágenes, con rotaciones y reflexiones. Pero además, me encanta dar clases y conferencias a jóvenes. Quizás fue por eso que acabé trabajando en el diseño de la Sala de Matemáticas del museo de ciencias llamado Universum. Y entonces renové mi idilio con las reflexiones: rescaté de los rincones empolvados de la memoria a mis juegos frente al botiquín, y me di cuenta que marcaron mi vida; tuve que armar un ángulo de espejos y volver a jugar con él para entenderlo. Para el museo: había que intentar transmitir la emoción o tensión placentera que surge en este tipo de juegos o experimentos. Por supuesto: había que poner un ángulo de espejos, además, unos espejos paralelos para acercarse al infinito y muchos, muchos caleidoscopios. Pero resultó que éstos últimos, en términos de su diseño básico y no de las imágenes que producen, no son tantos: son muy poquitos y quiero explicarte porqué.

Necesito que tengas a la mano un ángulo de espejos para que vayas viendo con tus propios ojos lo que te voy a ir contando, aunque piense en mi ante el botiquín, hablaré de ti jugando con tu ángulo. Cuando está totalmente abierto, los dos espejos parecen ser uno sólo y la bisagra es una simple línea en él: atrás está tu yo-espejo de todos los días, porque los dos espejos producen la misma reflexión. Llamemos a este ángulo π , que es una letra griega y se lee “pi”, pensando que es media pizza; pues los ángulos son como las rebanadas de pizza. Al empezar a cerrar el ángulo (mueve lentamente uno de los espejos) y viendo de frente a la bisagra, tu yo-espejo se parte en dos imágenes que se van separando; si cierras un ojo verás mejor y puedes crear un monstruo de tres ojos y dos narices. Llega un momento en que las dos imágenes se separan del todo. Poco después (y con práctica puedes detectar el momento preciso, el ángulo justo), aparecen detrás de la bisagra otros dos espejos que van creando un nuevo ángulo tras la bisagra. Ahí vas a volver a aparecer de a poquitos: primero las dos orejas con pelo, luego los ojos y por fin la nariz que se completa. Juega con el ángulo, verás que hay uno preciso donde la imagen es perfecta: estás tú, igualito, detrás de la bisagra. Cierra un ojo. El de atrás no es tu yo-espejo, cerró el otro y a los ojos abiertos los tapa la bisagra. Convencete. Levanta una mano y el de atrás levanta la misma, no como lo hace yo-espejo. Todo funciona bien porque el ángulo en el que están los espejos es la mitad de π , que se escribe $\pi/2$, es la rebanada de pizza perfecta para cuatro comensales también conocida como el ángulo recto. Hay justo cuatro imágenes tuyas alrededor de la bisagra, dos yo-espejos a tus lados y el de atrás que se obtiene de ti rotando media vuelta alrededor del eje-bisagra, o, lo que es lo mismo, reflejándolo dos veces en espejos con ángulo recto.

Si sigues cerrando el ángulo de espejos, se repite la secuencia. A simple vista puedes lograr que una nueva imagen tuya se haga perfecta detrás de la bisagra, el ángulo

es ahora $\pi/3$, la rebanada exacta para 6 comensales de pizza. Nota que en este momento el de atrás sí es tu yo-espejo. También puedes encontrar el ángulo $\pi/4$ cuando haya ocho tus; cuatro de ellos cerrarán el ojo izquierdo cuando tu lo haces mientras que los otros cuatro cierran el derecho, se alternan alrededor del eje. Y quizás también puedas medir el ángulo $\pi/5$, el $\pi/6$ y el $\pi/7$, pero ya no te va a caber toda la cabeza dentro del ángulo.

Lo que acabamos de hacer son caleidoscopios de dos espejos. Unos son perfectos porque toda la imagen ajusta bien, se dan, como vimos, en los ángulos $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$, $\pi/5$,... y producen respectivamente 4, 6, 8, 10,... imágenes. Un buen caleidoscopio de tres espejos tiene que tener sus tres ángulos de este tipo. El más común se arma con tres espejos rectangulares del mismo tamaño y ajustándolos en un prisma sobre el triángulo equilátero, que tiene sus ángulos $\pi/3$. El tercer espejo hace que la imagen se desparrame y se reproduzca hacia todos lados llenando un plano infinito. Otros dos caleidoscopios perfectos se pueden armar con prismas sobre las escuadras comunes. Pero ¿son todos? Resulta que sí y sólo se necesita un poquito de álgebra para demostrarlo. Pero si en lugar de prismas armamos pirámides ¿hay nuevos? ¿Cuántos? ¿Cuáles? ¿Y con cuatro espejos? Este es el tipo de preguntas que nos hacemos los matemáticos. Surgen del juego. Tu, sigue jugando. Juega, pregunta. Preguntate.