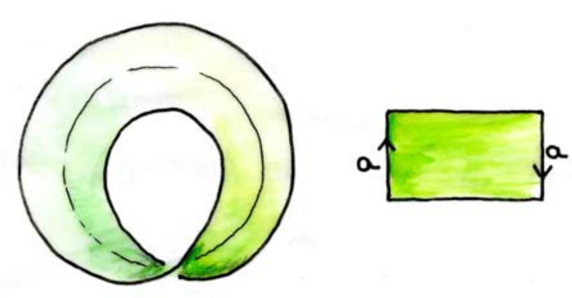
La forma de los espacios
(y la forma de bailarlos).

Javier Bracho

A Coral.

Las matemáticas son tan intangibles como las sombras de la caverna de Platón y a la vez, gracias a la forma –forma como estructura– son de lo más sólido que la humanidad ha construido. Más allá del estilo con que se presentan y que ha ido cambiando en la historia, la forma básica (pasito de danzón en dos tiempos) permanece intacta desde Euclides: **teorema** como síntesis de algo cierto y memorable; **demostración** como el razonamiento que lo sustenta, itinerario de trivialidades locales, de certezas concatenadas, cuya suma ordenada hace al teorema tal. Uno, dos, y uno y... dicen por ahí que además están los axiomas y las reglas de inferencia, pero los matemáticos, al bailar, no les damos la menor importancia; los axiomas están bien archivados (se les venera sin tomarlos en cuenta como letra sagrada) y eso de las reglas nadie sabe qué son, no son explícitas, son sobreentendidos estilísticos que varían de clan en clan: sin saber bien porqué o cómo, cada uno sabe si una demostración en su campo es válida o no, es algo que se "siente" o bien un arte innato que se aprende y transmite como el del ritmo. Y al son de teorema, demostración, y, uno, y dos... ahí la llevamos: tenemos ahora una construcción abigarrada e inabarcable que sigue creciendo y, aunque parezca abstracta, es el basamento y el andamio de la ciencia; se concretiza detrás de cada obra de ingeniería o de la última maravilla tecnológica. Pero la "utilidad" nunca ha sido su punto o su motor: es en sí el carácter seductor de las sombras que la habitan y ese extraño placer de lidiar con ellas como si fueran piedra; sombras tan sólidas como las piedras y que además, a veces, se prestan cachondas para el baile.

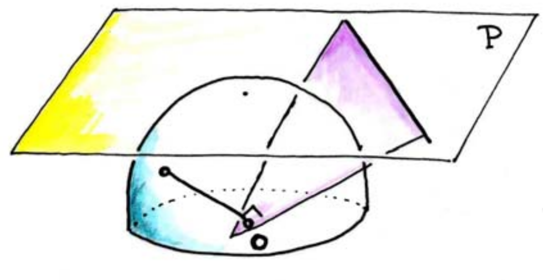
Más que explicar el carácter de estas sombras, saquemos una a la pista. Una que además ha trascendido su ámbito de "objeto matemático" para saltar a la fama del imaginario colectivo: la banda de Moebius. Tan simple que sorprende que se le asocie el nombre de un matemático de la segunda mitad del siglo XIX. Se obtiene de pegar los extremos de una banda invirtiendo la orientación; se concretiza en el cinturón del crudo que distraído cerró la hebilla insertando la lengüeta por el lado equivocado. Entre sus encantos están que siendo una superficie, no tiene dos lados sino uno; que sólo tiene un borde, y que al cortarla por la mitad, en su versión de papel de china, no se parte en dos: se queda de una sola pieza y al insistir en cortarla otra vez, finalmente cede, pero nos deja con dos bandas indisolublemente entrelazadas. Tiene pues, madera para función de magia a párvulos o para elaborar metáforas lacanianas. Sin embargo, su lugar en las matemáticas viene de más allá, de su papel estelar en teoremas "profundos" como el siguiente.



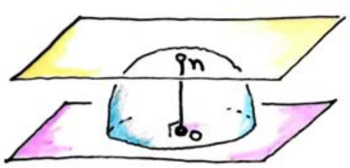
Teorema. El espacio de líneas en el plano es una banda de Moebius abierta.

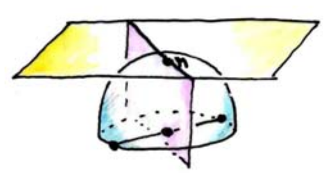
Y digo profundo no porque su demostración sea complicada, sino porque tiene un cierto elemento de sorpresa –relaciona a la banda de Moebius con objetos clásicos como las líneas en el plano euclidiano, formando con ellas un “espacio”– y da pie al estudio en sí de “los espacios”; abre la cancha a consideraciones de un nuevo estilo. Qué significa aquí la palabra “espacio” –la única en el teorema cuyo valor no es el cotidiano– quedará más claro si esbozamos la prueba.

Demostración. Consideremos un plano horizontal P tangente a una media esfera cuyo centro llamaremos **o** y cuyo ecuador o borde también es horizontal. Una línea en P define al plano que pasa por ella y por el punto **o**. Consideremos la línea perpendicular a este plano en **o** y luego a su punto de intersección con la media esfera: asociemos este punto en la media esfera a la línea en P con que empezamos. Podemos invertir el proceso. Si empezamos con un punto en la media esfera, trazamos su línea a **o**, luego nos fijamos en el plano perpendicular ahí (en **o**) y en la línea en que este plano corta al plano P. Hemos establecido una correspondencia entre líneas en el plano P y puntos en la media esfera; pequeñas variaciones de la línea producen pequeñas variaciones del punto, y viceversa. Podemos inclusive imaginar un artefacto rígido *auxiliar* que consiste de la línea y el plano perpendiculares en **o**, cuyas sendas intersecciones dan la correspondencia; al girar nuestro artefacto alrededor de **o**, barremos parejas correspondientes. Ésta es la idea central, a las líneas en P les hemos hecho corresponder puntos que forman un “espacio” (la media esfera), pero al considerarlo con más calma se deduce el teorema.



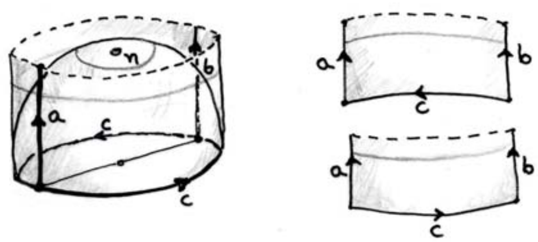
Hay dos ambigüedades en la correspondencia. Primera, al polo norte, **n** digamos, donde P es tangente a la media esfera, no le corresponde ninguna línea en P. Pues la línea de **n** a **o** es vertical, entonces el plano auxiliar es horizontal: es el paralelo a P que pasa por **o** (y contiene al ecuador); no se intersectan. A **n** le quiere corresponder una línea al infinito en P, pues para puntos muy cercanos a **n**, las líneas correspondientes en P están muy lejos. Hay que quitar entonces al punto **n** de la media esfera. Y segunda ambigüedad, a las líneas que pasan por **n** les corresponden dos puntos antípodas en el ecuador: el plano auxiliar es vertical, por tanto la línea ortogonal es horizontal y, como pasa por **o**, su intersección con la media esfera son dos puntos antípodas en el ecuador. Tenemos entonces que para obtener un “espacio” tal que cada punto en él corresponda justo a una línea en P: hay que quitar a **n** de la media esfera y además identificar, pegar, a cada par de puntos antípodas en el ecuador de ésta; hacer un sólo punto de cada par

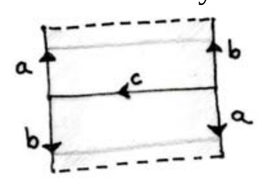




antípoda en el ecuador. Y como veremos a continuación, este “espacio” es una banda de Moebius abierta.

Al quitar **n**, se hace un hoyito que podemos agrandar hasta obtener un cilindro con uno de sus bordes abierto (es decir, eliminado, inexistente, que no está ahí) y el otro correspondiendo al ecuador, donde debemos identificar puntos antípodas. Llamemos *c* (dibujado como flechita) a medio ecuador; de tal manera que el otro medio ecuador también es *c* (con la flechita en el mismo sentido), pues debemos identificar los puntos de un segmento dirigido con los del otro. Para poder hacer esta identificación en el espacio tridimensional (en el que estamos pensando a nuestros objetos), hay que hacer un par de cortes al cilindro al principio (y final) de las flechitas *c*. Llamémosles *a* y *b* (recordando también el sentido en el que hay que identificarlas) para obtener, planchando los pedazos, dos rectángulos con un lado abierto y los otros tres marcados con las flechitas *a*,*b* y *c* que hay que identificar por parejas. Si primero identificamos las flechitas *c*, obtenemos una banda abierta cuyos extremos deben identificarse “a la Moebius”. Es una banda de Moebius abierta, quedando demostrado el teorema. QED





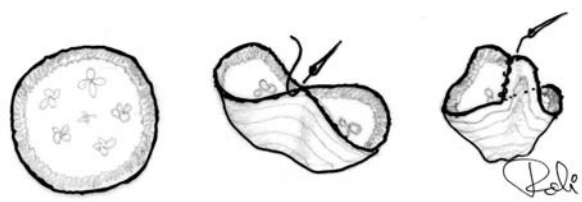
La primera vez que uno ve esta demostración o las ideas que le dan vida, siente como que trampearon, que hubo prestidigitación: algún truco por ahí mientras que movimientos pantalla o bombas de humo desviaban la atención. Y saltan de las matas las preguntas: ¿qué es eso de cortar y pegar? y ¿por qué el orden de pegado cambia los resultados? ¿los cambia? ¿Qué es eso de hacer grandes los hoyitos? o ¿de ser “abierto”? porque entonces debe de haber “cerrados” ¿no?... o en fin: ¿dónde quedó la “exactitud” aquella de la que tanto cacareaban las matemáticas, dónde los números y las ecuaciones? Y sin embargo, parafraseando a Galileo, es cierto: la demostración se mueve y hace al teorema tal. Entre más se le den vueltas o se reconstruyan con palabras e imágenes propias los argumentos, más se convence uno de que el razonamiento básico funciona: la Banda de Moebius y el Plano Euclidiano, cachondos, bailaron; los puntos de aquella y las líneas de éste se corresponden; la Esfera, en plan de alcahueta, nos ayudó a verlo. *Teorema habemus.* Y si no por la forma de exponerlo, sino por el fondo, por las ideas, a alguien se le enchinó un poco la piel del alma, es que ahí está arraigado su espíritu de matemático, reposando juntito al estético y acariciando al lúdico.

Teoremas como este dieron lugar al estudio sistemático de los espacios: de su forma; forma en el sentido plástico y primigenio de la palabra. De aquello que comparten círculos, cuadrados y triángulos: “todos son bolas” diría un niño; “espacios equivalentes, o con la misma forma” diría un topólogo. Hubo que hacer explícito que es eso de “cortar” y “pegar”, de “pequeñas variaciones”, de “la continuidad” y de “los espacios”... se conformó lo que ahora llamamos topología: el devenir de la geometría en el siglo XX.

La demostración anterior es típica de cómo bailamos con las sombras, de cómo se hacen las matemáticas. Sus ideas básicas funcionan, dando la sensación de que las inexactitudes y los huecos son susceptibles de llenarse, de subsanarse, de detallarse al grado y con la paciencia que se quiera, de que hay piedra. Vienen entonces las **definiciones** precisas y las preguntas, los **problemas**: el tres y el cuatro que completan el compás, abriendo la cancha para entrarle a nuevas melodías. Por ejemplo, ¿qué pasa si volvemos a pegar al pobre punto **n** que, en la calentura de la demostración, eliminamos de un plumazo?

Se obtiene un nuevo espacio, llamémosle X. Tiene la propiedad de que alrededor de cada punto es como un pedacito de esfera o de plano, es lo que llamamos una *superficie*, como la esfera misma o la superficie de una dona que los griegos denominaron Toro. A X también lo podemos definir como una banda de Moebius cerrada a la cual se le pega un disco por su frontera (piénsese que el disco es el casquete ártico en la media esfera al final de la demostración), o bien como una media esfera o un disco –pues topológicamente son lo mismo, tienen la misma forma básica– identificando puntos antípodas en su frontera.

Definimos a X con base en los elementos que habíamos usado y dado por establecidos, pero uno quisiera verlo como a la esfera o el toro, agarrarlo con las manos. Resulta que la superficie X es rejega: no se deja sumergir en este espacio tridimensional que habitamos; por más que se intente zurcir por sus puntos antípodas a un mantelito redondo, éste se enreda y obstruye la tarea. Sin embargo, que nosotros no podamos no significa que no se pueda. Se configura entonces un problema:



demostrar que efectivamente no se puede; en los intentos fallidos sólo se recopila evidencia para un posible teorema. Parecería irrelevante, pero indica que los espacios se relacionan entre ellos y que hay algunos que de plano no se llevan; el X éste nos obliga a pensar en los espacios en abstracto, fuera de un ambiente: cuestiona a este otro como el ambiente único. Y además, por si fuera poco, este espacio X no es un *x* cualquiera, es el famoso “Plano Proyectivo” que aparece, con abolengo, por otro lado: en el fundamento matemático de las leyes de la perspectiva (recordemos como evidencia que el punto **n** que volvimos a pegar quería corresponderse con una línea al infinito, la de los “puntos de fuga”). Y en este contexto, nuestra demostración es llamada “Principio de Dualidad”: una correspondencia perfecta entre líneas y puntos.

El Plano Proyectivo resulta ser fundamental para entender las posibles formas de las superficies, junto con la esfera y el toro son sus piezas de armado básicas. Este es un teorema célebre al que se asocian los nombres de Euler y Poincaré, a quienes también se considera como fundadores de la topología. No quisiera marear con los detalles de la clasificación de superficies, pero sí indicar que al conquistar la dimensión dos, o digamos que a ésta en su parte topológica, lo natural es lanzarse al ruedo con la tercera y que ese baile aún no concluye. Esto no quiere decir que vayamos muy pulcros por orden de dimensiones, “primero la dos, luego la tres...”, sino que aún no conocemos cuales son las formas posibles de los espacios tridimensionales. El avance no es ordenado, más bien parecería caótico, se tienen teoremas en una dirección o en otra, se van armando teorías dispares que luego confluyen y sorpresivamente se apoyan, y en muchas áreas lo más común son teoremas en dimensión *n*, es decir, en cualquiera. Esto sorprende mucho, pero hay una razón de fondo. Es que al buscar la generalidad se encuentran muchas veces las razones profundas y eso es importante tanto por la escritura (se simplifica) como por el entendimiento. En fin, resumiría diciendo que la topología ha hecho de la forma –forma como sustrato y como sustento, como el alma del ser geométrico– un objeto de estudio y que, por el momento, parece inagotable... seguimos bailando.

Enero 6 del 2006.