

# Capítulo 5

## La esfera y el espacio

En este capítulo estudiaremos la geometría de la esfera. Veremos cómo hay, y se puede hacer, geometría en otros “espacios” además del plano euclidiano. Pero antes tenemos que repasar y ver ciertas propiedades de su “hábitat” natural, del espacio ambiente en el que vive.

### 5.1 Planos y líneas en $\mathbb{R}^3$

Hemos visto que un plano en  $\mathbb{R}^3$  se puede definir, al menos, de tres maneras. La primera, una *descripción paramétrica*, dando un punto base  $\mathbf{p}$  y dos vectores direccionales no paralelos  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ , para describir un plano  $\Pi$  con dos parámetros libres  $s$  y  $t$  como

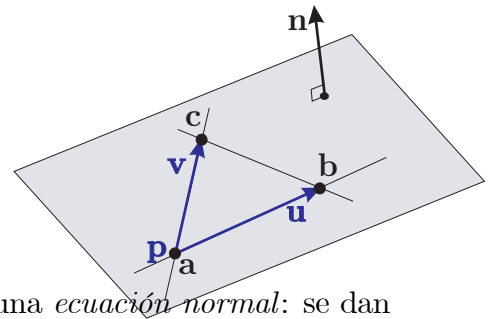
$$\Pi = \{ \mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v} \mid s, t \in \mathbb{R} \}.$$

La segunda, una *descripción baricéntrica*, dando tres puntos no colineales  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  en él, y se le describe por coordenadas baricéntricas (o combinaciones afines):

$$\Pi = \{ \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}; \alpha + \beta + \gamma = 1 \}.$$

Y finalmente, una *descripción intrínseca* por medio de una *ecuación normal*: se dan un vector normal  $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$  y una constante  $d \in \mathbb{R}$  tales que

$$\Pi: \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = d.$$



Pasar de una descripción baricéntrica a una paramétrica, y viceversa, es fácil pues tomando  $\mathbf{a} = \mathbf{p}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{p} + \mathbf{u}$  y  $\mathbf{c} = \mathbf{p} + \mathbf{v}$  por ejemplo, podemos transformar una en la otra (Sección 1.4.2). El primer problema importante que vamos a atacar es cómo encontrar una ecuación normal para un plano dado paramétricamente. Es decir, dados  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ , no paralelos, encontrar un vector  $\mathbf{n}$  perpendicular a ambos. Pero antes, veámos con un ejemplo cómo es fácil encontrar una descripción paramétrica, o baricéntrica, de un plano dado por una ecuación normal.

Tomemos por ejemplo la ecuación

$$2x + y - z = 2,$$

que define un plano  $\Pi$  normal al vector  $(2, 1, -1)$ . Para encontrar una descripción baricéntrica basta encontrar tres soluciones particulares no colineales. Y para esto, podemos asignar valores arbitrarios a dos de las variables y despejar la tercera. Lo más fácil es hacerlas cero. Así, si hacemos  $y = 0$  y  $z = 0$  la ecuación implica que  $x = 1$  y por tanto que  $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$  es una solución. Análogamente,  $\mathbf{b} = (0, 2, 0)$  y  $\mathbf{c} = (0, 0, -2)$  son soluciones. Y estos tres puntos nos dan una descripción baricéntrica del mismo plano pues son los puntos de intersección de  $\Pi$  con los tres ejes, y en este caso no son colineales.

Para obtener una descripción paramétrica, podemos tomar a  $\mathbf{a}$  como punto base y a  $\mathbf{b} - \mathbf{a}$  y  $\mathbf{c} - \mathbf{a}$  como vectores direccionales:

$$\begin{aligned} \Pi &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 - s - t \\ 2s \\ -2t \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Y efectivamente, estos valores siempre satisfacen la ecuación original; para corroborarlo, podemos sustituir en la ecuación original y ver que simbólicamente, es decir, independientemente de los valores de los parámetros, siempre se cumple que:

$$2(1 - s - t) + (2s) - (-2t) = 2.$$

Hay que observar que a veces puede ser un poco, pero no mucho, más difícil encontrar soluciones particulares no colineales (veáanse los siguientes ejercicios).

Por último, es bonito ver lo fácil que resulta demostrar por qué el método que acabamos de esbozar funciona siempre.

**Lema 5.1** *Si  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  son soluciones de la ecuación lineal  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{d}$ , entonces cualquier combinación afín de ellos también lo es.*

**Demostración.** Recordemos que una combinación afín de  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  es un vector que se expresa de la forma

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} \quad \text{con} \quad \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

De la linealidad del producto interior, la hipótesis y esta última ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}) &= \alpha (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}) + \beta (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}) + \gamma (\mathbf{n} \cdot \mathbf{c}) \\ &= \alpha \mathbf{d} + \beta \mathbf{d} + \gamma \mathbf{d} \\ &= (\alpha + \beta + \gamma) \mathbf{d} = \mathbf{d}. \end{aligned}$$

□

---

**EJERCICIO 5.1** Encuentra descripciones baricéntricas y paramétricas para los siguientes planos:  $\Pi_1 : 2x - 3y + z = 6$ ;  $\Pi_2 : x + 4y - 2z = 4$ ;  $\Pi_3 : -x + y - 2z = 2$ ;  $\Pi_4 : 5x - 2y + z = 1$ .

**EJERCICIO 5.2** Enuncia y demuestra el lema anterior para combinaciones afines de longitud arbitraria (no necesariamente de tres vectores) y en cualquier espacio vectorial.

---

### 5.1.1 El producto cruz

Consideremos ahora el problema inverso: encontrar una ecuación normal para un plano descrito con parámetros. Puesto que sabemos pasar de una descripción baricéntrica a una paramétrica y viceversa, el problema se reduce a encontrar un vector perpendicular a dos vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  dados. Es decir, tenemos que resolver el sistema

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} &= 0 \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} &= 0,\end{aligned}$$

o bien encontrar un punto  $\mathbf{x}$  en la intersección de los planos ortogonales a  $\mathbf{u}$  y a  $\mathbf{v}$ . Puesto que el sistema es *homogéneo* (las constantes son cero), siempre existe la solución *trivial*  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ; pero ésa no nos sirve pues el vector normal a un plano debe ser distinto de cero. De tal manera que si encontramos  $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$  que satisfaga las dos ecuaciones anteriores, entonces el plano que pasa por  $\mathbf{p}$  con vectores direccionales  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  tendrá la ecuación normal

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}.$$

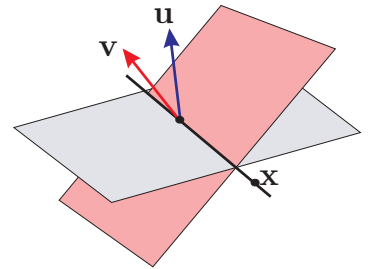
Además, resolvamos de una buena vez el problema de manera general, tratando de no hacer suposiciones adicionales sobre los vectores dados.

Asignemos coordenadas a nuestros vectores usando subíndices,  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  y  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ , para que el sistema se escriba

$$\begin{aligned}u_1 x + u_2 y + u_3 z &= 0 \\ v_1 x + v_2 y + v_3 z &= 0\end{aligned}$$

con  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  como nuestro vector variable o incógnita. Para eliminar una de las variables, podemos usar el mismo método que en sistemas de  $2 \times 2$ . Eliminemos  $z$  multiplicando la segunda ecuación por  $u_3$ , la primera por  $-v_3$  y sumando para obtener

$$(u_3 v_1 - v_3 u_1) x + (u_3 v_2 - v_3 u_2) y = 0.$$



Esta ecuación ya la conocemos aunque las constantes tienen otros nombres (recuérdese nuestro primer encuentro con el compadre ortogonal). Tiene una solución canónica “volteando” los coeficientes y en uno de ellos también el signo, es decir:

$$\mathbf{x} = \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2 \mathbf{u}_3 ; \mathbf{y} = \mathbf{u}_3 \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3 \mathbf{u}_1.$$

Al sustituir ahora estos valores en la primera ecuación y simplificar se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 (\mathbf{u}_2 \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2 \mathbf{u}_3) + \mathbf{u}_2 (\mathbf{u}_3 \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3 \mathbf{u}_1) + \mathbf{u}_3 z &= 0 \\ \mathbf{u}_3 (\mathbf{u}_2 \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \mathbf{u}_1 + z) &= 0, \end{aligned}$$

que, independientemente del valor de  $\mathbf{u}_3$ , tiene la solución

$$z = \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \mathbf{u}_2.$$

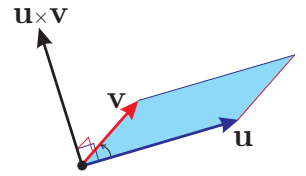
La solución particular que acabamos de encontrar (y que siempre funciona pues nunca dividimos ni hicimos ninguna suposición sobre si los coeficientes son cero o no) es tan importante que tiene nombre establecido. Se llama el *producto cruz* de  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ . Y para resumir, remarcar y establecer su notación, definámoslo como el vector

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2 \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_3 \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3 \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \mathbf{u}_2 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

La fórmula parece complicada, pero la “cantaleta” que nos ayuda a recordarla la hace sencilla. Obsérvese que en la primera coordenada del producto cruz no aparecen las primeras coordenadas de los ingredientes: es justo el determinante de la matriz  $2 \times 2$  que se obtiene al eliminar el primer renglón de la matriz  $3 \times 2$  de los dos vectores. La segunda coordenada es de nuevo el determinante al eliminar ahora el segundo renglón, pero con signo negativo. Y la tercera vuelve a ser el determinante tal cual al olvidarse del tercer renglón. El producto cruz se arma de subdeterminantes  $2 \times 2$  ignorando datos (coordenadas) correspondientes y teniendo cuidado en los signos (el de enmedio lleva un signo “menos”).

Geoméricamente, el producto cruz es a  $\mathbb{R}^3$  lo que el compadre ortogonal es a  $\mathbb{R}^2$ . En el plano, dado un vector  $\mathbf{u}$ , se puede escoger un vector canónico ortogonal a él girándolo  $90^\circ$  en la orientación positiva; ése es su compadre ortogonal  $\mathbf{u}^\perp$  que tanto nos ha ayudado; nótese que  $\mathbf{u}^\perp$  está en la media recta de vectores ortogonales a  $\mathbf{u}$  que está a “su izquierda” y que tiene la magnitud de  $\mathbf{u}$ .

En  $\mathbb{R}^3$  no es posible escoger de manera coherente un ortogonal para un vector variable  $\mathbf{u}$ , pues  $\mathbf{u}$  tiene todo un plano de ortogonales y es imposible decidir cuál de ellos es “el bueno”. Pero para dos vectores,  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ , sí se puede elegir al “bueno” de manera geométrica: si generan un plano, tenemos que escoger un vector en su recta ortogonal. Primero escogemos el lado de ese plano donde el giro de  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$  se ve en sentido contrario a las manecillas del reloj (positivo). Ello nos da media recta de sus posibles ortogonales. Y de estos, escogemos el que tiene magnitud igual al área del paralelogramo que generan  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ . Así obtenemos un ortogonal a ellos, escogido canónicamente, y que es precisamente su producto cruz,  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ , como veremos más adelante. Obsérvese además que la *construcción geométrica* del producto cruz que acabamos de esbozar funciona también cuando  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  no generan un plano, pues entonces están en una línea que pasa por el origen, el área de su paralelogramo es cero y les toca entonces el vector  $\mathbf{0}$ . Así que el producto cruz también debe detectar si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son linealmente dependientes.



Hemos hecho muchas afirmaciones que ahora debemos demostrar. Empecemos por las propiedades elementales del producto cruz con respecto a las otras operaciones que ya conocemos.

**Teorema 5.2** Sean  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$  tres vectores cualesquiera y  $t \in \mathbb{R}$ . Se cumplen entonces las siguientes propiedades del producto cruz:

- i)  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0$
- ii)  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$
- iii)  $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
- iv)  $\mathbf{u} \times (t\mathbf{v}) = t(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$
- v)  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
- vi)  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$
- vii)  $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\theta$ ,

donde  $\theta$  (entre  $0$  y  $\pi$ ) es el ángulo entre  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ .

**Demostración.** La propiedad (i) es justo la motivación que usamos para definir el producto cruz (que es ortogonal a  $\mathbf{u}$  y a  $\mathbf{v}$ ). La propiedad (ii) se conoce como *antisimetría*: las variables no conmutan sino que *anticommutan*. Las propiedades (iii) y (iv) son la *linealidad* del producto cruz, que junto con (ii) dan que también es lineal en la primera variable; se dice que es *bilineal*. Todas ellas se siguen directamente de la definición dada en (5.1) y se las dejamos como ejercicio al lector.

El inciso (v) es igualmente fácil pero es tan importante que preferimos darle un pequeño espacio. Al desarrollar ambos lados (según las definiciones de los productos cruz e interior, y usando la notación que más conviene, que es la de subíndices para las coordenadas:  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  y  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ ) se obtiene una

suma de monomios de la forma  $\pm u_i v_j w_k$  con  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ . A saber, siguiendo el orden de  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$  y la correspondiente fórmula (5.1) para  $(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ , tenemos

$$\begin{aligned} & u_1 (v_2 w_3 - v_3 w_2) + u_2 (v_3 w_1 - v_1 w_3) + u_3 (v_1 w_2 - v_2 w_1) \\ = & u_1 v_2 w_3 + u_2 v_3 w_1 + u_3 v_1 w_2 - (u_1 v_3 w_2 + u_2 v_1 w_3 + u_3 v_2 w_1), \end{aligned}$$

que son todas las posibles permutaciones de los tres índices. Nótese que las que tienen signo positivo son las tres que preservan el orden cíclico  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$  y las que tienen menos son las tres que lo invierten. Para concluir  $(\mathbf{v})$  basta ver que al desarrollar  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$  se obtienen de nuevo los seis posibles monomios y con los mismos signos, aunque en diferente orden. Esta función que asocia a tres vectores un “numerito” es el *determinante* y la estudiaremos con detalle más adelante.

La razón geométrica de  $(\mathbf{vi})$  es que cualquier vector ortogonal a  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$  está contenido en el plano que generan  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ , y por tanto se expresa en términos de ellos. Pero que los coeficientes sean tan nítidos es agradable. Para demostrarlo hay que desarrollar

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - v_2 u_3 \\ u_3 v_1 - v_3 u_1 \\ u_1 v_2 - v_1 u_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}.$$

Hagamos con cuidado la primera coordenada; las otras dos son análogas y se dejan al lector o bien se siguen de la simetría en el uso de los subíndices. Al aplicar de nuevo la fórmula del producto cruz se tiene que la primera coordenada es

$$\begin{aligned} & (u_3 v_1 - v_3 u_1) w_3 - (u_1 v_2 - v_1 u_2) w_2 \\ = & (u_3 w_3 + u_2 w_2) v_1 - (v_3 w_3 + v_2 w_2) u_1 \\ = & (u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3) v_1 - (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3) u_1 \\ = & (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) v_1 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) u_1, \end{aligned}$$

que claramente es la primera coordenada de  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{u}$ , y entonces

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{u}.$$

Probemos, antes de entrarle a  $(\mathbf{vii})$ , que de aquí se sigue que el producto cruz **no es asociativo** (más que un “producto algebraico” es un “producto geométrico”). Usando la antisimetría,  $(\mathbf{ii})$ , y la fórmula para un doble producto,  $(\mathbf{vi})$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= -(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{u} \\ &= -((\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{v}) \\ &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{w}, \end{aligned}$$

que no tiene por qué ser igual a  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ . Geométricamente, este último está en el plano  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  y el que desarrollamos en el  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ .

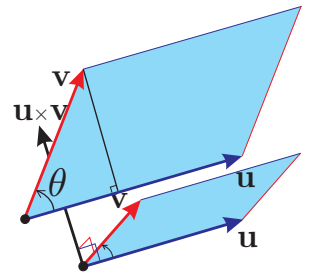
Y para demostrar (vii) desarrollemos  $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2$  usando, respectivamente, (v) y (vi) en las dos primeras igualdades:

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})) \\ &= \mathbf{u} \cdot ((\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{v}) \\ &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \\ &= |\mathbf{v}|^2 |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 \cos^2 \theta \\ &= |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 (1 - \cos^2 \theta) = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 \sin^2 \theta.\end{aligned}$$

De donde se sigue (vii), pues todos los factores son positivos.  $\square$

**Corolario 5.3** La magnitud de  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  es el área del paralelogramo generado por  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ .

**Demostración.** Si tomamos a  $\mathbf{u}$  como base del paralelogramo, entonces su altura es  $|\mathbf{v}| \sin \theta$ ; y el corolario se sigue de (vii).  $\square$



**Corolario 5.4** Los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son paralelos si y sólo si su producto cruz,  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ , es igual a  $\mathbf{0}$ .

**Demostración.** Esto se sigue de (vii), pues  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  (no nulos) son paralelos si y sólo si el ángulo  $\theta$  entre ellos es  $0$  o  $\pi$ , y esto sucede si y sólo si  $\sin \theta = 0$ .  $\square$

Nótese además que si  $\mathbf{u}$  o  $\mathbf{v}$  son el vector cero, entonces su producto cruz también es cero. Por lo tanto tenemos que  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  generan un plano si y sólo si su producto cruz es distinto de cero, y en este caso  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  es normal a ese plano.

**EJERCICIO 5.3** Encuentra una ecuación normal para los siguientes planos:

$$\Pi_1 = \{(2 + t - s, 1 - 2t + s, 3t - s - 3) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$$

$$\Pi_2 = \{(\alpha + \beta - 2\gamma, 2\alpha - 2\beta + \gamma, 3\alpha + \beta - \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}; \alpha + \beta + \gamma = 1\}$$

$$\Pi_3 = \{(2\alpha + \beta - \gamma, \alpha - 3\beta + \gamma, \alpha - \beta + \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}; \alpha + \beta + \gamma = 1\}$$

$$\Pi_4 = \{(3 + 2t + s, 2s - t, t + 5s - 3) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$$

**EJERCICIO 5.4** ¿Cuáles de las siguientes cuartetas de puntos en  $\mathbb{R}^3$  son coplanares? Y si lo son define el plano en el que están.

$$\mathbf{a} = (2, -1, 0), \mathbf{b} = (1, 2, -2), \mathbf{c} = (0, 1, 0), \mathbf{d} = (4, -1, -1).$$

$$\mathbf{a} = (2, -1, 0), \mathbf{b} = (1, 2, -2), \mathbf{c} = (0, 1, 0), \mathbf{d} = (3, -1, -1).$$

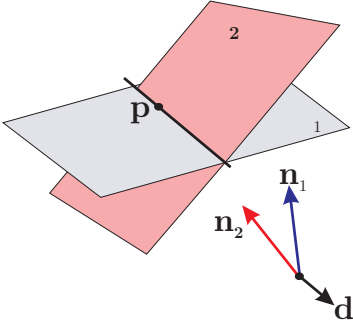
**EJERCICIO 5.5** Encuentra un criterio general para saber si cuatro puntos  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$  son coplanares o no, y demuéstralo.

## 5.1.2 Intersección de planos

Consideremos dos planos dados por una ecuación normal

$$\Pi_1 : \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{x} = d_1 \quad (5.2)$$

$$\Pi_2 : \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{x} = d_2.$$



Supongamos que sus dos vectores normales no son paralelos. Entonces el vector  $\mathbf{d} := \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$  es no nulo por el Corolario 5.4. Ésta es la única “dirección común” a los dos planos, pues es normal a los dos vectores normales; de tal manera que la recta donde se intersectan debe tener esa dirección. Supongamos que  $\mathbf{p}$  es una solución particular al sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas anterior, es decir, que  $\mathbf{p}$  es un punto en la

intersección:  $\mathbf{p} \in \Pi_1 \cap \Pi_2$ . Vamos a demostrar que entonces la recta

$$\ell = \{\mathbf{p} + t \mathbf{d} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

es precisamente la intersección.

Primero veamos que un punto en  $\ell$  satisface las ecuaciones (5.2). Para  $i = 1, 2$  se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_i \cdot (\mathbf{p} + t \mathbf{d}) &= \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{p} + \mathbf{n}_i \cdot (t \mathbf{d}) \\ &= \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{p} + t (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{d}) = \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{p} = d_i \end{aligned}$$

pues  $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{d} = 0$  por definición de  $\mathbf{d}$ . Lo que demuestra que  $\ell \subset \Pi_1 \cap \Pi_2$ . Y por el otro lado, si  $\mathbf{q} \in \Pi_1 \cap \Pi_2$  probaremos que  $\mathbf{q} - \mathbf{p}$  es paralelo a  $\mathbf{d}$ , para lo cual usamos el criterio del Corolario 5.4 y el Teorema 5.2:

$$\begin{aligned} \mathbf{d} \times (\mathbf{q} - \mathbf{p}) &= \mathbf{d} \times \mathbf{q} - \mathbf{d} \times \mathbf{p} \\ &= (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) \times \mathbf{q} - (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) \times \mathbf{p} \\ &= (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{q}) \mathbf{n}_2 - (\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{q}) \mathbf{n}_1 - (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{p}) \mathbf{n}_2 + (\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{p}) \mathbf{n}_1 \\ &= d_1 \mathbf{n}_2 - d_2 \mathbf{n}_1 - d_1 \mathbf{n}_2 + d_2 \mathbf{n}_1 = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Hemos completado la parte central de la demostración del siguiente teorema.

**Teorema 5.5** *Dos planos en  $\mathbb{R}^3$  se intersectan en una recta si y solo si sus vectores normales no son paralelos. En caso contrario, o no se intersectan (son paralelos) o son el mismo plano.*

**Demostración.** Nos falta nada más afinar detalles. Primero, suponiendo que los vectores normales no son paralelos, tenemos que ver que existe una solución particular  $\mathbf{p}$  como la que usamos arriba; y segundo, observar que cuando son paralelos, que exista o no esta solución particular determina los dos casos correspondientes. Para esto, consideremos al sistema (5.2) en coordenadas:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= d_2. \end{aligned}$$



Para encontrar una solución particular podemos asignar un valor arbitrario a cualquiera de las variables y resolver el sistema  $2 \times 2$  que queda. Lo más fácil es hacerla 0; por ejemplo si  $z = 0$  tenemos un sistema  $2 \times 2$  clásico (en  $x$  y  $y$ ) que tiene solución única dependiendo de su determinante. Puesto que las coordenadas del producto cruz son precisamente ( $\pm$ ) estos determinantes, que los vectores normales no sean paralelos implica que alguno de los tres subsistemas  $2 \times 2$  que se obtienen al hacer una variable 0 tiene determinante no nulo y por tanto tiene solución. En el caso en que son paralelos los vectores normales, entonces los lados izquierdos son múltiplos: si las constantes lo son por el mismo factor, definen al mismo plano, pero si no lo son no existen soluciones comunes.  $\square$

Así que las rectas en  $\mathbb{R}^3$  se pueden determinar por dos ecuaciones lineales o bien describirse paramétricamente.

---

**EJERCICIO 5.6** Encuentra una descripción paramétrica para la recta de intersección de las siguientes parejas de planos:

$$\Pi_1 : 2x + y - z = 1; \quad \Pi_2 : -2x + y - 3z = 3.$$

$$\Pi_1 : x - y - z = 0; \quad \Pi_2 : x + y - z = 1.$$

$$\Pi_1 : 2x + y - z = 2; \quad \Pi_2 : -x + y - 2z = 2.$$

$$\Pi_1 : 2x + z = 1; \quad \Pi_2 : -2x + z = 3.$$

**EJERCICIO 5.7** Describe las siguientes rectas *intrínsecamente*, es decir, como las soluciones de dos ecuaciones lineales:

$$\ell_1 = \{(2 + t, 1 - 2t, 3t - 3) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$$\ell_2 = \{(s, 2 - 3s, 2s - 3) \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

**EJERCICIO 5.8** Sea  $\Pi$  el plano dado por la ecuación  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = c$  y sea  $\ell$  la recta  $\{\mathbf{p} + t\mathbf{d} \mid t \in \mathbb{R}\}$ . Demuestra (sustituyendo la expresión de los puntos de  $\ell$  en la ecuación de  $\Pi$ ) que  $\Pi$  y  $\ell$  se intersectan en un único punto si y sólo si  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{d} \neq 0$ . Observa que si no es así (es decir, si  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{d} = 0$ ) entonces la dirección  $\mathbf{d}$  es paralela al plano; por tanto demostraste que un plano y una recta se intersectan en un único punto si y sólo si la dirección de la recta no es paralela al plano.

**EJERCICIO 5.9** Sean  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  tres vectores tales que  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \neq 0$ . Demuestra que tres planos normales a  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  respectivamente se intersectan en un único punto.

---

### 5.1.3 El determinante y la orientación

Dados tres vectores  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ , definimos su *determinante* como el número real

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \\ &= (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} \\ &= (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}, \end{aligned} \tag{5.3}$$

donde hemos usado la propiedad **(v)** del producto cruz y la simetría del producto punto. El determinante tiene el siguiente significado geométrico.

**Proposición 5.6** *Dados tres vectores  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ , su determinante es el volumen signado del paralelepípedo que definen, y el signo corresponde a su “orientación”.*

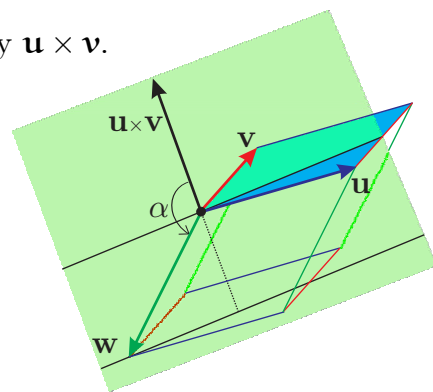
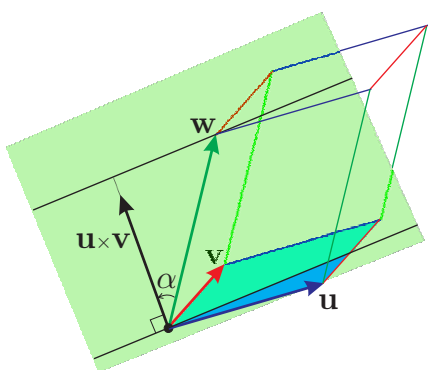
**Demostración.** Consideremos la fórmula  $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ . Sabemos que  $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$  es el área del paralelogramo  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  que podemos tomar como base del paralelepípedo en cuestión. Y por la fórmula geométrica del producto punto tenemos entonces que

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| |\mathbf{w}| \cos \alpha,$$

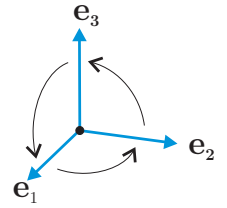
donde  $\alpha$  es el ángulo entre  $\mathbf{w}$  y  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ .

Supongamos primero que  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ . Entonces, en el plano generado por  $\mathbf{w}$  y  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  (en el que el plano  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  —generado por  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ , recuérdese— se ve como la línea perpendicular a  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ), es fácil ver que la altura del paralelepípedo es  $|\mathbf{w}| \cos \alpha$  y se sigue el resultado: tenemos que  $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  es “base por altura”. Si  $\pi/2 \leq \alpha \leq \pi$  entonces  $|\mathbf{w}| \cos \alpha$  es también esa altura pero con signo negativo. Corresponde a que  $\mathbf{w}$  vive en el otro lado del plano  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  en el que está  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ . Pero en valor absoluto,  $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  sigue siendo el volumen del paralelepípedo que definen  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ .  $\square$

El producto cruz  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  “escoge” un lado *positivo* del plano  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ ; los vectores  $\mathbf{w}$  que están en ese lado (un *semiespacio*) ven el giro de  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$  como la orientación positiva del plano  $\mathbb{R}^2$  (en contra de las manecillas del reloj). Por convención en cómo se coloca la base canónica, el lado positivo corresponde a la regla de la mano derecha: si con la punta de los dedos de la mano derecha simulamos el giro de  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$ , entonces el pulgar apunta hacia el lado positivo del plano, hacia  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ . Para los vectores  $\mathbf{w}$  que están en el otro lado, el *negativo*, decimos que la terna  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  induce la *orientación negativa* a  $\mathbb{R}^3$ .



Así, por ejemplo, la terna canónica  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  en su orden canónico tiene orientación positiva, pero la terna  $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$  tiene orientación negativa. De tal manera que si ponemos las coordenadas de la pantalla de una computadora con el eje  $x$  ( $\mathbf{e}_1$ ) horizontal a la derecha (como se lee), y el segundo eje ( $y$  o el vector  $\mathbf{e}_2$ ) hacia arriba; entonces el lado positivo del eje  $z$  (o el tercer vector canónico  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ ) apunta hacia nosotros. Pero si decidiéramos que el lado positivo del eje  $z$  vaya hacia atrás, hacia el otro lado de la pantalla, y disponemos los vectores de acuerdo con estas coordenadas, entonces las ternas con determinante positivo corresponden a las que cumplen la regla de la mano izquierda, pues la base canónica lo hace y se cumple que  $\det(\mathbf{I}) = 1 > 0$ . En fin, es una convención que depende de cómo se sitúe la base canónica; aquí podemos suponer que es como en la figura, con la regla de la mano derecha.



**Proposición 5.7** Sean  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  dos vectores que generan un plano  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces  $\mathbf{w}$  está en el plano  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  si y sólo si  $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ .

**Demostración.** Por el Corolario 5.4 tenemos que  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ . Entonces el plano definido por la ecuación  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{x} = 0$  es precisamente el plano generado por  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ , y se sigue la proposición, pues  $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ .  $\square$

En términos de la Proposición anterior,  $\mathbf{w}$  está en el plano  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  si y sólo si el volumen del paralelepípedo definido por  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  es cero.

---

**EJERCICIO 5.10** Demuestra que el determinante cumple las siguientes propiedades

- i)  $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\det(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = -\det(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = -\det(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u})$
- ii)  $\det(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$
- iii)  $\det(t\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = t \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$
- iv)  $\det(\mathbf{u} + \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \det(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$

**EJERCICIO 5.11** Demuestra, usando únicamente el ejercicio anterior, que el determinante no cambia si sumamos un múltiplo de un vector a alguno de los otros, es decir, que

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v} + t\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}).$$


---

### 5.1.4 Sistemas de ecuaciones

Aplicaremos ahora el producto cruz a la resolución de sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. Como vimos en el Capítulo 3, tal sistema se puede escribir como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

donde  $A$  es una matriz de  $3 \times 3$ ,  $\mathbf{x}$  es el vector variable, o de las incógnitas  $(x, y, z)$ , y  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  es un vector constante. Si denotamos por  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  a las columnas de  $A$  (es decir, si  $A = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ ) entonces es natural definir el *determinante de la matriz  $A$*  como

$$\det A = \det (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$

y tenemos:

**Teorema 5.8** *El sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  tiene solución única si y sólo si  $\det A \neq 0$ .*

**Demostración.** Si pensamos el sistema de ecuaciones  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  como tres ecuaciones lineales y por lo tanto, si son no triviales, como tres planos, la solución del sistema es la intersección de los tres planos. Por la Sección 5.1.2 y los Ejercicios 5.8 y 5.9 se tiene una buena parte del Teorema. Pero nótese que entonces los vectores importantes, los normales a los planos, corresponden a los renglones de  $A$  (digamos que son  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ ) y habría que revisar que el determinante se calcula igual ( $\det A = (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{n}_3$ , es decir,  $\det A = \det A^T$ ). De alguna manera, ya hicimos parte del trabajo. Pero veamos otra demostración pensando en la matriz  $A$  como tres vectores columna.

Con la notación del párrafo anterior ( $A = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ , y  $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$  el vector variable o incógnita), el sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  es equivalente a la ecuación vectorial

$$x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w} = \mathbf{b},$$

donde todos los vectores están dados. Tomando el producto punto con el producto cruz de dos de los vectores se eliminan las dos variables correspondientes. Así, para eliminar  $x$  y  $y$  de un solo golpe, tomamos el producto punto con  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$  para obtener la ecuación

$$z((\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{b},$$

pues  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$  es ortogonal a  $\mathbf{u}$  y a  $\mathbf{v}$ . De aquí, si  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \det A \neq 0$ , se tiene que

$$z = \frac{(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{b}}{\det A}.$$

Y análogamente, por (5.3),  $\det A \neq 0$  implica que

$$\mathbf{y} = \frac{(\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{b}}{\det A}, \quad \mathbf{x} = \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{b}}{\det A}.$$

Por lo tanto, si  $\det A \neq 0$  entonces la solución de  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  es única y está dada por las fórmulas anteriores que son conocidas como "*la regla de Kramer*".

Ahora tenemos que demostrar el inverso. Supongamos entonces que  $\det A = 0$  y hay que ver que el sistema no tiene solución única. Expresemos el determinante como  $\det A = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ . Si  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}$  entonces por el Corolario 5.4 tenemos que  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son paralelos, y si  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$ , entonces por la Proposición 5.7 tenemos que

$\mathbf{w} \in \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ . En ambos casos podemos afirmar que existen números  $x_0, y_0$  y  $z_0$  con alguno de ellos distinto de cero que cumplen

$$x_0 \mathbf{u} + y_0 \mathbf{v} + z_0 \mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad (5.4)$$

pues en el primer caso ( $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ) tenemos una igualdad  $\mathbf{u} = s \mathbf{v}$  o  $\mathbf{v} = r \mathbf{u}$ , y en el segundo ( $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ) podemos expresar  $\mathbf{w} = r \mathbf{u} + s \mathbf{v}$ ; y de cualquiera de estas igualdades obtenemos una expresión (5.4) con alguno de los coeficientes igual a 1 al pasar todos los sumandos al lado izquierdo.

Esto implica que el sistema homogéneo  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  no tiene solución única pues encontramos una diferente de la *trivial* que es  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Resumiendo, si suponemos que  $\det A = 0$ , hemos demostrado que existe  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$  tal que  $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ . Ésta será la base para demostrar que para cualquier  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  la solución de  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  no es única:

...Dibujo

Si el sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  no tiene solución (el caso, por ejemplo, en el que  $\mathbf{w}$  está en el plano generado por  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  pero  $\mathbf{b}$  no está en ese plano) entonces, en particular, **no** hay solución única. Pero si  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  sí tiene solución, digamos que  $\mathbf{x}_1$  es tal que  $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}$ , entonces  $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0$  también es solución, pues

$$A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}.$$

Y como  $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0$  pues  $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$  entonces la solución **no** es única. Dicho de otra manera, si existen  $x_1, y_1$  y  $z_1$  tales que

$$x_1 \mathbf{u} + y_1 \mathbf{v} + z_1 \mathbf{w} = \mathbf{b},$$

entonces también se cumple que

$$(x_1 + x_0) \mathbf{u} + (y_1 + y_0) \mathbf{v} + (z_1 + z_0) \mathbf{w} = \mathbf{b}.$$

Lo cual concluye la demostración del teorema pues que no haya solución única quiere decir que o bien no hay solución o si sí la hay, entonces hay muchas (en el fondo hemos demostrado que cuando las hay, hay tantas soluciones como las hay para el sistema homogéneo  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ).  $\square$

---

**EJERCICIO 5.12** Sea  $A = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  una matriz de  $3 \times 3$  con  $\det A \neq 0$ . Demuestra que entonces tiene matriz inversa  $A^{-1}$  y que ésta está dada por la fórmula

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} (\mathbf{v} \times \mathbf{w})^\top \\ (\mathbf{w} \times \mathbf{u})^\top \\ (\mathbf{u} \times \mathbf{v})^\top \end{pmatrix},$$

donde, recuerda,  $\mathbf{x}^\top$  es el vector renglón transpuesto del vector columna  $\mathbf{x}$ .

---

### 5.1.5 Dependencia e independencia lineal

En la demostración del regreso (si  $\det A = 0$ , la solución no es única) del teorema anterior hubo un paso fundamental que amerita comentarios y profundización. El de encontrar una solución no trivial a la ecuación homogénea  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , porque es la manera más democrática y general de decir que las columnas de la matriz  $A$  no son tan generales como podrían ser; que en vez de generar todo  $\mathbb{R}^3$  sólo generan un plano o una línea o el origen (si las tres son  $\mathbf{0}$ ). Amerita una pomposa definición que funciona en general, aunque en este libro sólo se le dé uso en instancias pequeñas ( $k \leq 4$  y  $n \leq 3$ ).

**Definición 5.1.1** Sean  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$  vectores en  $\mathbb{R}^n$ . Se dice que son *linealmente independientes* si

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{u}_i = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0,$$

es decir, si la única combinación lineal de ellos que da el vector  $\mathbf{0}$  es la *trivial*. Y si, por el contrario, existen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  no todas ellas cero, tales que  $\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0}$ , entonces se dice que son *linealmente dependientes*.

Así se tiene que un vector es linealmente dependiente si y sólo si es el vector  $\mathbf{0}$ ; que dos vectores no nulos son linealmente dependientes si y sólo si son paralelos, y que tres vectores son linealmente dependientes si y sólo si los tres están en un mismo plano por el origen. Estos son los casos que nos interesan y han quedado debida y elegantemente incluidos en una sola definición. Podemos decir entonces que el paso fundamental de la demostración anterior fue ver que  $\det A = 0$  si y sólo si las columnas de  $A$  son linealmente dependientes. A estas matrices (con determinante cero) se les llama matrices *singulares*, y correspondientemente una matriz  $A$  es *no singular* si  $\det A \neq 0$ .

A manera de resumen, enlistemos una serie de equivalencias, cuya demostración o bien ya dimos o bien falta sólo algún argumento sencillo que dejamos como ejercicio mental para el lector.

**Teorema 5.9** Sea  $A = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  una matriz  $3 \times 3$ , y sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  su función lineal asociada (es decir, definida por  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ ). Entonces son equivalentes:

- i)  $\det A \neq 0$  ( $A$  es no singular)
- ii)  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  son linealmente independientes
- iii) el sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  tiene solución única para alguna  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$
- iv) el sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  tiene solución única para toda  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$
- v)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbb{R}^3$  (i.e.,  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  generan  $\mathbb{R}^3$ )
- vi)  $f$  es inyectiva
- vii)  $f$  es suprayectiva
- viii)  $f$  es biyectiva
- ix)  $A$  es invertible (existe  $A^{-1}$  tal que  $AA^{-1} = I$ ).

**EJERCICIO 5.13** Demuestra que tres planos en  $\mathbb{R}^3$  se intersectan en un único punto si y sólo si sus tres vectores normales son linealmente independientes.

**EJERCICIO 5.14** Sean  $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$  linealmente independientes, y sean  $\ell_1$  y  $\ell_2$  dos rectas cualesquiera con direcciones  $\mathbf{d}_1$  y  $\mathbf{d}_2$  respectivamente. Demuestra que existe una única recta  $\ell_3$  con dirección  $\mathbf{d}_3$  que pasa por  $\ell_1$  y  $\ell_2$ .

...Dibujo

## 5.2 La esfera

Ahora sí, estudiaremos algo de la geometría de la esfera:

$$\mathbb{S}^2 := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| = 1 \},$$

es decir, el conjunto de todos los vectores *unitarios* (de norma 1) en  $\mathbb{R}^3$ . No está de más remarcar que es la frontera de la “bola sólida”  $\mathbb{B}^3 := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| \leq 1 \}$  y que si bien esta última tiene tres dimensiones, su frontera, la esfera, tiene sólo dos; así que el exponente se refiere a la dimensión (se lee “ese dos”). Y conviene esta notación pues es parte de una familia, la *esfera de dimensión  $n$*  vive en el espacio euclidiano de la dimensión siguiente,  $\mathbb{R}^{n+1}$ , y ahí se define como el conjunto de vectores de norma 1. De esta familia ya estudiamos el círculo unitario  $\mathbb{S}^1$ , pero también hay una esfera de dimensión 3 y es interesante irse preguntando qué cosas valen ahí, aunque aquí sólo nos referiremos a la de dimensión 2. Intrínsecamente  $\mathbb{S}^2$  es una superficie y su símil más parecido en el mundo real son las pompas de jabón.

Por su parte, la esfera es la representante teórica de cosas importantes como la superficie de la Tierra o el firmamento. Siguiendo este símil, podemos dar dos coordenadas angulares para sus puntos. El *ecuador* consta de los puntos

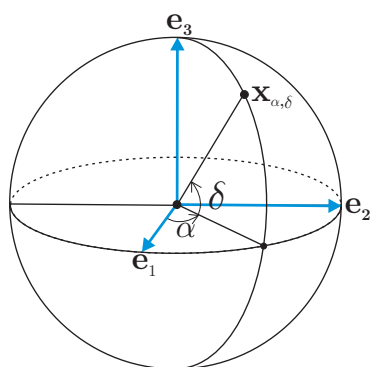
$$\{ (\cos \alpha, \sin \alpha, 0) \mid \alpha \in [0, 2\pi] \},$$

donde  $\alpha$  es llamada la *longitud*, y se identifica naturalmente con el círculo unitario  $\mathbb{S}^1$ . Y luego, para una longitud  $\alpha$  dada podemos variar la *altitud*  $\delta \in [-\pi, \pi]$  para obtener el punto

$$\mathbf{x}_{\alpha, \delta} = (\cos \delta \cos \alpha, \cos \delta \sin \alpha, \sin \delta),$$

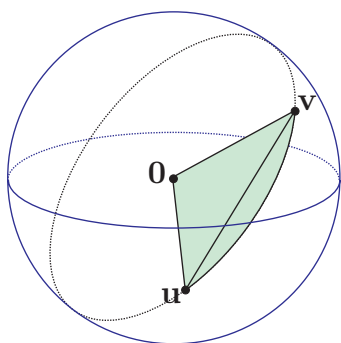
que efectivamente está en la esfera pues

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_{\alpha, \delta}|^2 &= (\cos \delta \cos \alpha)^2 + (\cos \delta \sin \alpha)^2 + \sin^2 \delta \\ &= \cos^2 \delta (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + \sin^2 \delta \\ &= \cos^2 \delta + \sin^2 \delta = 1. \end{aligned}$$



Así que podemos llegar a cualquier punto de la esfera por sus dos coordenadas, longitud  $\alpha$  y altitud  $\delta$ , pero para el “polo norte”,  $\mathbf{e}_3$ , y el “polo sur”,  $-\mathbf{e}_3$ , la longitud no está bien definida; cualquiera es buena. Los mapas planos de la Tierra usan estas coordenadas, pero entonces los polos “son” las líneas horizontales extremas y las distancias no corresponden a las distancias reales en la esfera. Tampoco las líneas rectas en un mapa corresponden a las trayectorias más cortas en la esfera.

### 5.2.1 Líneas esféricas y polaridad



Consideremos dos puntos  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  en la esfera  $\mathbb{S}^2$ . ¿Cuál será la trayectoria más corta para ir de  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$ ? Nos referimos a la trayectoria dentro de  $\mathbb{S}^2$ , es decir, sin salir nunca de la esfera, como si fuéramos una hormiga sobre ella o un ser humano en la Tierra. En  $\mathbb{R}^3$  la trayectoria más corta es el segmento  $\overline{\mathbf{u}\mathbf{v}}$  entre los puntos; pero éste inmediatamente deja de estar en la esfera, y su interior cae dentro del interior de la bola sólida. Lo que más se parece al segmento  $\overline{\mathbf{u}\mathbf{v}}$  dentro de la esfera es su proyección desde el origen, su sombra en la esfera pensando que el centro de la esfera, el origen, es un foco. Pues entre más grande sea el radio de un círculo más se parece localmente a

una recta y los círculos más grandes que hay en la esfera son los que tienen su centro en el origen, y que por tanto tienen radio uno.

No vamos a demostrar que las trayectorias más cortas (o eficientes) dentro de la esfera son los *círculos máximos* (*i.e.*, intersección de la esfera con planos por el origen) pues ello requiere herramientas de cálculo. Pero las vamos a tomar como definición de *líneas esféricas* (que, aunque suene contradictorio, viene de “líneas en la esfera”) siguiendo la intuición de que son lo más parecido a las líneas rectas dentro de  $\mathbb{S}^2$ .

**Definición 5.2.1** Una *línea* en la esfera, o una *línea esférica* es la intersección de  $\mathbb{S}^2$  con un plano por el origen.

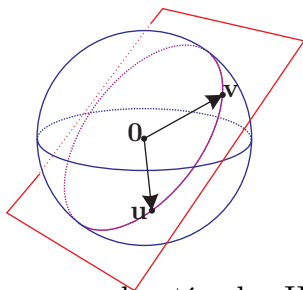
Nótese que cada línea esférica es (una copia de) el círculo unitario  $\mathbb{S}^1$  pues consta de los vectores de norma 1 en un plano.

Veamos ahora que *por dos puntos  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  en la esfera  $\mathbb{S}^2$  siempre pasa una línea esférica*. Hay que considerar dos casos. Si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son no paralelos, entonces generan un plano (por el origen)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  de tal manera que la línea esférica

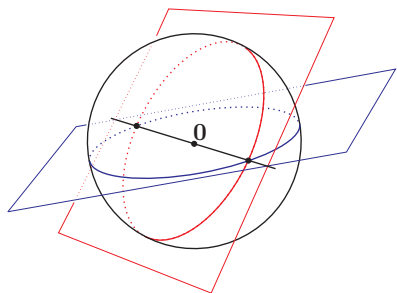
$$\xi = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \cap \mathbb{S}^2$$

los contiene a ambos. Y si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son paralelos entonces están contenidos en una línea por el origen y (al ser de norma 1) o bien son iguales, o bien son *antípodos*, es decir,  $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$  (“forman un  $\mathbb{S}^0$ ”); y en este caso, todas las líneas por uno también contienen

el antípoda. Hemos demostrado que por cualquier par de puntos pasa una línea que además es única si y sólo si no son antípodos.







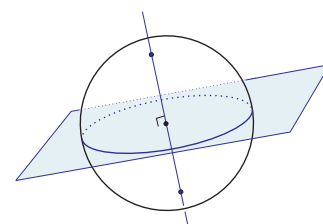
Esta condición es muy parecida a la de la geometría clásica del plano euclidiano donde por cualquier par de puntos pasa una recta. Pero a diferencia del plano euclidiano, en la esfera no hay paralelismo.

Cualquier par de líneas esféricas se intersectan en un par de puntos antípodas. Como los planos que las definen pasan por el origen, entonces se intersectan en una línea por él, que intersecta la esfera en una pareja de antípodas.

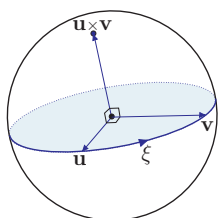
## Polaridad

Puesto que en  $\mathbb{R}^3$  tenemos que líneas y planos por el origen están naturalmente apareados por ortogonalidad, la esfera hereda este apareamiento que llamaremos *polaridad*:

Decimos que una línea esférica y un par antípoda en  $\mathbb{S}^2$  son *polares* si el plano por el origen y la línea por el origen correspondientes son ortogonales. La polaridad da una correspondencia biyectiva natural entre los  $\mathbb{S}^1$  y los  $\mathbb{S}^0$  de  $\mathbb{S}^2$ . En la Tierra, por ejemplo, el ecuador es polar de los polos (norte y sur).



Si tomamos en cuenta la orientación de  $\mathbb{R}^3$  podemos refinar nuestra noción de polaridad. A una línea esférica  $\xi$  le podemos dar dos orientaciones, es decir, maneras preferentes de viajar en ella. Si denotamos por  $\vec{\xi}$  a la línea esférica  $\xi$  *orientada* (con una orientación dada), entonces de su par antípoda de polos podemos escoger uno al que llamaremos su *punto polar*: tomamos cualquier punto  $\mathbf{u} \in \xi$ , viajamos en la orientación preferida de  $\vec{\xi}$  un cuarto de vuelta para llegar a un punto  $\mathbf{v}$ , y luego tomamos  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  (por la manera que escogimos  $\mathbf{v}$  se tiene que  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \in \mathbb{S}^2$ ) y el resultado no depende de  $\mathbf{u}$ . Geométricamente, y de acuerdo con nuestra convención de cómo tomar la base canónica, si con los dedos de la mano derecha emulamos, seguimos, la orientación de  $\vec{\xi}$ , el pulgar apunta hacia su punto polar; o bien, si caminamos sobre  $\vec{\xi}$  de frente y de acuerdo con su orientación, a nuestra izquierda está su punto polar. Se tiene entonces que a las dos orientaciones de  $\xi$  corresponden sus dos puntos antípodas polares (pues  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$ ); y a cada punto de  $\mathbb{S}^2$  le corresponde una línea esférica orientada, llamada su *polar*.



### 5.2.2 Distancias y ángulos

Hemos usado intuitivamente que hay una distancia natural en la esfera  $\mathbb{S}^2$ , formalicémosla. Dados dos puntos  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  en  $\mathbb{S}^2$ , hay una línea esférica  $\xi$  que los contiene; como es un círculo de radio 1, el recorrido mínimo entre  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  a lo largo de  $\xi$  es precisamente el ángulo, medido en radianes, entre los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ . Así que hay

que definir la *distancia en la esfera* de  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$  como

$$d_{\mathbb{S}^2}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \text{ang}(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Recordando la definición de ángulo entre vectores (1.10.2) que se deriva de la fórmula geométrica del producto interior,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos(\text{ang}(\mathbf{u}, \mathbf{v}))$ , y usando que  $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = 1$  (pues están en  $\mathbb{S}^2$ ) se obtiene que

$$d_{\mathbb{S}^2}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \arccos(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}).$$

Cuando sea obvio que nos referimos a la distancia en  $\mathbb{S}^2$ , y no se confunda con la distancia en  $\mathbb{R}^3$ , olvidaremos el subíndice. En la práctica, la fórmula equivalente que más utilizaremos es

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \cos(d_{\mathbb{S}^2}(\mathbf{u}, \mathbf{v})).$$

Como el arccoseno toma valores en el intervalo  $[0, \pi]$ , se tiene entonces que para todo  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  en  $\mathbb{S}^2$ ,

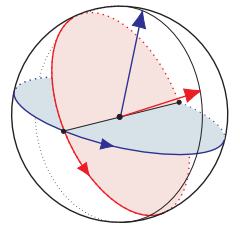
$$0 \leq d_{\mathbb{S}^2}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq \pi,$$

donde las igualdades, o extremos, se dan sólo cuando  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son el mismo punto, y su distancia es  $0$ , o bien cuando son antípodos y logran el máximo  $\pi$ . Y es claro también que la línea polar a un punto  $\mathbf{u}$  consiste justo de los puntos a distancia  $\pi/2$  de él (y que equidistan de su antípoda).

Para ver que esta distancia cumple con todas las de la ley (las condiciones del Teorema 1.11.1) nos falta probar la desigualdad del triángulo,  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ . Pero conviene dejarlo para después, pues se usará la ley (esférica) de los cosenos en la que interviene la noción de ángulo.

Como sucedió en el plano, el ángulo entre dos líneas no está bien definido, pues se puede tomar cualquiera de los dos ángulos complementarios que definen. Pero esta ambigüedad se pierde si las líneas están orientadas y se mide entonces, e intuitivamente, el movimiento angular que gira una en la otra haciendo corresponder las orientaciones. Formalmente, consideremos dos rectas orientadas  $\xi$  y  $\zeta$  (nótese que eliminamos la flechita de la notación, pues aquí estorba más de lo que ayuda) y sean, respectivamente,  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  sus puntos polares. Obsérvese que  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  están en la línea polar al par de antípodos  $\xi \cap \zeta$ , y que al mover  $\mathbf{u}$  hacia  $\mathbf{v}$  en esta línea, la polar a  $\mathbf{u}$  gira justo alrededor de la intersección  $\xi \cap \zeta$  para llevar a  $\xi$ , con la orientación adecuada, a  $\zeta$ . De tal manera que debemos definir el *ángulo* entre  $\xi$  y  $\zeta$  como

$$\text{ang}(\xi, \zeta) := d_{\mathbb{S}^2}(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$



Para que esta fórmula quede únicamente en términos de las líneas orientadas, debemos introducir notación para la polaridad.

**Notación 5.1** Si  $\xi$  es una línea esférica orientada, denotamos por  $\xi^\perp$  (léase “ $\xi$  polar”) a su punto polar; y para un punto  $\mathbf{u} \in \mathbb{S}^2$  denotamos con  $\mathbf{u}^\perp$  a su línea polar orientada. De tal manera que  $(\xi^\perp)^\perp = \xi$  y  $(\mathbf{u}^\perp)^\perp = \mathbf{u}$ . (No hay que confundir la notación con el compadre ortogonal en  $\mathbb{R}^2$ , que ya no usaremos.)

Y entonces tenemos que si  $\xi$  y  $\zeta$  son líneas orientadas, y  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  puntos en  $\mathbb{S}^2$ :

$$\text{ang}(\xi, \zeta) = d_{\mathbb{S}^2}(\xi^\perp, \zeta^\perp) \quad \text{y} \quad d_{\mathbb{S}^2}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \text{ang}(\mathbf{u}^\perp, \mathbf{v}^\perp), \quad (5.5)$$

y además que

$$\mathbf{u} \in \xi \quad \Leftrightarrow \quad \xi^\perp \in \mathbf{u}^\perp.$$

### Ángulos diédricos

Generalizando, se puede definir el ángulo entre dos planos para que el ángulo entre dos planos por el origen sea justo el ángulo entre las líneas esféricas correspondientes. De nuevo hay una ambigüedad, pues puede uno referirse a un ángulo o su complementario, que se resuelve orientando. Si un *plano orientado* es un plano junto con un lado positivo distinguido, *i.e.*, un vector normal, unitario digamos, especificado, entonces el ángulo entre dos planos orientados (*ángulo diédrico* o *diedro*, como a veces se le llama) es el ángulo entre sus vectores normales.

Otra manera de verlo, o medirlo, es tomando un plano  $\Pi$  perpendicular a los dos planos dados, es decir, ortogonal a su línea de intersección. En  $\Pi$ , los dos planos se intersectan en dos rectas; la orientación como lado preferido nos da líneas orientadas, y el ángulo diédrico entre los planos es el ángulo entre las líneas de intersección. O bien es el ángulo entre las líneas esféricas que definen al intersectarlos con una esfera centrada en su línea de intersección.

**EJERCICIO 5.15** ¿Cómo son los círculos en la esfera? Es decir, ¿cómo son los conjuntos  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2 \mid d_{\mathbb{S}^2}(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = r\}$  con  $\mathbf{u} \in \mathbb{S}^2$  fijo (el centro del círculo) y  $r > 0$  constante (el radio)?

**EJERCICIO 5.16** Demuestra que para cualquier par de puntos  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{S}^2$  se tiene que

$$d_{\mathbb{S}^2}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + d_{\mathbb{S}^2}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}) = \pi.$$

**EJERCICIO 5.17** Sean  $\xi$  y  $\zeta$  dos líneas esféricas. Demuestra que son ortogonales (*i.e.* que  $\text{ang}(\xi, \zeta) = \pi/2$  con cualquier orientación que se les dé a las líneas) si y sólo si  $\xi^\perp \subset \zeta$ , donde  $\xi^\perp$  denota al par antípoda polar a  $\xi$  cuando ésta no tiene orientación preferida.

**EJERCICIO 5.18** Demuestra que por cualquier punto  $\mathbf{u} \in \mathbb{S}^2$  se puede trazar una línea ortogonal a una línea dada  $\xi$ ; y que además ésta es única si y sólo si  $\mathbf{u}$  no es polar de  $\xi$ .

**EJERCICIO 5.19** Sean  $\xi_1$  y  $\xi_2$  dos líneas esféricas ortogonales. Demuestra que hay una única línea  $\xi_3$  ortogonal a ambas. ¿Usaste el hecho de que fueran ortogonales?

**EJERCICIO 5.20** Sean  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  dos puntos no antípodas en  $\mathbb{S}^2$ . Demuestra que la línea por  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  es  $(\mathbf{u}^\perp \cap \mathbf{v}^\perp)^\perp$ , dándole sentido a este abuso de notación.

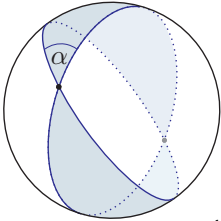
**EJERCICIO 5.21** Demuestra que la distancia esférica se puede escribir en términos de la euclidiana como

$$d_{\mathbb{S}^2}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2 \arcsen(d_{\mathbb{R}^3}(\mathbf{u}, \mathbf{v})/2)$$

y describe la función arcsen.

### 5.2.3 Área y triángulos

En la esfera, los ángulos también miden área. Si tomamos un ángulo entre dos rectas junto con su opuesto por el vértice, obtenemos dos gajos, llamémoslo un *bigajo*, determinado por el ángulo  $\alpha$  entre las rectas. Al crecer  $\alpha$ , el área del bigajo correspondiente, que denotaremos  $g_\alpha$ , crece proporcionalmente —o mejor dicho, linealmente— pues el área del bigajo con ángulo  $\alpha/2$ , digamos, es justo la mitad del área de  $g_\alpha$  ya que dos  $g_{\alpha/2}$ , sin traslaparse, cubren a  $g_\alpha$ ; y lo mismo sucede para cualquier entero  $n$  en vez de 2. Así que debe haber una constante  $c$  tal que



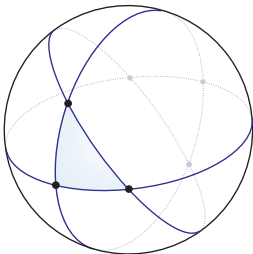
$$\mathcal{A}(g_\alpha) = c \alpha,$$

donde  $\mathcal{A}$  representa el área. Puesto que el área del bigajo de ángulo  $\pi$  ya es el área de toda la esfera, también se tiene que

$$\mathcal{A}(\mathbb{S}^2) = c \pi.$$

Arquímedes calculó el valor de la constante  $c$  para cualquier esfera. Se tiene que  $c = 4r^2$ , donde  $r$  es el radio, y como en nuestro caso el radio es 1, la constante  $c$  que aparece arriba es 4. Aunque lo que nos interesa aquí es que exista, pues su cálculo preciso requiere de ideas de cálculo que están al margen.

Consideremos ahora una tercera línea que no pase por la intersección de las dos anteriores. No es difícil ver que entonces la esfera se parte en ocho *triángulos*, apareados en cuatro parejas de antípodas. Sea  $T$  uno de estos triángulos con  $\alpha, \beta, \gamma$  sus ángulos internos, y sean  $g_\alpha, g_\beta, g_\gamma$  los bigajos correspondientes. Si pintamos el bigajo  $g_\alpha$ , luego todo el bigajo  $g_\beta$  y finalmente el  $g_\gamma$ , habremos pintado toda la esfera; pero tanto al triángulo  $T$  como a su antípoda le dimos tres manos, mientras que a los otros seis sólo una. Midiendo el área por la pintura que se usó (cubrir la esfera  $\mathbb{S}^2$ , dos manos adicionales para  $T$  y dos para su antípoda, que miden lo mismo) se obtiene que



$$\mathcal{A}(g_\alpha) + \mathcal{A}(g_\beta) + \mathcal{A}(g_\gamma) = \mathcal{A}(\mathbb{S}^2) + 4 \mathcal{A}(T),$$

de donde, sustituyendo nuestras otras igualdades, concluimos que

$$\mathcal{A}(T) = \frac{c}{4} (\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

Como el área es estrictamente positiva, esto implica que la suma de los ángulos internos de un triángulo esférico es estrictamente mayor que  $\pi$ . Pero la fórmula anterior nos dice mucho más: que el exceso sobre  $\pi$  es proporcional al área del triángulo; si la suma se excede un poco es porque el triángulo es muy pequeño y se asemeja a uno plano. Para enunciar elegantemente el teorema que ya hemos demostrado, usaremos el valor de la constante que encontró Arquímedes.

**Teorema 5.10** *La suma de los ángulos internos de un triángulo esférico es mayor que  $\pi$ ; y el exceso sobre  $\pi$  es su área.*  $\square$

---

**EJERCICIO 5.22** Demuestra que tres planos en  $\mathbb{R}^3$  se intersectan en un único punto si y sólo si la suma de sus ángulos diédricos es mayor que  $\pi$ .

**EJERCICIO 5.23** ¿Cuál es el máximo valor de la suma de los ángulos internos de un triángulo esférico? Da ejemplos de triángulos que se aproximen tanto como uno quiera a este valor.

**EJERCICIO 5.24** Demuestra que hay tres tipos de triángulos esféricos regulares (con sus tres ángulos iguales) con ángulo de la forma  $2\pi/n$ . En cada caso, ¿con cuántos de ellos se cubre la esfera?

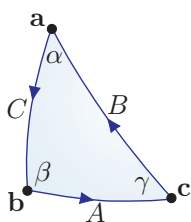
**EJERCICIO 5.25** Define polígono regular en la esfera y argumenta que para cada  $\alpha$  con

$$\frac{n-2}{n}\pi < \alpha < \pi$$

hay un polígono regular (esférico) con  $n$  lados y ángulo interno  $\alpha$ .

---

### 5.2.4 Trigonometría esférica



Sigamos analizando el triángulo  $T$  que tenemos entre manos. Si los ángulos internos determinan el área, también deben determinar la longitud de los lados. Denotemos con  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  los vértices del triángulo con ángulos correspondientes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ; y, abusando de la notación, denotemos con  $A$ ,  $B$ ,  $C$  tanto a las líneas orientadas de los lados opuestos como a las distancias correspondientes (e.g.,  $A = d_{S^2}(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ ).

**Lema 5.11 (Ley esférica de cosenos)** *Con la notación anterior se tiene que*

$$\cos \alpha = \frac{\cos A - \cos B \cos C}{\sin B \sin C} \quad y \quad \cos A = \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}.$$

**Demostración.** La primera ecuación se sigue de las dos interpretaciones que le podemos dar a  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$ . Primero, con un desarrollo similar al final de la

demostración del Teorema 5.2, se obtiene

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c})) \\
 &= -\mathbf{a} \cdot ((\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{b}) \\
 &= -\mathbf{a} \cdot ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{a}) \\
 &= (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \\
 &= \cos A - \cos C \cos B.
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Por otro lado, usando el Teorema 5.2 se tiene que  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin C = \sin C$ ; pero además sabemos que  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  está en la dirección de  $C^\perp$  (aquí estamos interpretando por primera vez a  $C$  como línea orientada y tomando su punto polar). Entonces tenemos que

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\sin C) C^\perp.$$

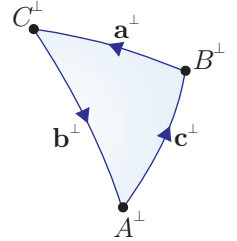
Análogamente, cuidando la orientación, tenemos que  $\mathbf{c} \times \mathbf{a} = (\sin B) B^\perp$ , y por tanto,

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) &= -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \\
 &= -((\sin C) C^\perp) \cdot ((\sin B) B^\perp) \\
 &= (\sin C \sin B) (-C^\perp \cdot B^\perp) \\
 &= \sin C \sin B \cos \alpha,
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

donde estamos usando que para medir el ángulo interior, hay que cambiarle la orientación a alguno de los lados.

De (5.6) y (5.7) se sigue la primera fórmula del lema.

La segunda se sigue de la primera por polaridad. Si consideramos los tres puntos polares a los lados orientados del triángulo  $T$ , obtenemos un triángulo cuyos lados orientados son las líneas polares a los tres vértices de  $T$ . Y en este triángulo, “polar” podríamos llamarlo y que denotamos  $T^\perp$ , lo que miden los lados es lo que miden los ángulos externos de  $T$  por (5.5). Si denotamos  $\bar{\alpha}$  al *complemento* de  $\alpha \in [0, \pi]$ , es decir,  $\bar{\alpha} := \pi - \alpha$ , entonces los lados de  $T^\perp$  miden  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $\bar{\gamma}$  correspondiendo a las líneas  $\mathbf{a}^\perp$ ,  $\mathbf{b}^\perp$ ,  $\mathbf{c}^\perp$  respectivamente. Análogamente, los ángulos internos de  $T^\perp$  miden  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$ , respectivamente. Puesto que  $\cos \bar{\theta} = -\cos \theta$  y  $\sin \bar{\theta} = \sin \theta$  para cualquier  $\theta \in [0, \pi]$ , la primera fórmula (que ya está demostrada para cualquier triángulo) en el “polar”  $T^\perp$  da entonces la segunda fórmula del lema.  $\square$



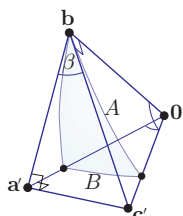
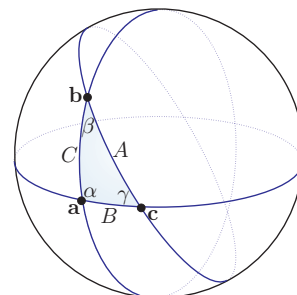
Como corolario (de la segunda fórmula) obtenemos que los ángulos de un triángulo esférico determinan la longitud de sus lados, a diferencia del plano euclidiano, y entonces no hay “semejanza” en los triángulos esféricos. Pero, como antes, los lados de un triángulo determinan a sus ángulos (por la primera fórmula).

**Lema 5.12 (Ley esférica de senos)** *Con la notación del lema anterior se tiene*

$$\frac{\sin A}{\sin \alpha} = \frac{\sin B}{\sin \beta} = \frac{\sin C}{\sin \gamma}.$$

**Demostración.** Aunque hay una demostración algebraica de la ley de los senos usando la de los cosenos, preferimos una geométrica que sigue en parte la versión euclidiana.

Primero hay que ver el caso en que el triángulo es rectángulo; digamos que  $\alpha = \pi/2$ ; y para fijar ideas, supongamos que el punto  $\mathbf{a}$  coincide con el primer vector canónico, que el punto  $\mathbf{b}$  está en el plano  $xz$  y que el punto  $\mathbf{c}$  está en el plano  $xy$ . Consideremos el



*tetraedro* (dícese de un cuerpo acotado por cuatro planos en  $\mathbb{R}^3$ ) definido por los tres planos de las líneas (esféricas) del triángulo T (que se intersectan en el origen), y el plano  $\Pi$  tangente a la esfera en el punto  $\mathbf{b}$ , dado por la ecuación

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{x} = 1.$$

Este tetraedro tiene cuatro triángulos como caras. Nótese que las longitudes de los tres lados de nuestro triángulo esférico original T son ahora los ángulos de los tres triángulos que tienen como vértice el origen, y que el ángulo  $\beta$  es el ángulo en el vértice  $\mathbf{b}$  del triángulo en el plano  $\Pi$  (justo porque  $\Pi$  es tangente a la esfera en  $\mathbf{b}$ ). Los otros dos vértices del tetraedro son  $\mathbf{a}' = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^{-1} \mathbf{a}$  y  $\mathbf{c}' = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})^{-1} \mathbf{c}$ . No es difícil ver que los cuatro triángulos, caras, del tetraedro son rectángulos; dos en el vértice  $\mathbf{b}$  (por ser perpendicular  $\mathbf{b}$  a  $\Pi$ ) y dos en el vértice  $\mathbf{a}'$  (aquí es donde hay que usar que  $\alpha = \pi/2$ ). Entonces tenemos las siguientes igualdades (con distancias euclidianas):

$$\text{sen } \beta = \frac{d(\mathbf{a}', \mathbf{c}')}{d(\mathbf{b}, \mathbf{c}')} , \quad \text{sen } B = \frac{d(\mathbf{a}', \mathbf{c}')}{d(\mathbf{0}, \mathbf{c}')} , \quad \text{sen } A = \frac{d(\mathbf{b}, \mathbf{c}')}{d(\mathbf{0}, \mathbf{c}')} .$$

De donde se concluye que

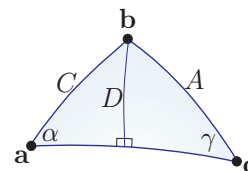
$$\text{sen } \beta = \frac{\text{sen } B}{\text{sen } A} .$$

Nuestro argumento funciona para valores pequeños de  $A$ ,  $B$  y  $C$  (como en el dibujo), pero no es difícil ver que también funciona para  $B \geq \pi/2$  y  $C \geq \pi/2$ .

Para el caso general, se traza la perpendicular de un vértice,  $\mathbf{b}$  digamos, al lado opuesto; y si  $D$  es la altura entonces se obtiene, por el caso anterior en los dos triángulos rectángulos que se forman, que  $\text{sen } \alpha \text{ sen } C = \text{sen } D = \text{sen } \gamma \text{ sen } A$ , de donde

$$\frac{\text{sen } A}{\text{sen } \alpha} = \frac{\text{sen } C}{\text{sen } \gamma} ,$$

y el lema se sigue por simetría. □



---

**EJERCICIO 5.26** Demuestra que en un triángulo (esférico, se sobreentiende) sus tres ángulos son iguales si y sólo si sus tres lados son iguales. Tales triángulos se llaman *regulares* o *equiláteros*. ¿Cuántos de ellos hay? ¿Puedes parametrizarlos? ¿Por su ángulo? ¿Por su lado? ¿Por su radio? ¿Puedes dar las fórmulas que relacionan estos parámetros?

**EJERCICIO 5.27** Demuestra que si un triángulo tiene dos ángulos iguales entonces sus lados opuestos son iguales. E inversamente, si tiene dos lados iguales, los ángulos opuestos son iguales. A estos triángulos se les llama *isósceles*.

**EJERCICIO 5.28** Demuestra que la línea que va del vértice distinto de un triángulo isósceles al punto medio de su lado opuesto es perpendicular a éste. Al segmento en cuestión se le llama la *altura* del triángulo.

**EJERCICIO 5.29** Demuestra que el lugar geométrico de los puntos (en  $\mathbb{S}^2$ , se sobreentiende) que equidistan de dos puntos dados es la línea perpendicular al segmento que los une y que pasa por su punto medio. Se le llama la *mediatriz*.

**EJERCICIO 5.30** ¿Cuánto miden el área, el lado y el diámetro de un cuadrado regular con ángulo interno  $2\pi/3$ ?

**EJERCICIO 5.31** ¿Puedes dar una cota superior para la suma de los lados de un triángulo? La inferior es 0.

---

### 5.3 Isometrías de la esfera ( $\mathbf{O}(3)$ )

Estudiaremos ahora las transformaciones rígidas de la esfera. Como sabemos, una función  $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  que preserva distancias se llama *isometría*. Veremos primero que las isometrías de la esfera corresponden justo a las transformaciones ortogonales de  $\mathbb{R}^3$  que habíamos denotado  $\mathbf{O}(3)$ .

Una transformación ortogonal de  $\mathbb{R}^3$ , por definición, preserva producto interior. Por tanto preserva norma y manda a la esfera unitaria en sí misma, pues es el conjunto de vectores unitarios. Además, como la distancia en  $\mathbb{S}^2$  se definió con el producto interior (es “distancia angular”), también preserva distancias, por lo que su restricción a  $\mathbb{S}^2$  es una isometría.

Inversamente, si  $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  es una isometría queremos demostrar que es la restricción de una transformación ortogonal. Sean  $\mathbf{u} = f(\mathbf{e}_1)$ ,  $\mathbf{v} = f(\mathbf{e}_2)$ ,  $\mathbf{w} = f(\mathbf{e}_3)$ . Como el *triángulo canónico*  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  tiene sus tres lados de tamaño  $\pi/2$  (igual que sus tres ángulos) y  $f$  preserva distancias, entonces el triángulo  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  tiene las mismas características, que equivalen a decir que  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  forman una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ . Nos falta entonces demostrar que para cualquier  $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{S}^2$  se tiene que

$$f(\mathbf{x}) = x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w},$$

es decir, que  $f$  es lineal, pues entonces  $f$  será la restricción de la transformación ortogonal asociada a la matriz  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{O}(3)$ .

Dibujo...



La demostración de que  $f$  es lineal (análoga a la que dimos en el Capítulo 3 para  $\mathbb{R}^2$ ) consiste en reinterpretar geoméricamente el teorema de bases ortonormales en  $\mathbb{R}^3$  que en la Sección 1.10 dejamos como ejercicio. Por su importancia, lo volvemos a enunciar y demostrar.

**Teorema 5.13 (Bases ortonormales)** *Sea  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ , entonces para cualquier  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  se tiene que*

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u} + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{w}.$$

**Demostración.** Para resolver el sistema de ecuaciones

$$\mathbf{x} = s \mathbf{u} + t \mathbf{v} + r \mathbf{w}$$

con incógnitas  $s, t, r$ , tomamos el producto punto con los vectores dándonos los valores de las tres variables por ser  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  una base ortonormal. Así, por ejemplo, tomando el producto punto con  $\mathbf{u}$  se tiene

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = s (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + t (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) + r (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}) = s$$

y análogamente  $t = \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}$  y  $r = \mathbf{x} \cdot \mathbf{w}$ . □

Regresando a nuestra isometría  $f$  y un punto cualquiera  $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ , se tiene que  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1$  mide esencialmente la distancia de  $\mathbf{x}$  al vector canónico  $\mathbf{e}_1$  (es su coseno) y esta distancia tiene que ser la misma que de  $f(\mathbf{x})$  a  $\mathbf{u} = f(\mathbf{e}_1)$ . Más formalmente,

$$f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = \cos(d_{\mathbb{S}^2}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{e}_1))) = \cos(d_{\mathbb{S}^2}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1)) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1.$$

Análogamente  $f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_2$  y  $f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_3$ , de donde, por el Teorema de bases ortonormales, obtenemos que

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= (f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u} + (f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} + (f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}) \mathbf{w} \\ &= (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{u} + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{v} + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_3) \mathbf{w} \\ &= x \mathbf{u} + y \mathbf{v} + z \mathbf{w}, \end{aligned}$$

y queda demostrado que toda isometría de  $\mathbb{S}^2$  es la restricción de una transformación ortogonal de  $\mathbb{R}^3$ .

Nótese que en el fondo esta demostración (y el teorema) dice que todo punto de la esfera queda determinado por sus distancias a los tres vectores canónicos y bajo una isometría tiene que ir al punto con las mismas distancias a la imagen del triángulo canónico. Dibujo...

Podemos formalizar lo que intuitivamente es claro, que la esfera es homogénea (como espacio) y super-simétrica. Un punto puede ir a cualquier otro punto; si

además especificamos líneas orientadas por ellos, las podemos hacer coincidir, y nos queda la libertad de escoger cómo hacer corresponder a los dos lados de las líneas. Pues podemos pensar que una base ortonormal consiste en escoger un punto  $\mathbf{u}$ , una línea orientada que pasa por él (el segundo elemento de la base está a distancia  $\pi/2$  en esa dirección) y luego un lado de la línea (el positivo nos da al producto cruz como tercer elemento de la base y el negativo a su antípoda).

También es claro que ahora tenemos la noción correcta de *igualdad* de triángulos: dos lo son si hay una isometría que mande uno en el otro. Y teoremas tales como que dos triángulos son iguales si y sólo si sus lados o sus ángulos (o un lado y sus dos ángulos adyacentes, o un ángulo y sus dos lados adyacentes) son iguales. Las demostraciones consisten en ir moviendo la esfera para que datos correspondientes vayan correspondiendo conjuntista, o estrictamente.

**EJERCICIO 5.32** Demuestra que las clases de isometría de triángulos esféricos corresponden a las ternas  $\alpha \leq \beta \leq \gamma$  con  $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ , tales que  $\alpha + \beta + \gamma < 2\pi$ , donde  $\alpha, \beta, \gamma$  son los lados.

**EJERCICIO 5.33** Decimos que dos triángulos esféricos están en la misma *familia* si ambos se pueden dibujar con tres líneas (recuerda la Sección 5.2.3 de áreas). ¿Cómo se relacionan los lados de triángulos en una familia? Demuestra que las familias tienen 4, 2 o un sólo elemento, donde la de un sólo elemento es la de los triángulos de bases ortonormales.

### 5.3.1 Rotaciones ( $\mathbf{SO}(3)$ )

A las matrices ortogonales con determinante 1 se les denota  $\mathbf{SO}(3)$  por sus siglas en inglés *special orthogonal group*. Corresponden a las isometrías de  $\mathbb{S}^2$  que preservan orientación, y que mandan al lado positivo de una línea orientada en el lado positivo de su imagen, es decir, que preservan el punto polar de las líneas orientadas. Las que invierten orientación (con determinante  $-1$ ) no forman un grupo y mandan al punto polar de una línea orientada en el antípoda del polar de su imagen.

Ejemplos de isometrías que preservan orientación son las *rotaciones*, que fijan un punto (y su antípoda) y giran la esfera alrededor de ese eje. El teorema principal de esta sección es que todas son así; coloquialmente es el “Teorema del gol”: después del primer gol, el balón regresa al centro de la cancha e independientemente de lo que le haya sucedido en el ínterin, un punto regresa justo a su lugar y el balón solamente giró alrededor de él.

Antes de demostrar el teorema, observemos que las “traslaciones” en la esfera también son rotaciones. Una traslación es “empujar” a lo largo de una línea; en la esfera una línea es un círculo y “empujar” en él es rotarlo, pero sus puntos polares se mantienen fijos, equivale a rotar en ellos. Podemos especificar que rotar en un punto  $\mathbf{u}$  un ángulo  $\alpha$  rota a su polar, como línea orientada, un ángulo  $\alpha$ ; denotemos esta

isometría  $\rho_{\alpha, \mathbf{u}}$ . Y entonces tenemos que

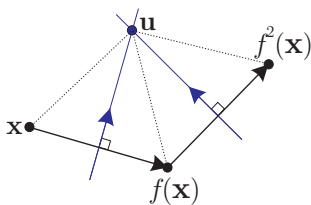
$$\rho_{\alpha, \mathbf{u}} = \rho_{-\alpha, -\mathbf{u}},$$

pues  $-\mathbf{u}$  le da la orientación contraria a la línea polar. Por ejemplo, e identificando una transformación con su matriz asociada, se tiene

$$\rho_{\pi/2, \mathbf{e}_3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Teorema 5.14** *Toda isometría de  $\mathbb{S}^2$  que preserva orientación es una rotación.*

**Demostración.** Sea  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  una isometría que preserva orientación. Tenemos que encontrar un punto fijo de  $f$ , es decir, un punto  $\mathbf{u}$  tal que  $f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ , y con eso habremos terminado; pues entonces manda su línea polar orientada en sí misma y el ángulo de la rotación queda determinado ahí.



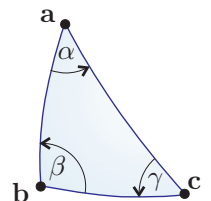
Sea  $\mathbf{x}$  cualquier punto de  $\mathbb{S}^2$ . Podemos suponer que  $f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{x}$  pues si no ya acabamos. Consideremos el segmento (orientado) de  $\mathbf{x}$  a  $f(\mathbf{x})$  y volvamos a aplicarle la función  $f$ : va a dar a un segmento de  $f(\mathbf{x})$  a  $f^2(\mathbf{x})$  que mide lo mismo. Consideremos ahora las mediatrices de estos dos segmentos en la dirección positiva y sea  $\mathbf{u}$  su primer punto de intersección. Como  $f$  preserva orientación, por construcción se tiene que  $f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$  (el triángulo isósceles  $\mathbf{x}, f(\mathbf{x}), \mathbf{u}$  tiene que ir al  $f(\mathbf{x}), f^2(\mathbf{x}), \mathbf{u}$ ).

Nótese que la construcción es básicamente igual a la euclidiana, donde el caso en que las mediatrices no se intersectan corresponde a la translación. En la esfera como siempre se intersectan no hay esta excepción. Pero hicimos una trampa (no esencial), o bien nos falta analizar el caso en que las dos mediatrices son la misma recta (y el punto  $\mathbf{u}$  no queda bien definido). Hay dos posibilidades: que el punto medio del segmento regrese a su lugar, y éste es el punto fijo de una rotación de  $\pi$ ; o bien que los dos puntos medios sean distintos y generen a la mediatriz común, en cuyo caso el punto medio del segmento que los une es el punto medio de una rotación de  $\pi$ .  $\square$

La composición de dos rotaciones vuelve a ser una rotación, en dónde y de a cuánto nos lo dice el siguiente lema cuya idea es la misma del final de la Sección 3.8.1 sobre rotaciones euclidianas. La diferencia es que ahora los ángulos no se suman, pero sí se pueden obtener geoméricamente.

**Lema 5.15** *Si tenemos un triángulo  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  con ángulos internos orientados correspondientes  $\alpha, \beta, \gamma$ , entonces*

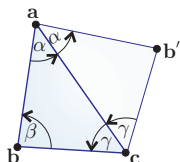
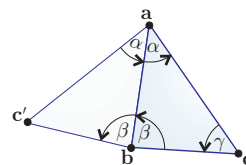
$$\rho_{2\alpha, \mathbf{a}} \circ \rho_{2\beta, \mathbf{b}} = \rho_{-2\gamma, \mathbf{c}}.$$



chechar signo  
comp de ec.

**Demostración.**

Sea  $f = \rho_{2\alpha, a} \circ \rho_{2\beta, b}$ . Consideremos el reflejado del triángulo en el lado  $ab$  y sea  $c'$  su nuevo vértice. Como  $d(b, c) = d(b, c')$  se tiene por construcción que  $\rho_{2\beta, b}(c) = c'$ , y análogamente que  $\rho_{2\alpha, a}(c') = c$ ; entonces  $c = f(c)$  es el centro de la rotación  $f$ .



Consideremos ahora el reflejado del triángulo en el lado  $ac$  y sea  $b'$  su nuevo vértice. Como  $\rho_{2\beta, b}$  fija a  $b$  y  $d(a, b) = d(a, b')$ , se tiene que  $f(b) = \rho_{2\alpha, a} \circ \rho_{2\beta, b}(b) = \rho_{2\alpha, a}(b) = b'$ . Entonces el ángulo de la rotación  $f$  es el ángulo dirigido  $\angle bcb' = -2\gamma$ . Lo cual completa la demostración del lema.  $\square$

**EJERCICIO 5.34** Demuestra que si  $d_{S^2}(u, v) = \pi/2$  entonces

$$\rho_{\pi, v} \circ \rho_{\pi, u} = \rho_{\pi, u \times v}.$$

**EJERCICIO 5.35** ¿Cuál es la matriz asociada a la rotación de  $2\pi/3$  en el punto  $1/\sqrt{3}(1, 1, 1)$ ? Demuestra que es  $\rho_{\pi/2, e_2} \circ \rho_{\pi/2, e_1}$ . Observa que en las rotaciones de la esfera los ángulos de rotación no se suman al componer.

**EJERCICIO 5.36** Demuestra que si una rotación manda a algún punto  $u$  en su antípoda entonces es una rotación de ángulo  $\pi$  con centro en un punto de  $u^\perp$ . Y más en general:

**EJERCICIO 5.37** Demuestra que si  $f$  es una rotación de ángulo  $\alpha$  entonces

$$\alpha = \max \left\{ d_{S^2}(x, f(x)) \mid x \in S^2 \right\}.$$

### 5.3.2 Pasos

Como corolario al teorema del gol, obtendremos que las isometrías de la esfera que invierten orientación siempre son pasos (reflejar en una línea y luego trasladar a lo largo de ella). El ingrediente nuevo que usaremos es la existencia de una isometría distinguida que invierte orientación. Es la función antípoda, que denotaremos con

$$\begin{aligned} a : S^2 &\rightarrow S^2 \\ a(x) &= -x. \end{aligned}$$

Puesto que su matriz asociada es  $-I$ , efectivamente invierte orientación y además conmuta con cualquier isometría pues éstas son lineales y la antípoda consiste en multiplicar por  $-1$ .

**Teorema 5.16** *Toda isometría de  $S^2$  que invierte orientación es un paso.*

...Dibujo

**Demostración.** Sea  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  una isometría que invierte orientación. Tenemos que  $\mathbf{a} \circ f = f \circ \mathbf{a}$  preserva orientación y por el Teorema del Gol (5.14) es una rotación en algún punto,  $\mathbf{u}$  digamos. Como  $\mathbf{a} \circ \mathbf{a} = \text{id}_{\mathbb{S}^2}$  entonces  $f = \mathbf{a} \circ (\mathbf{a} \circ f)$  cumple que  $f(\mathbf{u}) = -\mathbf{u}$  (pues  $(\mathbf{a} \circ f)(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ ); es decir,  $f$  permuta los puntos antípodas  $\mathbf{u}$  y  $-\mathbf{u}$ . Entonces  $f$  deja invariante a la línea polar a  $\mathbf{u}$ , es decir  $f(\mathbf{u}^\perp) = \mathbf{u}^\perp$  (pues está formada de los puntos a distancia  $\pi/2$  de  $\mathbf{u}$  y  $-\mathbf{u}$ ); pero además  $f$  preserva la orientación de  $\mathbf{u}^\perp$  pues si la invirtiera, como ya manda a  $\mathbf{u}$  en  $-\mathbf{u}$ , preservaría la orientación de la esfera. Entonces  $f$  restringida a la línea  $\mathbf{u}^\perp$  es una rotación (una traslación del círculo). Por lo tanto,  $f$  es un paso a lo largo de la línea  $\mathbf{u}^\perp$ .  $\square$

Aunque ya quedó demostrado el teorema, vale la pena recapitular en su demostración. Si la rotación  $\mathbf{a} \circ f$  en el punto  $\mathbf{u}$  es de un ángulo  $\alpha$ , entonces  $f$ , que se obtiene aplicándole la antípoda a esta rotación, vuelve a rotar un ángulo  $\pi$  a la línea  $\mathbf{u}^\perp$ , pues la función antípoda en un círculo cualquiera consiste en rotarlo  $\pi$ . Entonces el paso  $f$  es de tamaño  $\pi + \alpha$ ; cuando  $\alpha = \pi$  el paso es de  $0 (= 2\pi)$ , o sea  $f$  es una reflexión, y cuando  $\alpha = 0$  ( $\mathbf{a} \circ f = \text{id}_{\mathbb{S}^2}$ ) entonces el paso es de  $\pi$  y  $f = \mathbf{a}$ . Así como la identidad es la rotación de  $0$  alrededor de cualquier punto, resulta que la función antípoda es el paso de  $\pi$  en cualquier línea.

---

**EJERCICIO 5.38** Demuestra que la composición de dos reflexiones en líneas con un ángulo  $\alpha$  es una rotación en la intersección de un ángulo  $2\alpha$ . Concluye que toda isometría puede escribirse como una composición de tres reflexiones a lo más.

**EJERCICIO 5.39** Demuestra que la composición de tres reflexiones en líneas mutuamente ortogonales es la función antípoda.

**EJERCICIO 5.40** Demuestra que para cualquier  $A \in \mathbf{O}(3)$  existen  $B \in \mathbf{O}(3)$  y  $\alpha \in [0, 2\pi]$  tales que

$$BAB^T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\text{sen } \alpha & 0 \\ \text{sen } \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$


---

## 5.4 \*Simetría esférica

En esta sección estudiamos las posibles simetrías de los cuerpos en el espacio. Como en el plano, a cualquier cuerpo (o figura tridimensional)  $F \subset \mathbb{R}^3$  le podemos asociar un grupo de isometrías que consiste de todas sus simetrías

$$\text{Sim}(F) = \{f \in \mathbf{Iso}(\mathbb{R}^3) \mid f(F) = F\}.$$

Por ejemplo, un trompo  $T$  tiene simetría *rotacional*, lo que quiere decir que  $\text{Sim}(T)$  es una copia de  $\mathbf{O}(2)$  (y estrictamente  $\mathbf{O}(2)$  si ponemos a su eje de simetría en el eje  $z$ );

Dibujos d  
un trompo  
un diábol  
girando

tiene las simetrías de un círculo y cualquiera de sus tajadas perpendiculares al eje es un círculo centrado en él. Eso es lo que hace interesantes sus propiedades mecánicas: el trompo es (idealmente) indistinguible de cualquiera de sus rotaciones. Su grupo de simetrías puede crecer si tuviera un plano de simetría donde lo de abajo es “igual” a lo de arriba (un diábolo o un platillo volador, por ejemplo); entonces todos los pasos (la reflexión seguida de rotaciones) en este plano se vuelven automáticamente simetrías y además aparecen rotaciones de  $\pi$  en ejes de este plano (estamos hablando de las matrices que aparecen en el último ejercicio y las que tienen una reflexión en la esquina). No es difícil intuir que si el cuerpo tiene alguna simetría extra (que necesariamente mueve a su eje, porque las anteriores son todas las que lo dejan en su lugar), entonces su grupo de simetrías crece de golpe hasta generar todo  $\mathbf{O}(3)$  y estamos hablando entonces de una bola, un balón, una pelota, o bien la esfera  $\mathbb{S}^2$ . Estos son los posibles grupos de simetrías continuos; en el resto de la sección estudiaremos los finitos.

Nótese que si  $\mathbf{G}$  es un subgrupo finito de isometrías de  $\mathbb{R}^3$ , entonces la misma demostración que dimos para el plano en el Paso 1 del Teorema de Leonardo (Sección 3.9, Teorema 3.26) prueba que tiene un centro de simetría (el centro de masas del cuerpo) que podemos asumir que es el origen. Entonces es equivalente pensar que  $\mathbf{G}$  está actuando en la esfera  $\mathbb{S}^2$  y hacer ahí nuestros razonamientos; podemos pensar bidimensionalmente y que estamos hablando de las simetrías de alguna figura  $F$  dibujada en la esfera. Así lo haremos.

Sea  $\mathbf{G} \subset \mathbf{O}(3)$  un subgrupo finito. Queremos ver quién puede ser  $\mathbf{G}$ . Como en el plano,  $\mathbf{G}$  tiene asociados ciertos puntos distinguidos o *singulares* y con base en ellos detectaremos las posibilidades de  $\mathbf{G}$ . Dado un punto cualquiera  $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2$  tenemos un subgrupo de  $\mathbf{G}$  llamado su *estabilizador*

$$\mathbf{St}_{\mathbf{G}}(\mathbf{x}) := \{g \in \mathbf{G} \mid g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\},$$

formado por los elementos de  $\mathbf{G}$  que dejan fijo a  $\mathbf{x}$ ; y diremos que  $\mathbf{x}$  es *singular* (para  $\mathbf{G}$ ) si su estabilizador es no trivial. Cualquier punto tiene la identidad en su estabilizador, pero si tiene algo más entonces es singular.

Dibujos...

Para cualquier punto singular (de  $\mathbf{G}$ ),  $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^2$ , su estabilizador es cíclico o diédrico. Pues si  $g \in \mathbf{St}_{\mathbf{G}}(\mathbf{v})$  entonces  $g$  (pensado como transformación de  $\mathbb{R}^3$ ) manda al plano ortogonal a  $\mathbf{v}$  (y al tangente a la esfera por  $\mathbf{v}$ ) en sí mismo, y entonces podemos pensar que  $\mathbf{St}_{\mathbf{G}}(\mathbf{v})$  es un grupo finito de isometrías del plano y por el Teorema de Leonardo es cíclico o diédrico. Si  $\mathbf{St}_{\mathbf{G}}(\mathbf{v})$  es cíclico de orden  $n$ , diremos que  $\mathbf{v}$  es un *centro de simetría rotacional de orden  $n$* ; y si es el diédrico de orden  $n$ , que es un *centro de simetría caleidoscópica de orden  $n$* . En el primer caso,  $\mathbf{St}_{\mathbf{G}}(\mathbf{v})$  está generado por la rotación en  $\mathbf{v}$  de ángulo  $2\pi/n$ , y en el segundo  $\mathbf{St}_{\mathbf{G}}(\mathbf{v})$  está generado por dos reflexiones cuyas líneas espejo se intersectan en  $\mathbf{v}$  con ángulo  $\pi/n$ .

A cualquier punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2$  también podemos asociarle un subconjunto de  $\mathbb{S}^2$  llamado su *órbita*

$$\mathbf{G}\mathbf{x} := \{f(\mathbf{x}) \mid f \in \mathbf{G}\},$$

que consta de todas las imágenes de  $\mathbf{x}$  bajo los elementos de  $\mathbf{G}$ . Demostraremos a continuación que *la órbita de un punto consta de puntos del mismo tipo*, es decir, que si  $\mathbf{x}$  es un centro de simetría rotacional (o caleidoscópica) de orden  $n$ , entonces los puntos de su órbita también lo son. El truco es la vieja conocida conjugación.

Si  $f \in \mathbf{G}$  es tal que  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$  (si  $\mathbf{y}$  está en la órbita de  $\mathbf{x}$ ), entonces la función “conjugar por  $f$ ” definida por

$$\begin{aligned}\kappa_f : \mathbf{G} &\rightarrow \mathbf{G} \\ \kappa_f(g) &= f^{-1} \circ g \circ f\end{aligned}$$

manda al estabilizador de  $\mathbf{y}$  en el de  $\mathbf{x}$ . Pues si  $g \in \mathbf{St}_{\mathbf{G}}(\mathbf{y})$ , por definición  $g(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$ , y por tanto

$$(f^{-1} \circ g \circ f)(\mathbf{x}) = (f^{-1} \circ g)(f(\mathbf{x})) = f^{-1}(g(\mathbf{y})) = f^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{x},$$

lo cual implica que  $\kappa_f(g) \in \mathbf{St}_{\mathbf{G}}(\mathbf{x})$ . Es fácil ver que conjuguar por  $f$  es una biyección (su inverso es conjuguar por  $f^{-1}$ ) y que preserva el producto del grupo ( $\kappa_f(g \circ g') = \kappa_f(g) \circ \kappa_f(g')$ ), así que  $\mathbf{St}_{\mathbf{G}}(\mathbf{y})$  y  $\mathbf{St}_{\mathbf{G}}(\mathbf{x})$  son *isomorfos* (el mismo tipo de grupo).

---

**EJERCICIO 5.41** Con la notación de arriba, demuestra que

$$\#(\mathbf{G}) = \#(\mathbf{G}\mathbf{x}) \#(\mathbf{St}_{\mathbf{G}}(\mathbf{x})).$$

Donde  $\#$  significa “cardinalidad”, es decir, número de elementos de un conjunto.

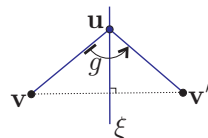
---

### 5.4.1 Subgrupos finitos de $\mathbf{SO}(3)$

Consideremos primero el caso en que el subgrupo finito de isometrías de la esfera,  $\mathbf{G}$ , preserva orientación; es decir, que todos sus elementos lo hacen, o, dicho de otra manera, que  $\mathbf{G} \subset \mathbf{SO}(3)$ . Supongamos que  $\mathbf{G}$  no es trivial, entonces tiene algún elemento  $f$  que no es la identidad. Por el Teorema 5.14,  $f$  es una rotación en un punto  $\mathbf{v}$ , y entonces  $\mathbf{v}$  es un punto singular para  $\mathbf{G}$ , pues  $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$  y  $f \neq \text{id}_{\mathbb{S}^2}$ . El estudio de estos puntos singulares nos llevará a determinar  $\mathbf{G}$ .

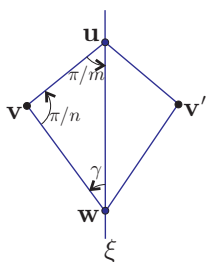
Ya vimos que  $\mathbf{G}$  tiene algún punto singular  $\mathbf{v}$ . Éste es un centro de simetría rotacional de orden  $n$ , digamos, y entonces  $\mathbf{St}_{\mathbf{G}}(\mathbf{v})$  es un grupo cíclico generado por la rotación en  $\mathbf{v}$  de ángulo  $2\pi/n$ , que llamaremos  $f$  de aquí en adelante. La primera posibilidad es que  $\mathbf{G} = \mathbf{St}_{\mathbf{G}}(\mathbf{v})$ , es decir que  $\mathbf{G}$  sea un **grupo cíclico de orden  $n$** , cuyo único otro punto singular es  $-\mathbf{v}$ ;  $\mathbf{G}$  consiste de rotaciones en el eje  $\langle \mathbf{v}, -\mathbf{v} \rangle$ . Si no es éste el caso, cualquier elemento de  $\mathbf{G} - \mathbf{St}_{\mathbf{G}}(\mathbf{v}) \neq \emptyset$  mueve a  $\mathbf{v}$ .

Supongamos entonces que la órbita de  $\mathbf{v}$  tiene algún punto distinto de  $\mathbf{v}$ . Como  $G\mathbf{v}$  es finito podemos escoger  $\mathbf{v}' \in G\mathbf{v}$  tal que  $\mathbf{v} \neq \mathbf{v}'$  y que su distancia a  $\mathbf{v}$  sea mínima. Por la demostración del Teorema del Gol (5.14), los centros de las rotaciones que mandan a  $\mathbf{v}$  en  $\mathbf{v}'$  están en su mediatriz,  $\xi$  digamos; y como en  $G$  tenemos rotaciones que mandan a  $\mathbf{v}$  en  $\mathbf{v}'$ , en  $\xi$  tenemos a sus correspondientes centros: sea  $\mathbf{u}$  el más cercano de estos a  $\mathbf{v}$ . Entonces  $\mathbf{u}$  es el centro de una rotación  $g \in G$  tal que  $g(\mathbf{v}) = \mathbf{v}'$ .



Como  $\mathbf{u}$  es punto singular de  $G$  entonces su estabilizador es cíclico, de orden  $m$  digamos. Afirmamos que  $g$  es su generador de ángulo  $\pm(2\pi/m)$ . Si  $g$  no fuera este generador de  $St_G(\mathbf{u})$ , entonces tendríamos que en  $St_G(\mathbf{u})$  hay una rotación  $g'$  de ángulo estrictamente menor que el de  $g$  (un divisor) y ésta mandaría a  $\mathbf{v}$  en un punto más cercano que  $\mathbf{v}'$  contradiciendo la forma en que escogimos a  $\mathbf{v}'$ . Así que  $g$  es la rotación en  $\mathbf{u}$  de ángulo  $\pm(2\pi/m)$ ; supongamos sin pérdida de generalidad (habría que cambiar  $\mathbf{v}$  por  $\mathbf{v}'$  si no) que es  $2\pi/m$ . Tenemos entonces que el ángulo de la línea  $\mathbf{u}\mathbf{v}$  a  $\xi$  es  $\pi/m$ .

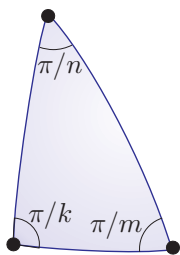
Sea  $\mathbf{w}$  el punto en  $\xi$ , tal que el triángulo  $T = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  tiene ángulos internos  $\pi/m$  y  $\pi/n$  en  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  respectivamente; y sea  $\gamma$  el ángulo (dirigido) de  $T$  en  $\mathbf{w}$ . Por el Lema 5.15,  $g \circ f$  es una rotación con centro en  $\mathbf{w}$  y ángulo  $-2\gamma$ , que manda entonces a  $\mathbf{v}$  en  $\mathbf{v}'$ . Como  $g \circ f \in G$ , se tiene que  $\mathbf{w}$  es punto singular de  $G$ , y  $g \circ f$  es generador de  $St_G(\mathbf{w})$  por la misma razón que  $g$  es generador de  $St_G(\mathbf{v})$  (que sólo usó cómo escogimos  $\mathbf{v}'$ ). Tenemos entonces que  $g \circ f$  es una rotación en  $\mathbf{w}$  de un ángulo  $\pm(2\pi/k)$ , donde  $k$  es el orden de  $St_G(\mathbf{w})$ .



Pero necesitamos demostrar aún más: que  $\gamma = \pi/k$ ; y para esto hay que usar cómo escogimos  $\mathbf{u}$ . Hasta ahora sólo sabemos que  $2\gamma$ , como ángulo, es  $\pm(2\pi/k)$ ; y esto también es cierto si  $\gamma = \pi \pm \pi/k$ . Pero observemos que conforme un punto  $\mathbf{x}$  en la mediatriz  $\xi$  se aleja de  $\mathbf{v}$ , partiendo del punto medio, el ángulo de la rotación con centro en  $\mathbf{x}$  que lleva a  $\mathbf{v}$  en  $\mathbf{v}'$  decrece en valor absoluto; así que  $\pi/m \geq \gamma$  pues  $\mathbf{u}$  fue escogido como el más cercano a  $\mathbf{v}$ , es decir  $d_{S^2}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq d_{S^2}(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ . Con este ingrediente extra, se puede concluir que  $\gamma = \pi/k$ .

Ahora sí, hemos encontrado un triángulo  $T$  cuyos vértices son centros de simetría rotacional de  $G$  de orden  $k, m, n$  y con ángulos internos correspondientes  $\pi/k, \pi/m, \pi/n$ . La clasificación de los grupos  $G$  que nos faltan depende de cuáles triángulos de estos existen.

Por el Teorema 5.10 (de la suma de ángulos de un triángulo esférico), se tiene que  $k, m, n$  (los tres enteros mayores que 1) deben cumplir



$$\frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > 1, \tag{5.8}$$



donde hemos factorizado y anulado a  $\pi$ . Si suponemos que  $k \leq m \leq n$ , es fácil ver que las únicas soluciones de esta ecuación son, en orden lexicográfico,

k	m	n	$\mathcal{A}(T)/\pi$	$\#G$
2	2	n	$1/n$	$2n$
2	3	3	$1/6$	12
2	3	4	$1/12$	24
2	3	5	$1/30$	60

(5.9)

donde se ha añadido la columna de exceso sobre 1 en (5.8), que, por el Teorema 5.10, multiplicada por  $\pi$  nos da el área del triángulo; y otra columna adicional donde, adelantándonos, ponemos la cardinalidad del grupo  $G$  de donde salió el triángulo, y que, como veremos, corresponde a  $\mathcal{A}(\mathbb{S}^2)/2\mathcal{A}(T)$ .

Hemos demostrado la parte de “unicidad” de un teorema —“si  $G \subset \mathbf{SO}(3)$  es finito entonces cumple tal cosa”— y nos falta la de “existencia”: ver que tales grupos existen. Pero antes de hacerlo vale un comentario sobre el final de nuestra argumentación previa. En el “es fácil ver que las únicas soluciones...” el argumento es que en la asignación que (lexicográficamente) sigue, la 2, 3, 6, se obtiene la igualdad con 1 (en la desigualdad (5.8)); las otras dos igualdades con 1 son la 2, 4, 4 y la 3, 3, 3; para el resto de los valores de  $k \leq m \leq n$ , la suma de sus inversos es menor que 1. Las tres igualdades con 1 dan lugar a triángulos euclidianos y a tres grupos cristalográficos ahí, que son precisamente los subgrupos orientados (de isometrías que preservan orientación) de los tres grupos caleidoscópicos  $K_{6,3,2}$ ,  $K_{4,4,2}$  y  $K_{3,3,3}$  que vimos en la Sección 3.9.2 (Teorema 3.27; de hecho, su demostración fué con la misma idea de encontrar un triángulo “racional”). El resto de las asignaciones,  $k \leq m \leq n$  cuyos inversos suman menos que 1, daran lugar a subgrupos discretos del plano hiperbólico que veremos al final del capítulo 8; todos juntos son los llamados *grupos triangulares*. Dibujo...

Ahora sí, veamos la existencia de los grupos finitos  $G \subset \mathbf{SO}(3)$  que, en abstracto, dieron lugar a la tabla (5.9). Para el primero,  $22n$  (léase “dos-dos-ene”), pensemos en una pelota playera partida en  $n$  gajos iguales (angularmente de tamaño  $2\pi/n$ ) con la válvula, donde confluyen los gajos, en el polo norte. Ahí está el centro de simetría rotacional de orden  $n$ . Los de orden 2 están todos en el ecuador. Una órbita en su intersección con las costuras y la otra en los puntos medios de los gajos. Al rotar  $\pi$  en uno de los primeros, un gajo se intercambia con el de junto y los polos también; al rotar  $\pi$  en uno de los de enmedio, su gajo intercambia hemisferios. Si pensamos en el plano del ecuador, éste siempre regresa a su lugar y aunque en  $\mathbb{R}^3$  hayan sido rotaciones, las de orden 2 son reflexiones en él. Ese plano “cree” que el que actúa es el grupo diédrico de orden  $n$ , y efectivamente, este grupo es isomorfo a  $\mathbf{D}_n$  pero realizado con rotaciones en  $\mathbb{R}^3$ . Dibujo...

Pasemos a exhibir al grupo 235, pues, esféricamente, es el que más manoseamos en estas épocas. Es el grupo de las simetrías orientadas del balón de fútbol: los movimientos (reales, físicos) que dejan su estructura de gajitos pentagonales y hexa-

gonales en su lugar (abstrayéndonos de la válvula y los letreros). El centro de simetría rotacional de orden 5, que, para fijar ideas, podemos suponer que es el tal  $\mathbf{v}$  con el que arrancamos la demostración, es el centro de un pentágono: rotar  $2\pi/5$  ahí, claramente, preserva la estructura. Como centro de orden 3 (que ha de ser  $\mathbf{w}$ ) tomemos el centro de un hexagonito adyacente y obsérvese que su simetría es de orden 3 (no 6) pues a su alrededor alternan tres pentágonos y tres hexágonos. El de orden 2 (que apareció como  $\mathbf{u}$  en la demostración) es entonces el punto medio de la costura entre el hexagonito escogido y un hexágono adyacente (también pegado al pentágono de  $\mathbf{v}$ ); al rotar  $\pi$  ahí, se voltea la costura, se intercambian sus dos hexágonos y el pentágono original pasa al opuesto siguiendo la costura, cuyo centro es el tal  $\mathbf{v}'$ .

Es claro entonces que las órbitas de los tres tipos de puntos singulares son los centros de los pentágonos (orden 5) que hay 12, los de los hexágonos (orden 3) que hay 20 y los de las costuras entre estos (orden 2) que hay 30; y de cualquiera de ellos se obtiene que el grupo tiene 60 elementos. Obsérvese también que en la demostración pudimos haber empezado con cualquiera de las órbitas y haber llegado al mismo tipo de triángulo  $T$ , pero el punto auxiliar  $\mathbf{v}'$ , dependiendo de cómo fue que arrancamos, hubiera sido el nuevo que se obtiene al reflejar a  $T$  en sus tres lados (¿en qué orden hubieran aparecido los puntos en la demostración de haber empezado con uno de orden 3 o 2?). Al mover el cuadrilátero que forman  $T$  junto con alguno de sus reflejados por el grupo, se cubre toda la esfera sin traslapes (salvo en aristas o vértices), de aquí la relación entre las dos últimas columnas de la tabla. En fin, la existencia del grupo 235, la demuestra cualquier balón de fútbol aunque clásicamente se usan como referencia el *dodecaedro* y el *icosaedro*.

Dibujos...

El *dodecaedro* tiene como vértices los centros de simetría de orden 3; se obtiene de ellos tomando su *casco convexo*: todo lo que atrapan o está entre ellos y que formalmente se define como el conjunto de todas sus posibles combinaciones afines con coeficientes positivos. Su frontera está formada de doce (y de ahí el nombre) caras pentagonales que se juntan de a tres por vértice. Análogamente, o de manera dual, el *icosaedro* es el casco convexo de los centros de simetría de orden 5, que queda formado por caras triangulares de a cinco por vértice. En ambos casos, los centros de simetría de orden 2 están en los puntos medios de las aristas.

El grupo 234 es el de las simetrías orientadas del cubo (del dado borrado o, esféricamente, del balón de vólibol), cuyo dual, con el que comparte el grupo, es el octaedro (ocho triángulos de a cuatro por vértice). Por último, el 233 es el del tetraedro (cuatro triángulos equiláteros pegados) que es autodual. Obsérvese que en este grupo, aunque sólo hay puntos singulares de orden 2 y 3, estos últimos se dividen en dos órbitas que corresponden a los cuatro vértices y a los centros de las caras.

Habiendo expuesto los posibles grupos, podemos resumir.

**Teorema 5.17** *Los subgrupos finitos de  $SO(3)$  son los cíclicos  $C_n$ , los diédricos orientados  $D_n$  (generados por dos medias vueltas) y los tres grupos de simetrías orientadas de los sólidos platónicos.*  $\square$

---

**EJERCICIO 5.42** ¿Cuál es el grupo de simetrías orientadas de la pelota de tenis?

---

### 5.4.2 Subgrupos finitos no orientados

Veremos ahora qué posibilidades tiene  $G \subset \mathbf{O}(3)$  finito si además tiene algún elemento que invierte orientación (y por lo tanto la mitad de ellos lo hacen).

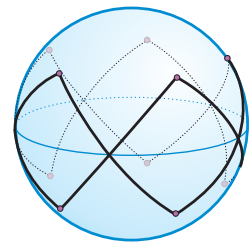
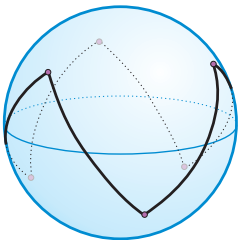
Consideremos primero el caso general de un paso  $\rho$  en una línea  $\xi$ . ¿Qué genera? Si  $\rho$  está dentro de un grupo finito, al considerar su acción dentro de la línea  $\xi$ , que es un círculo,  $\rho$  genera ahí un grupo cíclico y podemos suponer que entonces tiene un ángulo  $2\pi/n$  (si no, lo cambiamos por su potencia que sí lo tiene). Para fijar ideas y tener una figura geométrica en mente, supongamos que  $\xi$  es el ecuador y tomemos un punto  $\mathbf{v}_0$  en el hemisferio norte (distinto del polo);  $\rho(\mathbf{v}_0) =: \mathbf{v}_1$  queda en el hemisferio sur. Si tomamos el segmento de  $\mathbf{v}_0$  a  $\mathbf{v}_1$  y le aplicamos  $\rho$ , nos queda un segmento que sale de  $\mathbf{v}_1$ , vuelve a cruzar el ecuador hacia el norte y llega a  $\mathbf{v}_2 := \rho(\mathbf{v}_1) = \rho^2(\mathbf{v}_0)$ , y podemos seguir generando un zigzag con  $\mathbf{v}_i := \rho^i(\mathbf{v}_0)$  que “zurce” el ecuador con segmentos de  $\mathbf{v}_i$  a  $\mathbf{v}_{i+1}$ . Es un polígono espacial o esférico que llamaremos  $Z_n$ , “el zigzag- $n$ ”.

Hay de dos sopas, si  $n$  es impar,  $\mathbf{v}_n$  queda en el hemisferio sur; pues  $\rho^n$  regresa al círculo  $\xi$  a su lugar pero refleja sus dos lados, es justo la reflexión en  $\xi$ , ya que al componer un número impar de transformaciones que invierten orientación, ésta se invierte. Por la misma razón, si  $n$  es par, entonces  $\rho^n = \text{id}$ ,  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_n$  y  $\rho$  genera un

grupo cíclico de orden  $n$  que tiene como únicos puntos singulares a los polos y en ellos el estabilizador es cíclico de orden  $n/2$  (con generador  $\rho^2$ ), pues sólo en las composiciones pares estos puntos regresan a su lugar (lo que corresponde a que los  $\mathbf{v}_i$  con  $i$  par están en el hemisferio norte.) Volviendo al caso en que  $n$  es impar (y entonces  $\rho^n$  es la reflexión en  $\xi$  y  $\mathbf{v}_n$  el reflejado de  $\mathbf{v}_0$ ), hay que dar una segunda vuelta para que  $\mathbf{v}_0$  y también toda la esfera regrese a su lugar,  $\rho^{2n} = \text{id}$ . En este caso,  $\rho$  genera un grupo

cíclico de orden  $2n$  que también tiene dos puntos singulares (los polos) con estabilizador de la mitad ( $\mathbf{C}_n$  con generador de ángulo mínimo  $\rho^{n+1}$ ), pero que además tiene puntos singulares en todo  $\xi$ , que llamaremos un *espejo*, cuyo estabilizador es la reflexión  $\rho^n$  (junto con  $\text{id}$ , por supuesto). Podemos resumir que los grupos finitos generados por un paso siempre son cíclicos de orden par, pero que ellos aparecen de dos formas distinguibles por la configuración de sus puntos singulares.

Hay una excepción en lo que hemos dicho; para  $n = 1, 2$  no aparecen los centros de simetría rotacional en los polos. Para  $n = 1$  tenemos una simple reflexión, y para  $n = 2$ ,  $\rho$  es la función antípoda  $\alpha$  que no tiene puntos ni rectas distinguidas: todos



sus estabilizadores son triviales (dícese que el grupo  $\{\text{id}, \alpha\}$  “actúa libremente” en  $\mathbb{S}^2$ );  $\xi$  sólo sirvió de apoyo pero a ella no la distingue el grupo.

...Dibujo,  $Z_n$

Para  $n > 2$ , el zigzag- $n$ ,  $Z_n$ , es un ciclo o polígono combinatorio (de longitud  $n$  para  $n$  par y de longitud  $2n$  para  $n$  impar), donde  $\rho$  actúa como su rotación generadora. Podemos agrandar al grupo  $\langle \rho \rangle$  (el generado por  $\rho$ ) para que tenga todas las posibles simetrías combinatorias del polígono  $Z_n$ , si le adjuntamos la reflexión  $\sigma$  en la línea perpendicular a  $\xi$ , que pasa por  $\mathbf{v}_0$ , y que combinatoriamente corresponde a la reflexión en el vértice básico. Entonces el grupo crece a un diédrico, donde, así como unas “rotaciones combinatorias” invertían orientación en la esfera (los pasos), las “reflexiones combinatorias” en las aristas son ahora rotaciones de  $\pi$  en las intersecciones de las aristas con el ecuador (la que “refleja” en el centro de la primera arista es  $\sigma \circ \rho^{-1}$ ). Pero de nuevo, la configuración de puntos singulares distingue estos dos diédricos. Para  $n$  par, tenemos dos centros *caleidoscópicos* (con estabilizador diédrico) de orden  $n/2$  en los polos junto con los  $n/2$  espejos entre ellos y otros  $n/2$  puntos de simetría rotacional de orden 2 en el ecuador (donde se intersectan las aristas de  $Z_n$  al ecuador y justo a medio camino entre los espejos). Pero para  $n$  impar, como ya teníamos un espejo en el ecuador, junto con las nuevas rotaciones de  $\pi$  ahí, se producen  $n$  centros caleidoscópicos de orden 2 (una órbita en los cruces dobles de aristas de  $Z_n$  y la otra entre pares de vértices opuestos de  $Z_n$ ).

...Dibujo

Nos falta describir los *grupos caleidoscópicos*: finitos y generados por reflexiones. Los generados por dos reflexiones son diédricos (que ya aparecieron como subgrupos estabilizadores) y que esencialmente vienen de una dimensión inferior. Pero tenemos además los generados por tres reflexiones con espejos en los lados de un triángulo  $T$  “racional” con ángulos  $\pi/k, \pi/m, \pi/n$  como en la Tabla 5.9 cuyo subgrupo que preserva orientación, es uno de los que ya estudiamos. Su configuración de puntos singulares es la misma que la de sus grupos de orientación, pero el estabilizador en cada punto se vuelve diédrico en vez de cíclico; y hay que añadir todos los espejos que parten a  $\mathbb{S}^2$  en triangulitos equivalentes a  $T$ , tantos como elementos del grupo y justo el doble de lo indicado en la tabla. Obsérvese que de los primeros, la familia  $22n$ , los de  $n$  impar ya aparecieron como otra representación de los diédricos; pero para  $n$  par son nuevos.

Los tres que nos quedan son los grupos de simetrías de los sólidos platónicos; llamémoslos  $K_{233}$ ,  $K_{234}$  y  $K_{235}$  que corresponden al tetraedro, al cubo (y octaedro) y al dodecaedro (e icosaedro). Se pueden obtener físicamente al poner tres espejos en los ángulos adecuados (claro, hay que cortar los espejos con cuidado y sabiendo cómo, pues los vidrios no son tan fáciles de mover e intersectar como nuestros planos abstractos en  $\mathbb{R}^3$ ). Para obtener estos tres planos se toman un vértice  $\mathbf{v}_0$ , el punto medio de una arista incidente  $\mathbf{v}_1$  y el centro,  $\mathbf{v}_2$ , de una de las dos caras de la arista; los planos que estos puntos generan por parejas junto con el origen (el baricentro del sólido platónico en cuestión) son los tres planos espejo del caleidoscopio correspondiente. Al asomarse a él se multiplica nuestra imagen, una por cada elemento del grupo, y viendo cada una a través de su triangulito. En la siguiente sección veremos con más cuidado

Foto o dibujo

cómo obtener estos puntos.

Hemos dado cuenta de todos los posibles grupos finitos de  $\mathbf{O}(3)$ . Falta demostrar que no hay más, la unicidad, pero lo dejamos como un posible trabajo o ejercicio avanzado.

---

**EJERCICIO 5.43** ¿Cuáles son los subgrupos de orientación de  $\text{Sim}(Z_n)$ ?

**EJERCICIO 5.44** ¿Cuántas reflexiones hay en  $K_{233}$  y cuántos pasos de qué ángulos? ¿Y en  $K_{234}$ ?

---

### 5.4.3 Los grupos platónicos

En esta sección estudiamos con más cuidado los grupos de simetrías de los poliedros platónicos y damos representaciones explícitas de ellos.

Usando la notación introducida por Schläfli para poliedros regulares en el siglo XIX, denotemos por  $\{\{m, n\}\}$  al poliedro platónico con  $m$  ágonos regulares por caras y con  $n$  de ellas en cada vértice.<sup>1</sup> Así  $\{\{m, n\}\}$  puede ser  $\{\{3, 3\}\}$ ,  $\{\{3, 4\}\}$ ,  $\{\{4, 3\}\}$ ,  $\{\{3, 5\}\}$  o  $\{\{5, 3\}\}$  (tetraedro, octaedro, cubo, icosaedro, dodecaedro). Como en la sección anterior, llamemos  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  respectivamente a un vértice, el punto medio de una arista y el centro de una cara incidentes. Pensemos además que  $\{\{m, n\}\}$  está centrado en el origen, y sea  $\mathbf{u}_i$  el punto en  $S^2$  en la dirección  $\mathbf{v}_i$ , *i.e.*,  $\mathbf{u}_i := (1/|\mathbf{v}_i|)\mathbf{v}_i$ . Entonces los ángulos internos del triángulo esférico  $T$  con vértices  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  tiene ángulos respectivos  $\pi/n, \pi/2, \pi/m$ . Si llamamos  $\rho_i$  a la reflexión en el lado de  $T$  opuesto a  $\mathbf{u}_i$ , entonces  $\rho_i$  cumple que  $\rho_i(\mathbf{u}_j) = \mathbf{u}_j \Leftrightarrow i \neq j$  (sólo mueve a  $\mathbf{u}_i$ ). Pero además, como son reflexiones y puesto que  $\rho_1\rho_0$  es la rotación generadora de la cara,  $\rho_2\rho_1$  es la del vértice y  $\rho_2\rho_0$  es la media vuelta en la arista, se tiene que cumplen las *relaciones de Coxeter*:

$$\begin{aligned} \rho_i^2 &= \mathbf{1} \quad \text{para } i = 0, 1, 2 \\ (\rho_1\rho_0)^m &= (\rho_2\rho_1)^n = (\rho_2\rho_0)^2 = \mathbf{1}, \end{aligned} \tag{5.10}$$

donde entendemos por  $\mathbf{1}$  a la identidad. Estas relaciones son importantes pues, en ...Dibujos abstracto, definen por completo al grupo; se dice que dan una *presentación* de él por generadores y relaciones. No lo demostraremos, pero nótese que el análogo en dimensión 2 de los poliedros platónicos son los polígonos regulares. Si llamamos  $\{\{m\}\}$  al de  $m$  lados, su grupo de simetrías está generado por dos reflexiones,  $\rho_0$  y  $\rho_1$ , que cumplen las relaciones

$$\rho_0^2 = \rho_1^2 = (\rho_1\rho_0)^m = \mathbf{1}.$$

Que esto define en abstracto el grupo diédrico  $\mathbf{D}_m$  es porque al considerar  $\rho_0$  y  $\rho_1$  como letras y tomando en cuenta la equivalencia que determinan estas relaciones,

---

<sup>1</sup>Usaremos dobles corchetes para que no se confundan con conjuntos, aunque originalmente Schläfli usaba sólo uno.

las palabras en  $\rho_0$ ,  $\rho_1$  y sus inversos corresponden a los elementos de  $\mathbf{D}_m$ ; cualquier palabra es equivalente (usando las sustituciones adecuadas en subpalabras) a una de tamaño chico y en la que se alternan las letras. No entramos en detalles, sólo queremos indicar que se abren puertas a generalizaciones naturales a más dimensiones y lo

Dibujo...(cubo)dejamos como motivación para un curso de álgebra y el estudio abstracto de grupos.

Lo que sí haremos es dar una *representación* explícita con matrices, es decir, dando una posición fija al poliedro  $\{\{m, n\}\}$  en  $\mathbb{R}^3$  y fijando las coordenadas de la terna básica  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ; estas reflexiones se expresarán como matrices que cumplen las seis relaciones de Coxeter (5.10).

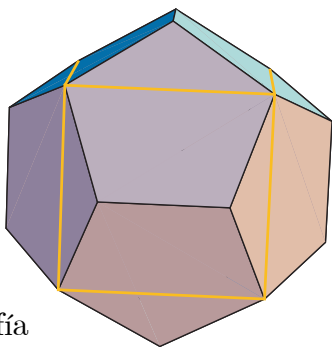
Empecemos con el cubo  $\{\{4, 3\}\}$ . Sus coordenadas más elegantes se obtienen al tomar como vértices los ocho puntos de coordenadas  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ ; y entonces es un cubo paralelo a los ejes y con arista de tamaño 2. Si tomamos como terna básica  $\mathbf{v}_0 = (1, 1, 1)$ ,  $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 1)$ , entonces la representación del grupo de simetrías del cubo, que habíamos llamado  $K_{234}$ , queda determinada por las matrices

$$\rho_0 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \rho_1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \rho_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se tiene entonces que  $\rho_1\rho_0$  es la rotación de  $\pi/2$  en el eje  $z$ , y que  $\rho_2\rho_1$  es la matriz que permuta a la base canónica cíclicamente  $\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_3 \mapsto \mathbf{e}_1$ . Por lo que hemos visto, todas las multiplicaciones posibles de estas tres matrices dan 48 (cada columna y cada renglon con dos ceros y un  $\pm 1$ ) y son todas las simetrías del cubo.

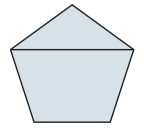
El tetraedro, que conviene verlo inscrito en este cubo, se deja como ejercicio. Es más arduo establecer las coordenadas del dodecaedro  $\{\{5, 3\}\}$ . Conviene verlo directo

hacia una arista; se ven entonces sólo cuatro caras, las dos pegadas por la arista y las dos “opuestas” a ella en sus vértices. Otras cuatro caras quedan de canto y las cuatro restantes atrás. Se observa entonces que los cuatro vértices que rodean a nuestra arista forman un cuadrado cuyo lado es la diagonal del pentágono, y que este cuadrado se completa hacia atrás para formar un cubo. Los vértices de este cubo son vértices del dodecaedro (se dice que está *inscrito*) y sus aristas son diagonales de las caras pentagonales, quedando cada cara del dodecaedro con una diagonal distinguida.



tipografía  
dibujo  
pirámide

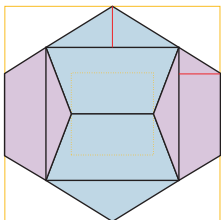
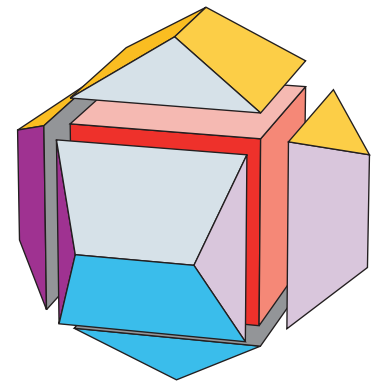
Tenemos que hacer un paréntesis y ver que la diagonal de un pentágono regular está en proporción áurea con su lado. Para esto, tomemos el triángulo isósceles en que corta una diagonal al pentágono. Éste es el isósceles *áureo chaparro*. Es fácil ver que sus ángulos miden  $\pi/5$ ,  $\pi/5$  y  $3\pi/5$ . Entonces al tomar un triangulito semejante con su base en el lado chico, lo que queda vuelve a ser isósceles, pues sus ángulos son  $2\pi/5$ ,  $2\pi/5$  y  $\pi/5$ : es el *áureo alto*. De aquí se sigue que sabemos cuánto mide el lado pequeño del semejante. Si el lado del pentágono mide 1, su diagonal  $\phi$  debe cumplir por semejanza de triángulos que



$$\frac{1}{\phi} = \frac{\phi - 1}{1} \quad \Leftrightarrow \quad \phi^2 = \phi + 1. \quad (5.11)$$

La solución positiva de esta ecuación es la proporción áurea (veéase Sección 3.9.3)

Cosideremos entonces un dodecaedro con arista de tamaño 2, de tal manera que ocho de sus vértices queden en los del cubo estándar de lado  $2\phi$  —es decir, son los ocho puntos  $(\pm\phi, \pm\phi, \pm\phi)$ —; para acabar de determinarlo hacemos que la arista por la que lo atraviesa —en su punto medio— el eje  $x$  esté en dirección del eje  $y$ . El dodecaedro se obtiene de este cubo pegándole adecuadamente una palapita en cada cara. El techo de cada palapa está hecho de dos triángulos y dos cuadriláteros y se ajustan los unos de una con los otros de otra para formar las caras pentagonales. Nos falta determinar la altura de la palapa que deberíamos llamar *áurea*.



Para esto, obsérvese que en la proyección ortogonal del dodecaedro al plano  $yz$  se ven los planos de la planta y las dos fachadas de la palapa áurea, y entonces la altura aparece en dos triángulos semejantes como sus dos catetos; los otros catetos los conocemos, son  $\phi$  arriba, y  $\phi - 1 = \phi^{-1}$  al lado. Por (5.11) la altura tiene que ser 1. De aquí que el punto medio de la arista más cercana a nosotros es  $(\phi^2, 0, 0)$ , de nuevo por (5.11), y los 12 vértices que nos faltan son  $(\pm\phi^2, \pm 1, 0)$ ,  $(0, \pm\phi^2, \pm 1)$  y  $(\pm 1, 0, \pm\phi^2)$ .

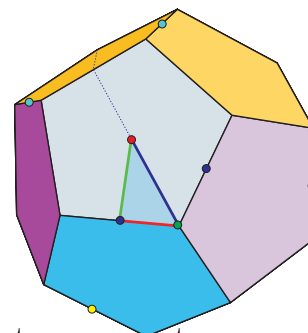
Si tomamos como triángulo básico  $\mathbf{v}_0 = (\phi^2, 1, 0)$ ,  $\mathbf{v}_1 = (\phi^2, 0, 0)$  y  $\mathbf{v}_2$  como el centro de la cara superior (no necesitaremos sus coordenadas), entonces dos de las reflexiones son muy fáciles:

$$\rho_0 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \rho_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar  $\rho_1$ , podemos ver a dónde tienen que ir los tres vectores canónicos  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , que no es difícil, pues en sus direcciones quedaron puntos medios de aristas. Por ejemplo,  $\mathbf{v}_1$  tiene que ir bajo  $\rho_1$  a

$$\frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} \phi \\ \phi \\ \phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi^2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \phi^2 + \phi \\ \phi^2 \\ \phi \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \phi^3 \\ \phi^2 \\ \phi \end{pmatrix},$$

cuya norma es  $\phi^2$  (esto se ve usando repetidamente la ecuación áurea (5.11) que implica  $\phi^n = \phi^{n-1} + \phi^{n-2}$  y que nos permite bajar los grados de las expresiones). Entonces, normalizando, la primera columna de la matriz debe ser  $(1/2) (\phi, 1, \phi^{-1})$ . Análogamente se encuentran las imágenes de  $\mathbf{e}_2$  y  $\mathbf{e}_3$  para obtener



$$\rho_1 \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \phi & 1 & \phi^{-1} \\ 1 & -\phi^{-1} & -\phi \\ \phi^{-1} & -\phi & 1 \end{pmatrix}.$$

---

**EJERCICIO 5.45** Encuentra las simetrías del tetraedro

---

<sup>1</sup>Para leer más sobre poliedros y otros puntos de vista ver [4], [11] y [10].



# Capítulo 6

## Geometría proyectiva

### 6.1 Motivación

Formalmente hablando, Desargues descubrió la geometría proyectiva; fundamentó matemáticamente los métodos de la *perspectiva* que habían desarrollado los artistas del renacimiento. Pero su trabajo, publicado en 1639, pasó desapercibido por 200 años (a excepción de dos teoremas famosos que se publicaron en otro lado). Quizá está desatención histórica se deba a que su contemporáneo Descartes se llevó las palmas. No es sino hasta el siglo XIX, cuando la geometría proyectiva, así como la hiperbólica, se establecieron como algo real, ineludible y cierto dentro de las matemáticas. Pero este proceso no fue fácil. Había que relajar la idea de **El Espacio** y **El Plano** (así, con mayúsculas y negritas) como algo único y dado —“ahí vivimos, se pensaba; está dado por Dios, se creía desde los griegos”—, así que pluralizar la idea a “los espacios” y “las geometrías”, casi como pasar de un cómodo monoteísmo a un exótico politeísmo, requirió tiempo y argumentos más allá de la simple lógica. Quizá lo que acabó de enraizarlas fue encontrar un modelo analítico: dentro del mismo contexto de la geometría euclidiana se puede construir la proyectiva, y entonces, si se acepta la primera, no queda más remedio que aceptar la segunda. Y este proceso acabó con contundencia a principios del siglo XX. Einstein, basándose en los impresionantes desarrollos geométricos de los matemáticos durante el recién rebasado “siglo de las geometrías”, demostró que, a gran escala, el universo se modela mejor con las nuevas geometrías que con el viejo y rígido espacio euclidiano.

No es nuestro interés seguir la línea de desarrollo histórico, pero sí vale la pena hacer una pausa para, a manera de motivación, abrir la mente a otros posibles enfoques.

#### 6.1.1 El quinto postulado

Como mencionamos en las primeras páginas de este libro, el quinto postulado de Euclides recibió mucha atención por parte de los matemáticos de 20 siglos. Se dudaba

de la necesidad de incluirlo como axioma, reflejando la idea de que “El Plano” era único y estaba divinamente dado. Su negación tiene dos posibilidades: que no haya paralelismo, es decir, que cada par de rectas se intersecta en un punto; o bien, que el paralelismo no sea único, que por un punto fuera de una línea pasen muchas que no la intersectan. Al incluir la primera negación como quinto axioma se obtiene la geometría proyectiva; y al incluir la segunda la hiperbólica. Ahora entendemos bien que estos sistemas axiomáticos (el de la geometría proyectiva y el de la geometría hiperbólica) se dan, se construyen, en modelos basados en axiomas más elementales; tal y como construimos el plano y los espacios euclidianos basados en los axiomas de los números reales. Pero a principios del siglo XIX, que algún matemático demostrara teoremas basado en estos sistemas axiomáticos exóticos no implicaba que un poco más adelante, que a la vuelta de la esquina, no llegaría a una contradicción. Era trabajo de alto riesgo, cuestión de creer o no creer, y los “exóticos” ganaron la partida.

Regresando a la teoría que en este libro hemos desarrollado, tenemos a la mano la evidencia (y siempre estuvo ahí) de que el Quinto se puede negar proyectivamente. Acabamos de hacer geometría en la esfera; definimos líneas, distancias y ángulos, y vimos que hay un grupo que la hace homogénea; todo esto basados en los axiomas de los números reales. Nótese que la esfera casi cumple con los axiomas proyectivos excepto por que las líneas (¡cualquier par!) se intersectan en dos puntos en vez de uno, pero estas parejas de intersección son muy especiales: sólo para ellas falla la unicidad de la línea por dos puntos. Entonces, si declaramos que cada pareja de antípodas es un solo punto (esta abstracción es la que cuesta trabajo), se obtiene el **plano proyectivo rígido**. Así, el plano proyectivo es algo abstracto (sus puntos son parejas especiales de puntos, los antípodas), y la esfera es algo concreto que podemos ver y que lo “cubre” dos veces. Este modelo abstracto del plano proyectivo cumple, ahora sí, con todos los axiomas proyectivos: las líneas siempre se intersectan en un solo punto (piénsese “pareja antípoda”) y por cada par de puntos (piénsese, par de “parejas antípodas”) pasa una única línea. Además, a este plano proyectivo lo podemos ver en porciones pequeñas: es igual a un pedazo chico de  $\mathbb{S}^2$ ; sólo la imagen global se dificulta.

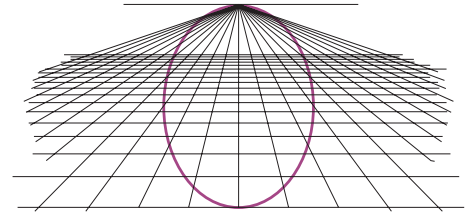
Sin embargo, no seguiremos la línea de desarrollo teórico que acabamos de esbozar. Habremos de regresar a ella, y entonces debe ser clara y sencilla, después de desarrollar el **plano proyectivo holgado**, que tiene muchó más simetrías porque no tiene noción de distancia. Podría decirse que es el análogo del plano afín (holgado) respecto al euclidiano (rígido). Y la motivación para entrarle viene de otro par de problemas o evidencias.

### 6.1.2 Las cónicas y el infinito

Mucho antes del surgimiento de la geometría analítica (Descartes), los griegos estudiaron las cónicas definidas como la intersección de un plano con un cono circular (¡y de ahí su nombre!). Ya las definimos, estudiamos y clasificamos (afín e isométricamente).

Aunque su definición sea única (insistimos, un cono intersectado con un plano, que no pasa por su ápice, precisamos), nos da tres tipos esencialmente distintos: elipses, parábolas e hipérbolas. Se pueden diferenciar por su comportamiento “al infinito”: las elipses no tienen nada que ver con él; las parábolas se aproximan a él en una dirección importante para su propiedad focal, y las hipérbolas llegan al infinito en dos direcciones dadas por sus asíntotas, y se puede decir que pasan por él dos veces.

Más precisamente, la pendiente de las tangentes a la parábola tiende, cuando nos alejamos al infinito en cualquiera de sus dos direcciones, a la dirección de su eje, aunque la tangente tal cual se aleje al infinito. Podría decirse que la parábola es tangente al infinito, basta verla en perspectiva. Y de la hipérbola podemos decir aún más: si un punto en ella se aleja al infinito en cualquiera de sus cuatro posibilidades, su línea tangente, como línea, simple y plácidamente se acerca a una de las asíntotas y el movimiento natural de esa tangente es tocar a la asíntota, y seguirse como la tangente de puntos que se acercan por la rama opuesta. Como si la hipérbola simplemente cruzara al infinito por dos puntos correspondientes a sus dos asíntotas. (Véanse las animaciones del Capítulo 2 para sentir la naturalidad de lo que estamos diciendo.)



Debe haber una manera natural y coherente de incluir estos “puntos al infinito” para que las tres cónicas se conviertan en una sola cosa (como los griegos lo intuyeron). Consiste en agregarle al plano afín una recta al infinito cuyos puntos están asociados a las posibles direcciones de las rectas; y entonces las tres cónicas se completan y diferencian por su relación con esa recta, o no la tocan, o son tangentes o la cruzan en dos puntos (lo mismo que sucede con el resto de las rectas). Lograr que esa recta (que parece inalcanzable pero que se ve tan clara como el horizonte) se convierta en una recta como cualquier otra es lo que hace el plano proyectivo.

La técnica y la soltura matemática que se obtiene al formalizar lo anterior, permitió que la geometría algebraica se desarrollara en la segunda mitad del siglo XIX. Los inicios y la aplicación concreta a cónicas se verán en el siguiente capítulo. Por lo pronto, dejemos de divagar y concentrémonos en el problema que da la guía y la pauta del desarrollo formal de este capítulo. Además es el problema que dio su nombre a la geometría proyectiva y que históricamente tiene la primicia de su desarrollo.

### 6.1.3 El problema del pintor

En el Renacimiento se fue haciendo claro que un dibujo “realista” de una escena cotidiana se logra proyectando desde un “foco” (ojo hipotético) sobre el lienzo. Es decir, a cada punto,  $x$  digamos, de la escena le corresponde un punto en el lienzo,  $\Lambda$  digamos, al tomar la recta que pasa por el foco y  $x$  e intersectarla con  $\Lambda$ . La razón por la que los cuadros dibujados con esta técnica nos parece “realista” es que si se le observa desde el foco, la imagen que se percibe es casi idéntica (en teoría idéntica

...Dibujo:  
¿Reproducción  
Durerero?

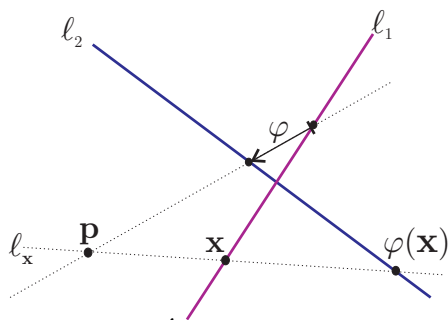
viendo con un solo ojo) a la escena original. Y si vemos el cuadro desde otro punto cualquiera, nuestro cerebro se encarga de adaptarlo para recrear la tridimensionalidad que se plasmó en el lienzo. Cómo logra esto nuestra mente, es harina de otro costal, pero que es un hecho que sabe hacerlo, y muy bien, se demuestra observando que de dos imágenes planas obtenidas con el mismo principio (las imágenes que se proyectan en la retina) tenemos una idea muy clara del espacio tridimensional que habitamos. Los pintores renacentistas, entre quienes destaca Durero, desarrollaron técnicas para dibujar con este principio. Las llamaron “métodos de la perspectiva” e incluyen el uso de “puntos de fuga”. Como veremos más adelante estos puntos no son otra cosa que “puntos al infinito” que, al desarrollar la geometría proyectiva, se pueden tratar como puntos cualesquiera.

...Dibujo rieles

El problema concreto con el que empezamos la discusión formal en este capítulo puede plantearse en este contexto; es, por así decirlo, el problema que motivo a Desargues pero usando los métodos de su contemporáneo Descartes. Pensemos que queremos dibujar, en perspectiva, una vía de tren sobre una planicie inmensa. Los dos rieles se dibujan como segmentos que convergen a un punto de fuga. El problema es cómo dibujar los durmientes. Si en la realidad están espaciados cada metro, digamos, ¿cada cuántos centímetros habrá que dibujarlos? Dicho de otra manera, ¿cómo cambia la escala al proyectar desde un punto?. Este problema, numérico y de tres a dos dimensiones, es el que resuelven automáticamente las computadoras en la realidad virtual. Veremos al final cómo lo hacen.

## 6.2 La línea proyectiva

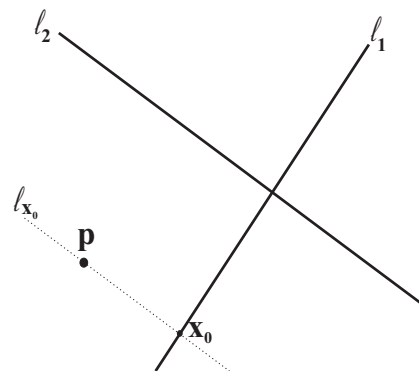
### 6.2.1 Proyecciones de rectas en rectas



Supongamos que tenemos dos rectas  $l_1$  y  $l_2$  en  $\mathbb{R}^2$  parametrizadas con parámetros  $s$  y  $t$  respectivamente. Sea  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$  un punto fuera de ellas. Podemos definir la *proyección desde  $\mathbf{p}$*  de  $l_1$  a  $l_2$  geoméricamente como sigue. Dado  $\mathbf{x} \in l_1$ , sea  $l_x$  la recta que pasa por  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{x}$ ; sea entonces

$$\begin{aligned} \text{“}\varphi : l_1 \rightarrow l_2\text{”} \\ \varphi(\mathbf{x}) = l_2 \cap l_x. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Ésta no es una función bien definida (de ahí que hayamos usado comillas) pues si  $\mathbf{x}_0 \in l_1$  es tal que  $l_{x_0}$  es paralela a  $l_2$  entonces  $l_2 \cap l_{x_0} = \emptyset$  y  $\varphi(\mathbf{x}_0)$  no tiene sentido. Pero este problema sólo se da en un punto, así que nos podemos hacer de la vista gorda y continuar. La pregunta que nos interesa responder es: ¿cómo se expresa  $\varphi$  en términos de los parámetros  $s$  y  $t$ ?



Veamos primero un ejemplo concreto y sencillo, donde  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ ,

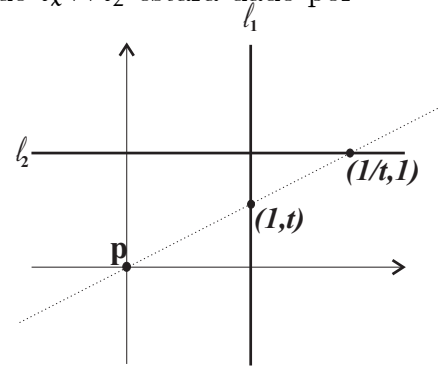
$$\begin{aligned} \ell_1 &= \{(1, t) \mid t \in \mathbb{R}\}, \\ \ell_2 &= \{(s, 1) \mid s \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Dado  $\mathbf{x} = (1, t) \in \ell_1$ , la recta  $\ell_x$  es  $\{(r, rt) \mid r \in \mathbb{R}\}$ . Así que  $\ell_x \cap \ell_2$  estará dado por la  $r$  que cumple  $rt = 1$ , es decir  $r = 1/t$ , y por lo tanto

$$\varphi(1, t) = (1/t, 1),$$

que está bien definida excepto cuando  $t = 0$ , lo que corresponde a que la recta por  $(1, 0)$  y el origen no intersecta a  $\ell_2$ . Pensando a  $\varphi$  como función entre los parámetros, tenemos entonces

$$\text{“} \varphi(t) = \frac{1}{t} \text{”},$$



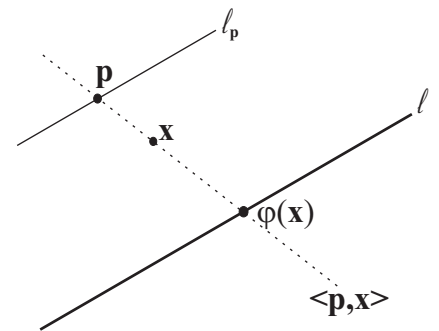
donde el entrecomillado significa que hemos abusado de la notación. Para hacer esto más preciso, y de una vez más general, notemos primero que la proyección desde un punto a una recta se puede extender a casi todo el plano.

Fijando una recta  $\ell$  y un punto  $\mathbf{p}$  fuera de ella, podemos definir para  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ , a  $\varphi(\mathbf{x}) \in \ell$  como la intersección de la recta que pasa por  $\mathbf{p}$  y por  $\mathbf{x}$  (que denotaremos  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle$ )<sup>1</sup> con la recta  $\ell$ :

$$\varphi(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \cap \ell.$$

Esta definición tiene sentido sólo cuando  $\mathbf{x}$  no está en la paralela a  $\ell$  por  $\mathbf{p}$ , pues entonces no hay tal intersección. Sea  $\ell_p$  la paralela a  $\ell$  que pasa por  $\mathbf{p}$ , entonces  $\varphi$  está bien definida como función

$$\varphi : \mathbb{R}^2 - \ell_p \rightarrow \ell.$$



Por ejemplo, en el caso en que  $\ell$  es la recta  $y = 1$  ( $\ell_2$  del ejemplo anterior) y que  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ , se tiene que

$$\varphi(x, y) = (x/y, 1), \tag{6.2}$$

que está bien definida cuando  $y \neq 0$ .

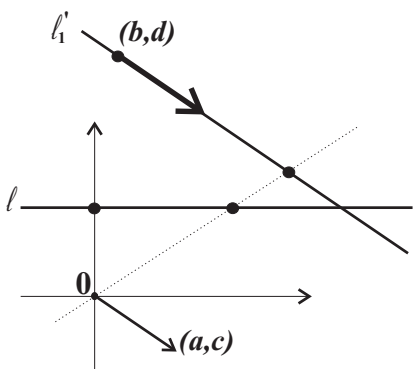
<sup>1</sup>Ya habíamos usado la notación  $\langle -, - \rangle$  para el plano generado por dos vectores, pero por el contexto en que se usa no debe causar conflictos, y más adelante se justificará este abuso.

Ahora sí estamos en posición de demostrar el siguiente lema que responde a nuestra pregunta inicial.

**Lema 6.1** Sean  $\ell_1$  y  $\ell_2$  dos rectas en  $\mathbb{R}^2$  parametrizadas afínmente con parámetros  $s$  y  $t$  respectivamente; y sea  $\mathbf{p}$  un punto fuera de ellas (i.e.  $\mathbf{p} \notin \ell_1 \cup \ell_2$ ). La proyección desde  $\mathbf{p}$  de  $\ell_1$  a  $\ell_2$  tiene la expresión paramétrica

$$\mu(s) = \frac{as + b}{cs + d}$$

para algunas constantes  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  y no todas ellas cero.



**Demostración.** Por el Teorema ?? existe una única transformación afín de  $\mathbb{R}^2$  que manda al punto  $\mathbf{p}$  en el origen y a la recta  $\ell_2$  en la recta  $\ell : y = 1$  haciendo corresponder al parámetro  $t$  con el parámetro natural  $x$ ; es decir, que manda a  $\mathbf{p}$  en  $\mathbf{0}$ , al punto base en  $\ell_2$  ( $t = 0$ ) en  $(0, 1)$  y al punto en  $\ell_2$  con  $t = 1$  en  $(1, 1)$ . Esta transformación afín manda a la recta  $\ell_1$  en una nueva recta  $\ell'_1$  que, al parametrizarse con  $s$ , tiene la expresión

$$\ell'_1 = \{(as + b, cs + d) \mid s \in \mathbb{R}\},$$

para algunas  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  no todas cero, pues  $(b, d) \neq (0, 0)$  ya que  $\mathbf{p} \notin \ell_1$ . Puesto que la proyección desde un punto es una construcción geométrica que no cambia por transformaciones afines (ya que éstas preservan rectas), entonces de la ecuación (6.2) y lo anterior se obtiene el lema.  $\square$

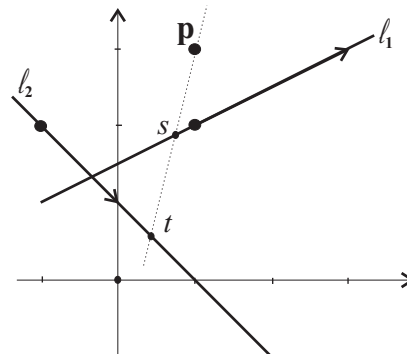
Para fijar ideas, veamos un ejemplo concreto y a través de él la idea de otra demostración que si siguiéramos en general daría una enorme complicación de letras, aunque no así de números.

**Ejemplo**

Sean  $\mathbf{p} = (1, 3)$ ,

$$\ell_1 = \{(2s + 1, s + 2) \mid s \in \mathbb{R}\},$$

$$\ell_2 = \{(t - 1, 2 - t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$



Queremos escribir la proyección  $\varphi$  de  $\ell_1$  a  $\ell_2$  desde  $\mathbf{p}$  definida en (6.1) como una función  $\mu$  entre los parámetros correspondientes. Para hacerlo, será conveniente escribir las rectas como funciones, es decir  $\ell_1(s) = (2s + 1, s + 2)$  y análogamente para  $\ell_2$ . Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \mu(s) = t &\Leftrightarrow \ell_1(s), \ell_2(t) \text{ y } \mathbf{p} \text{ están alineados} \\ &\Leftrightarrow \ell_1(s) - \mathbf{p} \parallel \ell_2(t) - \mathbf{p} \\ &\Leftrightarrow (2s, s - 1) \parallel (t - 2, -t - 1) \\ &\Leftrightarrow 2s(-t - 1) - (s - 1)(t - 2) = 0, \end{aligned}$$

donde usamos el criterio de que dos vectores son paralelos si y sólo si su determinante es cero. Y de esta última ecuación ya se puede despejar  $t$  en términos de  $s$ . Al desarrollarla nos da:

$$\begin{aligned} -3st + t - 2 &= 0 \\ t(-3s + 1) &= 2 \\ t &= \frac{-2}{3s - 1}. \end{aligned}$$

que nos dice que la función buscada es

$$\mu(s) = \frac{-2}{3s - 1}.$$

**EJERCICIO 6.1** En el ejemplo anterior, encuentra la función inversa de  $\mu$ , es decir la expresión paramétrica de la proyección desde  $\mathbf{p}$  de  $\ell_2$  en  $\ell_1$ ; llamémosla  $\nu$ .

**EJERCICIO 6.2** ¿En dónde no están definidas las funciones  $\mu$  y  $\nu$ ? ¿A qué corresponden geoméricamente? Haz un dibujo.

**EJERCICIO 6.3** Existe un único punto en  $\ell_2$  que no está en la imagen de la proyección. ¿A qué  $t$  corresponde, y cómo se obtiene geoméricamente?

**EJERCICIO 6.4** Análogamente, cuál es la única  $s$  que no está en la imagen de  $\nu$ . Dibújala.

**EJERCICIO 6.5** Sean  $\ell_1 = \{(s - 1, 2s + 2) \mid s \in \mathbb{R}\}$  y  $\ell_2 = \{(3t + 2, -t + 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$ . Encuentra las expresiones paramétricas de las proyecciones de  $\ell_1$  a  $\ell_2$  y de  $\ell_2$  a  $\ell_1$  desde los puntos  $\mathbf{p} = (-1, 1)$  y  $\mathbf{q} = (2, 2)$ .

### 6.2.2 Transformaciones de Moebius

Motivados por la sección anterior definamos una *transformación de Moebius*<sup>2</sup> como la expresión

$$\mu(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad (6.3)$$

donde  $x$  es una variable en  $\mathbb{R}$  y  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  son constantes y no todas ellas son cero.

La hemos llamado “expresión” y no función pues tiene un problema. Para el número real  $x_0$  que cumple  $cx + d = 0$  ( $x_0 = -d/c$ ) no está definida como número real, pues no se puede dividir por cero. Sin embargo, es claro que el límite de  $\mu(x)$  cuando  $x$  tiende a  $x_0$  es infinito. Al aproximarnos por un lado de  $x_0$  (de tal manera que  $cx + d$  tenga el mismo signo que  $ax + d$ ) da valores tan grandes como queramos (nos aproximamos a  $\infty$  por el lado positivo), y al aproximarnos a  $x_0$  por el otro lado nos aproximamos a  $\infty$  por el lado negativo. Si le añadimos a la recta real un punto al infinito,  $\mu$  mandaría naturalmente a  $-d/c$  al infinito. Formalicemos esta idea:

**Definición 6.2.1** La recta proyectiva,  $\mathbb{P}^1$ , es

$$\mathbb{P}^1 := \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

es decir, consta de los números reales junto con un nuevo punto llamado infinito y denotado  $\infty$  al que se aproxima uno creciendo tanto por el lado positivo de la recta como por el negativo.<sup>3</sup>

Y entonces hemos demostrado una parte del siguiente lema.

**Lema 6.2** La transformación de Moebius (6.3) define una función

$$\mu : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$$

que es biyectiva si y sólo si  $ad - bc \neq 0$ .

**Demostración.** Hemos visto que  $\mu$  está bien definida en todo  $\mathbb{R}$ , haciendo  $\mu(-c/d) = \infty$ . Nos falta definir  $\mu(\infty)$ ; y esta definición de nueva cuenta es natural pues  $\mu$  tiene un límite bien definido en  $\infty$ . Esto se ve cambiando de variable:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + b}{cx + d} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{a(1/y) + b}{c(1/y) + d} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{a + by}{c + dy} = \frac{a}{c}.$$

Definimos entonces  $\mu(\infty) = a/c$  si  $c \neq 0$ , y  $\mu(\infty) = \infty$  si  $c = 0$ . Por lo tanto  $\mu$  está bien definida en todo el dominio.

<sup>2</sup>real, deberíamos especificar, pues el uso más común del término es con el campo de los números complejos  $\mathbb{C}$  en vez del de los reales  $\mathbb{R}$ ; nótese que sólo se usará que  $\mathbb{R}$  es un campo.

<sup>3</sup>La recta proyectiva compleja,  $\mathbb{CP}^1 := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , con las transformaciones de Moebius complejas producen una geometría riquísima (ver, e.g. [24]), también conocida como *esfera de Riemann*.



Para ver si es biyectiva o no, intentaremos encontrar la función inversa. Pensamos entonces en una nueva variable,  $y$  digamos, definida por

$$y = \frac{ax + b}{cx + d},$$

y tratemos de despejar  $x$ :

$$\begin{aligned} y(cx + d) &= ax + b \\ cxy + dy - ax &= b \\ x(cy - a) &= -dy + b, \end{aligned}$$

de donde

$$x = \frac{dy - b}{-cy + a}.$$

Hasta ahora, no hemos puesto cuidado en si dividimos por cero o no; hemos procedido intempestivamente. Pero procedamos ahora más formalmente para demostrar lo que nos falta. Esta última expresión nos dice cuál, si acaso, debía ser la inversa. Así que definamos

$$\nu(x) = \frac{dy - b}{-cy + a}. \quad (6.4)$$

Por la primera parte de esta demostración,  $\nu$  es una función de  $\mathbb{P}^1$  en  $\mathbb{P}^1$ ; y cumple

$$\begin{aligned} (\nu \circ \mu)(x) &= \frac{d\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) - b}{-c\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) + a} \\ &= \frac{adx + bd - bcx - bd}{-acx - bc + acx + ad} \\ &= \frac{(ad - bc)x}{ad - bc}. \end{aligned}$$

Si  $ad - bc \neq 0$ , esta última expresión es  $x$  (para cualquier  $x \in \mathbb{R}$  y también cuando  $x = \infty$  usando las definiciones); de tal manera que  $\mu$  es biyectiva pues su inversa es  $\nu$ .

Nos falta ver que si  $ad - bc = 0$  entonces  $\mu$  no es biyectiva; de hecho es constante. Esto se puede ver por cuatro casos cuando alguna de las constantes es distinta de cero. Por ejemplo, si  $d \neq 0$ , multiplicando arriba y abajo por  $d$  en la expresión de  $\mu$  se obtiene

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \frac{d(ax + b)}{d(cx + d)} = \frac{adx + bd}{d(cx + d)} \\ &= \frac{bcx + bd}{d(cx + d)} = \frac{b(cx + d)}{d(cx + d)} = \frac{b}{d}, \end{aligned}$$

independientemente de la  $x$ . Como los otros casos, que se dejan al lector, son análogos, esto demuestra el lema.  $\square$

Observemos que en la demostración anterior encontramos la fórmula de la inversa de una función de Moebius y que ésta de nuevo resultó del mismo tipo. Si definimos a las *proyectividades de  $\mathbb{P}^1$*  (también conocidas como las *transformaciones de Moebius*) como

$$\mathbf{Pr}(1) := \{\mu : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \mid \mu(x) = \frac{ax + b}{cx + d}; ad - bc \neq 0\}$$

tenemos entonces:

**Teorema 6.3**  *$\mathbf{Pr}(1)$  es un grupo de transformaciones de la recta proyectiva  $\mathbb{P}^1$ .*

**Demostración.** Como la identidad es claramente una transformación de Moebius (tómese  $a = d = 1$  y  $b = c = 0$ ) y hemos visto que sus inversas también lo son, sólo nos falta ver que la composición de transformaciones de Moebius también es de Moebius. Sean

$$\mu(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad \text{y} \quad \nu(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}.$$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} (\mu \circ \nu)(x) &= \frac{a \left( \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \right) + b}{c \left( \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \right) + d} = \frac{a(\alpha x + \beta) + b(\gamma x + \delta)}{c(\alpha x + \beta) + d(\gamma x + \delta)} \\ &= \frac{(a\alpha + b\gamma)x + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)x + (c\beta + d\delta)} \in \mathbf{Pr}(1). \end{aligned} \quad (6.5)$$

□

Si pensamos que la recta proyectiva es una extensión de la recta real (se le añadió el punto al infinito), resulta entonces que las transformaciones afines son precisamente las proyectivas que fijan al infinito. Es decir, las proyectivas son una extensión de las afines. Pues si  $\mu \in \mathbf{Pr}(1)$  es tal que  $\mu(\infty) = \infty$ , entonces (siguiendo con la expresión (6.3)), como  $\mu(\infty) = a/c$ , se tiene que  $c = 0$ . Esto implica que  $d \neq 0$  (pues  $ad - bc \neq 0$ ) y por tanto

$$\mu(x) = (a/d)x + (b/d),$$

que es una transformación afín. Hemos demostrado que  $\mathbf{Af}(1) \subset \mathbf{Pr}(1)$ , y más precisamente que

$$\mathbf{Af}(1) = \{\mu \in \mathbf{Pr}(1) \mid \mu(\infty) = \infty\},$$

pues estas transformaciones de Moebius pueden interpretarse como transformaciones de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ .

---

**EJERCICIO 6.6** Para diversas transformaciones de Moebius (las que aparecen en los ejercicios anteriores, cuando menos), encuentra sus composiciones y sus inversas.

**EJERCICIO 6.7** Sean  $\ell_1$  y  $\ell_2$  dos rectas parametrizadas y  $\mathbf{p}$  un punto fuera de ellas. Demuestra que la transformación de Moebius que relaciona sus parámetros es afín si y sólo si las líneas son paralelas.

### 6.2.3 Teorema de 3 en 3

Si las transformaciones afines mandan cualquier pareja de puntos en cualquier otra, ahora las proyectivas mandan ternas en ternas (correspondiendo al hecho de que con  $\mathbf{Pr}(1)$  el infinito ya puede ir a cualquier otro punto).

**Teorema 6.4** Dadas dos ternas  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  y  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  de puntos distintos en  $\mathbb{P}^1$ , existe una única transformación proyectiva  $\mu \in \mathbf{Pr}(1)$  tal que  $\mu(\alpha_i) = \beta_i$  para  $i = 0, 1, 2$ .

**Demostración.** Veamos primero el caso en que  $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = \infty$ . Estamos buscando

$$\mu(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (6.6)$$

(i.e., las constantes  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) tal que  $\mu(\alpha_i) = \beta_i$  para  $i = 0, 1, 2$ . Las condiciones nos dan tres ecuaciones

$$\frac{b}{d} = \beta_0, \quad \frac{a+b}{c+d} = \beta_1, \quad \frac{a}{c} = \beta_2. \quad (6.7) \quad \begin{array}{c} \beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \\ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$$

Supongamos primero que las  $\beta_i$  son reales (i.e., que ninguna es  $\infty$ ). De la primera y la tercera ecuación se obtiene  $b = \beta_0 d$  y  $a = \beta_2 c$ , que, al sustituir en la segunda, nos da

$$(\beta_2 - \beta_1)c + (\beta_0 - \beta_1)d = 0.$$

Esta ecuación lineal con dos incógnitas tiene como una solución no trivial (recuérdese el compadre ortogonal):

$$c = \beta_1 - \beta_0, \quad d = \beta_2 - \beta_1$$

y por tanto

$$a = \beta_2(\beta_1 - \beta_0), \quad b = \beta_0(\beta_2 - \beta_1).$$

Si alguna de las  $\beta_i$  fuera  $\infty$  (digamos  $\beta_0 = \infty$ ), la ecuación correspondiente nos indica que el denominador es cero (en el ejemplo, que  $d = 0$ ). Y de cualquier manera el sistema tiene solución (que se deja al lector).

En el caso general (las  $\alpha_i$  son cualesquiera), se puede proceder de dos maneras. La primera, más económica en casos particulares, sería traducir las ecuaciones  $\mu(\alpha_i) = \beta_i$

a ecuaciones lineales para obtener el siguiente sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas ( $a, b, c, d$ ):

$$\begin{aligned}\alpha_0 a + b - \alpha_0 \beta_0 c - \beta_0 d &= 0 \\ \alpha_1 a + b - \alpha_1 \beta_1 c - \beta_1 d &= 0 \\ \alpha_2 a + b - \alpha_2 \beta_2 c - \beta_2 d &= 0\end{aligned}$$

(en el caso en que todas las constantes sean reales, o uno equivalente cuando aparezcan infinitos); y luego encontrar una solución no trivial. O bien se puede proceder usando el caso que ya resolvimos y que las transformaciones de Moebius no constantes tienen inversa. Si  $\nu$  (y, respectivamente,  $\mu$ ) es la transformación de Moebius que manda a  $0, 1, \infty$  en  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  (y, respectivamente, en  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ ), entonces la que estamos buscando es  $\mu \circ \nu^{-1}$ .

Falta demostrar que la transformación de Moebius que hemos encontrado es única. Para esto, consideremos primero un caso muy especial, cuando las dos ternas en cuestión son la *terna canónica*  $0, 1, \infty$ . Supongamos entonces que una transformación de Moebius  $\mu$ , dada por (6.6) cumple que  $\mu(0) = 0$ ,  $\mu(1) = 1$  y  $\mu(\infty) = \infty$ . Queremos demostrar que es la identidad. En este caso, las ecuaciones (6.7) nos dan:

$$\frac{b}{d} = 0, \quad \frac{a+b}{c+d} = 1, \quad \frac{a}{c} = \infty.$$

La primera dice que  $b = 0$  y la tercera que  $c = 0$ , así que la segunda implica que  $a = d$ . Y en consecuencia

$$\mu(x) = \frac{a}{d}x = x,$$

como queríamos demostrar. Nótese que no se obtiene que  $a = 1 = d$ ; simplemente demostramos que  $a = d$  (y que son distintas de cero), y por tanto que  $a/d = 1$ . Pues aunque las transformaciones de Moebius están bien definidas, las constantes  $a, b, c, d$  que las definen no están específicamente determinadas: si multiplicamos a todas ellas por una misma constante no cero, obtenemos la misma función. El caso general se sigue de éste usando las propiedades de grupo. Dejamos los detalles al lector, pues a continuación lo veremos con una mejor notación.  $\square$

### Matrices asociadas

Conviene recapitular un poco y establecer nueva notación. Una función de Moebius está determinada por cuatro constantes reales, que, como ya nos ha sucedido, y por varias “casualidades” que se nos han presentado, conviene empaquetar en una matriz. Sea  $A$  la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Si esta matriz es distinta de la matriz cero ( $A \neq \mathbf{0}$ ), le podemos asociar la función de Moebius

$$\mu_A(x) = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Obsérvese que para  $t \neq 0$  se tiene que  $\mu_A = \mu_{tA}$ , pues

$$\mu_{tA}(x) = \frac{tax + tb}{tcx + td} = \frac{t(ax + b)}{t(cx + d)} = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Esta asignación de matrices a funciones de Moebius tiene además las bonitas propiedades siguientes:

**Primero**,  $\mu_A$  es una transformación (biyectiva) si y sólo si  $\det(A) \neq 0$ ; es decir, si y sólo si  $A$  es invertible (veáse el Lema 6.2).

**Segundo**, en este caso, la inversa de la transformación de Moebius corresponde a la inversa de la matriz, pues en la ecuación (6.4) las constantes corresponden a la matriz  $\det(A)A^{-1}$ , que por lo anterior tiene asociada la función de Moebius  $\mu_{A^{-1}}$  (podemos resumir,  $(\mu_A)^{-1} = \mu_{A^{-1}}$ ).

Y **tercero**, por la ecuación (6.5), la composición de transformaciones de Moebius corresponde a la multiplicación de matrices, es decir,  $\mu_A \circ \mu_B = \mu_{AB}$ .

Estas tres propiedades se resumiran en la frase: “la función  $\mathbf{GL}(2) \rightarrow \mathbf{Pr}(1)$  dada por  $A \mapsto \mu_A$  es un *homomorfismo de grupos*”.

Ahora sí podemos concluir con elegancia la unicidad en la demostración del Teorema de “tres en tres”. Habíamos demostrado que si  $\mu_A$  cumple que  $\mu_A(0) = 0$ ,  $\mu_A(1) = 1$  y  $\mu_A(\infty) = \infty$ , entonces  $A$  es diagonal ( $a = d \neq 0$  y  $b = c = 0$ ). Tenemos entonces que

$$\mu_A(0) = 0, \mu_A(1) = 1 \text{ y } \mu_A(\infty) = \infty \Leftrightarrow A = tI \text{ con } t \neq 0.$$

Supongamos ahora que  $A$  es una matriz cuya transformación de Moebius fija tres puntos distintos cualesquiera; es decir, tal que  $\mu_A(\alpha_i) = \alpha_i$  para  $i = 0, 1, 2$  con  $\alpha_0 \neq \alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_0$ . Por la primera parte del Teorema 6.4, existe una matriz invertible  $B$  tal que  $\mu_B(0) = \alpha_0$ ,  $\mu_B(1) = \alpha_1$  y  $\mu_B(\infty) = \alpha_2$ . Es fácil ver que entonces la transformación de Moebius  $\mu_{B^{-1}} \circ \mu_A \circ \mu_B$  fija a  $0, 1, \infty$  y, por el caso que ya vimos, existe  $t \neq 0$  tal que

$$B^{-1}AB = tI.$$

Multiplicando por la izquierda por  $B$  y por la derecha por  $B^{-1}$  se obtiene

$$A = B(tI)B^{-1} = t(BIB^{-1}) = t(BB^{-1}) = tI.$$

Supongamos, por último, que  $A$  y  $B$  son dos matrices cuyas transformaciones de Moebius mandan una terna en otra terna igual, el caso general. Entonces  $\mu_{A^{-1}} \circ \mu_B$  fija la primera terna, y por lo anterior se tiene que existe  $t \neq 0$  tal que

$$A^{-1}B = tI,$$

multiplicando por  $A$  tenemos que

$$B = A(tI) = t(AI) = tA.$$

Lo cual demuestra que inducen la misma transformación de Moebius. Y queda demostrado que

$$\mu_A = \mu_B \iff B = tA \text{ con } t \neq 0.$$

**EJERCICIO 6.8** Considera las siguientes ternas de puntos en  $\mathbb{P}^1$ :  $\mathbf{a} = (0, 1, \infty)$ ,  $\mathbf{b} = (1, 2, 3)$ ,  $\mathbf{c} = (-1, 0, 1)$ ,  $\mathbf{d} = (-1, \infty, 1)$ . Encuentra una expresión para las 12 transformaciones de Moebius que mandan, ordenadamente, a una de estas ternas en otra.

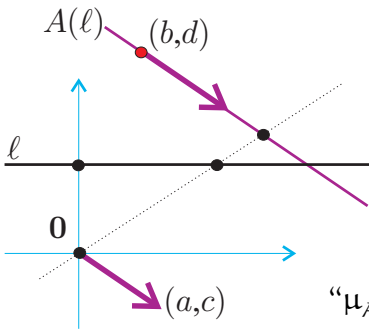
### 6.2.4 La recta proyectiva y $\mathbb{R}^2$

No por casualidad aparecieron las matrices para ayudarnos en la sección anterior. Recapitemos. Las matrices invertibles habían surgido como los paquetes de información para definir las transformaciones lineales de  $\mathbb{R}^2$ . Y ahora surgen como paquetes de información para transformaciones de Moebius con la ambigüedad de una constante no cero. Para que la matriz  $A$  “actúe” en  $\mathbb{R}^2$  teníamos la siguiente fórmula

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}. \tag{6.8}$$

Recordemos también (6.2) que la proyección desde el origen de  $\mathbb{R}^2$  a la recta canónica  $y = 1$  tiene la expresión

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/y \\ 1 \end{pmatrix},$$



de tal manera que si identificamos al punto  $(x, 1)$  en la recta canónica con su primera coordenada  $x$  en  $\mathbb{R}$ , podemos escribir (entrecomillado por el abuso de notación):

$$“\mu_A(x) = \varphi\left(A \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \varphi \begin{pmatrix} ax + b \\ cx + d \end{pmatrix} = \frac{ax + b}{cx + d}.”$$

Más formalmente, si  $\ell$  es la recta canónica  $y = 1$  y  $f$  es la función lineal asociada a  $A$ , podemos concluir que  $\mu_A$  es la función de Moebius que relaciona los parámetros naturales de la recta  $f(\ell) = \{(ax + b, cx + d) \mid x \in \mathbb{R}\}$  y la recta  $\ell$  con la proyección desde el origen. Lo cual demuestra que toda transformación de Moebius surge de una proyección. Pero esto se puede formalizar de manera más elegante y sin entrecomillados.

### Proporciones

Los antiguos griegos pensaban a los números reales como proporciones entre números enteros. Por ejemplo, lo que ahora conocemos como  $1/2$  o  $0.5$ , ellos lo pensaban como la proporción del 1 al 2, o del 2 al 4 o del 3 al 6... que en la escuela primaria se denota “ $1 : 2 = 2 : 4 = \dots$ ”. Se llevaron una gran sorpresa cuando geoméricamente encontraron un número (una distancia), a saber  $\sqrt{2}$  (la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles con lado unitario), que no se podía expresar de esta manera. Ahora sabemos que no todos los números reales son racionales, pero en fin, la idea básica es buena y ahora la retomamos pero de manera más general, pensando en proporciones no sólo de números enteros sino de números reales.

Cada número real  $x \in \mathbb{R}$  se puede pensar como la proporción del  $x$  al 1, que es la misma proporción del  $2x$  al 2, o del  $tx$  al  $t$  para cualquier  $t$ . Una pareja  $(x, y)$  cualquiera, como proporción  $x : y$ , representa al número que, multiplicado por  $y$ , nos da  $x$ . El 0 es entonces la proporción del 0 a cualquier  $t$  y podemos pensar al  $\infty$  como la proporción de cualquier número al 0. En el texto anterior surge una terrible ambigüedad respecto a la pareja  $(0, 0)$ ; vuélvase a leer con ese ejemplo maligno en mente y se verá que podría representar a cualquier proporción, a cualquier número. Pero si eliminamos a la pareja  $(0, 0)$  y exigimos que  $t$  nunca sea cero, la ambigüedad desaparece. Formalicemos la idea, con la notación de las proporciones de primaria.

**Definición 6.2.2** Dado  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$ , sea

$$[x : y] := \{(tx, ty) \mid t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}. \quad (6.9)$$

Que se puede leer “la proporción de  $x$  a  $y$ ”. Siempre que consideremos la expresión  $[x : y]$ , suponemos que no ambas “coordenadas” son cero.

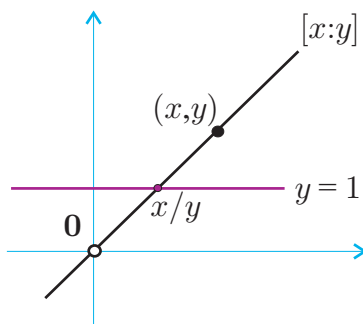
Observemos ahora que los puntos de la recta proyectiva corresponden biunivocamente a las proporciones, pues a  $x \in \mathbb{R}$  le corresponde la proporción  $[x : 1]$  y al  $\infty$  le corresponde la proporción  $[1 : 0]$ . E inversamente, a la proporción  $[x : y]$  le corresponde el número  $x/y$  (donde  $x/0 = \infty$  cuando  $x \neq 0$ ). De tal manera que podemos redefinir a la recta proyectiva como

$$\mathbb{P}^1 := \{[x : y] \mid (0, 0) \neq (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

A esta manera de ver la recta proyectiva se le conoce como la dada por *coordenadas homogéneas*. Así, un punto en  $\mathbb{P}^1$  dado por coordenadas homogéneas es la proporción  $[x : y]$ . La gran ventaja es que ahora todos los puntos de  $\mathbb{P}^1$  pueden ser tratados de la misma manera; ya no hay que hacer distinciones para  $\infty$ ; la homogeneidad es evidente.

### Rectas por el origen

Hemos definido a  $[x : y]$  en (6.9) como un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ , que es precisamente una recta por el origen. Así que los puntos de  $\mathbb{P}^1$  corresponden a las rectas por el origen en  $\mathbb{R}^2$ .



Si pensamos, como ya lo hicimos antes, en la recta  $y = 1$  como los reales, la correspondencia  $[x : y] \mapsto x/y$  corresponde a intersectar la recta por el origen  $[x : y]$  con la recta canónica  $y = 1$ , y la única que no tiene intersección (el eje de las  $x$  dado por  $y = 0$ ) corresponde al infinito.

Conviene entonces introducir la notación

$$[\mathbf{x}] := [x : y], \text{ donde } (0, 0) \neq (x, y) = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2.$$

Esto nos da una función ( $\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]$ ) de  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  sobre  $\mathbb{P}^1$ , en la cuál la imagen inversa de un punto en  $\mathbb{P}^1$  es la recta por el origen a la que corresponde, pues obsérvese que por la definición  $[\mathbf{x}] = [t\mathbf{x}]$  para cualquier  $t \neq 0$ .

Ahora, las transformaciones proyectivas se expresan en coordenadas homogéneas de manera muy natural. Dada una matriz  $A \in \mathbf{GL}(2)$ , su transformación proyectiva  $\mu_A$  se expresa como

$$\begin{aligned} \mu_A : \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^1 \\ \mu_A([\mathbf{x}]) &= [A\mathbf{x}], \end{aligned}$$

pues si  $A$  es como en (6.8) y  $\mathbf{x} = (x, y)$  tenemos que

$$[A\mathbf{x}] = [ax + by : cx + dy].$$

Esto concuerda con nuestra antigua idea de transformación de Moebius pues el número  $x$  en coordenadas homogéneas es  $[x : 1]$  al cual  $A$  manda en  $[ax + b : cx + d]$  que corresponde a  $(ax + b)/(cx + d)$ , y el infinito corresponde al  $[1 : 0]$  que va en  $[a : c]$  que corresponde a  $a/c$  como debía ser.

Este enfoque es el adecuado pues fácilmente se generaliza a más dimensiones. Pero antes de hacerlo haremos una clasificación topológica de las transformaciones de Moebius, y regresaremos brevemente con el pintor y algunos de sus problemas prácticos.

---

**EJERCICIO 6.9** Con nuestra nueva definición de  $\mathbb{P}^1$  y de transformaciones proyectivas, es decir, con coordenadas homogéneas y matrices, demuestra el Teorema de 3 en 3.

---

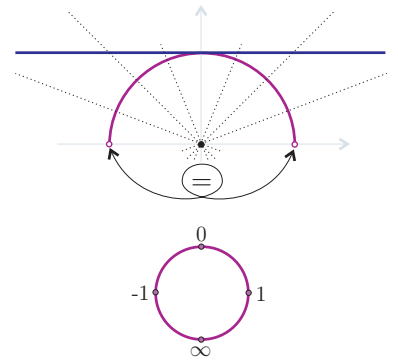
## 6.2.5 Tipos de transformaciones

Aunque no lo hayamos dicho explícitamente, a la recta proyectiva se le puede pensar también como un círculo. Puesto que a la recta real se le añade un único punto al que se llega por ambos extremos, éste cierra el círculo. O bien, pensado como rectas por el origen en  $\mathbb{R}^2$ , si tomamos el casquete superior del círculo unitario (definido por  $\{(x, y) \in \mathbb{S}^1 \mid y \geq 0\}$ ), cada recta lo intersecta en un punto único excepto la horizontal que lo intersecta en los dos extremos; al identificarlos, nos queda un círculo (de la



mitad de la circunferencia). En esta sección, vamos a pensar a  $\mathbb{P}^1$  como un círculo para describir topológicamente, es decir a grandes rasgos, cómo son las transformaciones de Moebius.

Los dos “invariantes” de las transformaciones de Moebius que nos servirán son el número de puntos fijos, y la orientación; es decir si preserva o no orientación. Esta última se detecta por el determinante de una matriz asociada; si es positivo, un punto viajando en  $\mathbb{P}^1$  va en la misma dirección en que viaja su imagen, y si es negativo, éstos viajan en direcciones contrarias. Esto se ve claro en nuestro *modelo lineal* de  $\mathbf{Pr}(1)$ , es decir, pensando en líneas por  $\mathbf{0}$  en  $\mathbb{R}^2$ . Pero observemos que el determinante no está definido para transformaciones de Moebius, pues sus matrices asociadas difieren por un factor no nulo; aunque su signo sí lo está, pues  $\det(tA) = t^2 \det(A)$ .



Veamos ahora los posibles puntos fijos de  $\mu_A \in \mathbf{Pr}(1)$ . Por el Teorema de 3 en 3, si fueran tres sería la identidad, así que  $\mu_A \neq \text{id}$  tiene a lo más dos puntos fijos. Esto también se puede ver de otras dos maneras. Primero, de la fórmula numérica al tratar de resolver la ecuación

$$x = \mu_A(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

que se traduce en encontrar las raíces de la ecuación cuadrática

$$cx^2 + (d - a)x - b = 0.$$

Y segundo, buscando vectores propios (recordar el Capítulo 4) de la matriz  $A$ , pues son vectores  $\mathbf{v}$  no nulos para los cuales  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$  para alguna  $\lambda \in \mathbb{R}$  (y por tanto  $\mu_A[\mathbf{v}] = [A\mathbf{v}] = [\lambda\mathbf{v}] = [\mathbf{v}]$ , pues  $\lambda \neq 0$  porque  $\det A \neq 0$ ). Con este enfoque, habría que encontrar los valores propios de  $A$  como las raíces de su polinomio característico

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc.$$

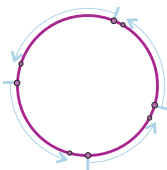
En ambos casos hay que resolver una ecuación de segundo grado que tiene a lo más dos soluciones reales. Y cuántas son depende del signo de su discriminante, es decir, de lo que queda dentro de la raíz cuadrada al aplicar la fórmula del “chicharronero”; pero en ambos casos queda lo mismo:

$$(d - a)^2 + 4bc = (a + d)^2 - 4(ad - bc). \tag{6.10}$$

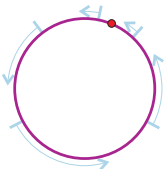
Notemos primero que si  $\mu_A$  invierte orientación, *i.e.*, si  $\det A < 0$ , entonces, de su última expresión, se tiene que el discriminante es estrictamente positivo y tenemos por tanto dos puntos fijos. Dejaremos el análisis de este caso hasta el final.

Si  $\mu_A$  preserva orientación, el discriminante (6.10) puede ser negativo (no hay puntos fijos), cero (hay un punto fijo) o positivo (hay dos puntos fijos).

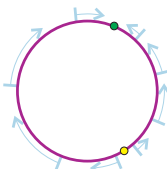
**Rotaciones.** Como ejemplo de  $\mu_A \in \mathbf{Pr}(1)$  sin puntos fijos, podemos tomar a la matriz  $A$  de una rotación con ángulo entre  $0$  y  $\pi$ . Todas las rectas en el plano por  $0$  se mueven, y  $\mathbb{P}^1$ , como círculo, simplemente gira. No todas las transformaciones de Moebius sin puntos fijos son tan simples; pero esencialmente sí. Todos sus puntos se mueven en la misma dirección, aunque la “distancia” que se mueven varía.



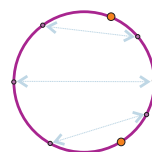
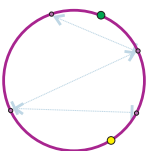
**Traslaciones.** Si  $\mu \in \mathbf{Pr}(1)$  tiene un punto fijo, podemos suponer que es el infinito. Entonces  $\mu$  es afín, y si no tiene más puntos fijos, es fácil ver que es una traslación (Ejercicio 3.19). Estas transformaciones (con un solo punto fijo) mueven a todos los puntos de  $\mathbb{P}^1$  en la misma dirección, excepto al punto fijo, y a los cercanos a él los mueven cada vez más poquito. Si  $p$  es el punto fijo, la sucesión  $\mu^n(q)$  para cualquier  $q \neq p$  tiende a  $p$  por el mismo lado, y la sucesión  $\mu^{-n}(q)$  tiende a  $p$  por el lado contrario.



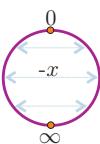
**Expansiones.** La transformación proyectiva  $f(x) = kx$  con  $k > 1$  (pensando en la recta extendida), fija al  $0$  y al  $\infty$ , y cualquier otro punto se aleja del cero y se acerca a  $\infty$ . A  $0$  se le llama el punto *expulsor* y a  $\infty$  el *atractor*; pues las sucesiones  $f^n(x)$  tienden a  $\infty$  y las  $f^{-n}(x)$  a  $0$  para cualquier otro punto  $x$ . Toda transformación de Moebius con (exactamente) dos puntos fijos y que preserva orientación es de este tipo. Uno de sus puntos fijos es expulsor y el otro atractor, los demás puntos se mueven de uno hacia el otro.



Consideremos por último a  $\mu \in \mathbf{Pr}(1)$  que **invierte orientación**. Ya vimos que entonces tiene dos puntos fijos,  $p$  y  $q$  digamos. Como  $\mu^2 = \mu \circ \mu$  preserva orientación y tiene los mismos dos puntos fijos entonces es una expansión con uno de sus puntos fijos de expulsor,  $p$  digamos, y el otro,  $q$ , de atractor; diremos entonces que es una **e-reflexión** de  $p$  a  $q$ . Pero hay otra posibilidad: que  $\mu^2 = \text{id}$ ; y entonces diremos que es **la reflexión** en los puntos  $p$  y  $q$ . Así, una e-reflexión es una reflexión seguida de una expansión (de ahí el nombre que le hemos dado), y la dirección queda determinada por el valor de  $\mu^2(x)$  para cualquier otro punto  $x$  (si  $\mu^2(x)$  está entre  $x$  y  $q$ , va de  $p$  a  $q$ , y si está entre  $x$  y  $p$ , va de  $q$  a  $p$ ).



Hemos dicho implícitamente que **la reflexión** queda determinada por dos puntos  $p \neq q$ , sus *puntos espejo*, pero no lo demostramos. Consideremos una transformación de Moebius  $g$  que manda a  $p, q$  en  $0, \infty$  respectivamente y analicemos primero este caso particular. Una  $f \in \mathbf{Pr}(1)$  que fije al  $0$  y al  $\infty$  se escribe  $f(x) = kx$  para alguna  $k \neq 0$  (es lineal), y si además invierte orientación se debe cumplir que  $k < 0$ . Como  $f^2(x) = k^2x$ , se tiene que  $f^2 = \text{id}$  solamente cuando  $k = -1$  (para  $k < -1$ ,  $f$  es una e-reflexión de  $0$  a  $\infty$ , y para  $-1 < k < 0$  es una e-reflexión de  $\infty$  a  $0$ ). Sea  $\rho$  **la reflexión en  $0$  y  $\infty$** , es decir,  $\rho(x) = -x$  (ya hemos demostrado que es única y que ésta es su fórmula). Para obtener la reflexión en  $p$  y  $q$ , conjugamos con  $g$ : sea



$$\rho_{p,q} = g^{-1} \circ \rho \circ g.$$

Se tiene que  $\rho_{p,q}(p) = g^{-1}(\rho(g(p))) = g^{-1}(\rho(0)) = g^{-1}(0) = p$ , análogamente  $\rho_{p,q}(q) = q$ ; además que  $\rho_{p,q}$  invierte orientación pues  $g$  y  $g^{-1}$  son del mismo tipo y  $\rho$  invierte orientación, y por último

$$\rho_{p,q}^2 = (g^{-1} \circ \rho \circ g) \circ (g^{-1} \circ \rho \circ g) = g^{-1} \circ \rho \circ \rho \circ g = g^{-1} \circ g = \text{id}.$$

Lo cuál demuestra que la reflexión en  $p$  y  $q$  está bien definida y da una fórmula usando el Teorema de 3 en 3. En resumen, se tiene el siguiente lema.

**Lema 6.5** *Dados cualesquiera  $p, q \in \mathbb{P}^1$  con  $p \neq q$ , existe una única  $\rho_{p,q} \in \mathbf{Pr}(1)$ , llamada su reflexión, que los tiene como puntos fijos, invierte orientación y cumple que  $\rho_{p,q}^2 = \text{id}$ .  $\square$*

A diferencia de la recta euclidiana donde cada par de puntos define un segmento y dos rayos exteriores, dos puntos en la línea proyectiva, que topológicamente es un círculo, la parten en dos segmentos; no hay manera de decir cuál es “el bueno”, podemos ir de un punto al otro usándolos indistintamente. Pero la naturaleza es muy sabia, y nos da, en la línea proyectiva, una manera canónica de identificar a estos dos segmentos entre sí, que es la reflexión en esos dos puntos. De alguna manera, que se hará explícita cuando veamos la geometría hiperbólica, esta información (una reflexión para cada par de puntos), define a la línea proyectiva pensada a la Klein: un espacio, el círculo, junto con un grupo de transformaciones. Por lo pronto, considera el último de los ejercicios que siguen.

---

**EJERCICIO 6.10** Para cada una de las siguientes matrices, describe qué tipo de transformación de Moebius determina:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{b)} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \text{c)} & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & & \text{d)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} & \text{e)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

**EJERCICIO 6.11** Demuestra que si  $f \in \mathbf{Pr}(1)$  es una traslación, entonces existe  $g \in \mathbf{Pr}(1)$  tal que  $(g^{-1} \circ f \circ g)(x) = x + 1$ .

**EJERCICIO 6.12** Demuestra que si  $f \in \mathbf{Pr}(1)$  es una expansión entonces existe  $g \in \mathbf{Pr}(1)$  tal que  $(g^{-1} \circ f \circ g)(x) = kx$  con  $k > 1$ .

**EJERCICIO 6.13** Demuestra que si  $f \in \mathbf{Pr}(1)$  es tal que  $f^n = \text{id}$  con  $n \geq 3$ , pero  $f^m \neq \text{id}$  para  $m < n$ , entonces  $f$  es una rotación.

**EJERCICIO 6.14** Demuestra que la reflexión en  $1$  y  $-1$  es la función  $v(x) = 1/x$ .

**EJERCICIO 6.15** Sea  $a \in \mathbb{R} \subset \mathbb{P}^1$ ; demuestra que la reflexión en  $a$  e  $\infty$  es la reflexión (isométrica) en  $a$ .

**EJERCICIO 6.16** Sean  $a, b \in \mathbb{R} \subset \mathbb{P}^1$  dos puntos distintos. Demuestra que la reflexión en  $a$  y  $b$  tiene la matriz asociada

$$\begin{pmatrix} a + b & -2ab \\ 2 & -a - b \end{pmatrix}.$$

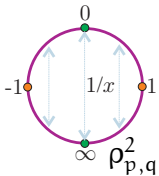
**EJERCICIO 6.17** Considera dos parejas distintas,  $p, q$  y  $a, b$ , de puntos en  $\mathbb{P}^1$  (pensado como círculo). Observa que hay tres posibilidades topológicas de colocarlas en el círculo: primero, una pareja está contenida en uno de los segmentos que define la otra (y entonces sucede lo mismo al intercambiarlas); segundo, uno de los puntos de las parejas coincide ( $p = a$ , digamos), y tercera, las parejas se cruzan, es decir,  $a$  y  $b$  están en segmentos distintos de  $p$  a  $q$ . Discute cualitativamente, y demuestra si puedes en algunos casos, qué tipo de transformación es la composición de las reflexiones correspondientes,  $\rho_{p,q} \circ \rho_{a,b}$ . (Empieza por el segundo caso que es el más simple y es límite, o transición, de los otros dos.)

### 6.2.6 Armonía

Las reflexiones traen implícita a la extensión natural de armonía que vimos en el Capítulo 2, donde surgió la noción de cuarteta armónica o de par de parejas armónicas en la recta afín; y ahora se completa incluyendo al infinito.

Dada una pareja  $p, q$  de puntos en  $\mathbb{P}^1$  (piénsese en el ejemplo  $1, -1$ ) decimos que  $a$  y  $b$  son armónicos respecto a  $p$  y  $q$ , si la reflexión en  $p$  y  $q$  manda a  $a$  en  $b$ , es decir, si

$$\rho_{p,q}(a) = b$$



(en el ejemplo, y por un reciente ejercicio, si  $b = 1/a$ ). Obsérvese que “ser armónicos” es realmente una relación de parejas pues  $\rho_{p,q} = \rho_{q,p}$  está determinado por la pareja (sin orden), y si  $\rho_{p,q}(a) = b$  entonces  $\rho_{p,q}(b) = a$  pues  $\rho_{p,q}^2 = \text{id}$ ; además, fijando la pareja  $p, q$  cualquier otro punto tiene su armónico: el complemento  $(\mathbb{P} - \{p, q\})$  se aparea en pares armónicos respecto a ellos.

Esta noción de armonía coincide con la euclidiana (y de hecho la extiende), pues vimos que el apareamiento armónico respecto a  $p, q$  (reales) consistía en pensar al intervalo  $p, q$  como el  $-1, 1$  (por una afinidad) e invertir (por la función  $x \mapsto 1/x$ ); sólo el punto medio no tenía par armónico, pero ahora le corresponde el infinito.

Veámos ahora que las transformaciones de Moebius preservan armonía. Sean  $f \in \mathbf{Pr}(1)$  y  $a, b$  un par armónico respecto a  $p, q$ ; queremos demostrar que  $f(a), f(b)$  es un par armónico respecto a  $f(p), f(q)$ . Por el mismo argumento del párrafo anterior al Lema 6.5 se tiene que la reflexión en la pareja  $f(p), f(q)$  se escribe

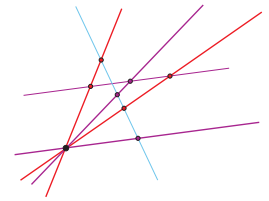
$$\rho_{f(p),f(q)} = f \circ \rho_{p,q} \circ f^{-1},$$

y al aplicar esta formula a  $f(a)$  se obtiene  $f(b)$ .

Nos falta ver que la relación de armonía es simétrica, es decir que si  $\rho_{p,q}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$  entonces  $\rho_{a,b}(p) = q$ . Con una transformación proyectiva podemos mandar  $p$  al  $0$ ,  $q$  al  $\infty$  y  $\mathbf{a}$  al  $1$ ; entonces, por lo anterior, manda  $\mathbf{b}$  al  $-1$ . En este ejemplo se tiene que  $0, \infty$  son armónicos respecto a  $1, -1$ ; mandándolos de regreso se tiene entonces lo que queríamos. Podemos resumir en el siguiente teorema.

**Teorema 6.6** *Las transformaciones de Moebius preservan cuartetos armónicos y son transitivas en ellas.*  $\square$

Por último, notemos que al pensar a la recta proyectiva como líneas en  $\mathbb{R}^2$ , obtenemos una relación de *armonía en cuartetos de líneas concurrentes*: es que la correspondiente cuarteta de puntos en  $\mathbb{P}^1$  sea armónica. Y esto se detecta al intersectarlas con cualquier otra recta que no pasa por el punto de concurrencia, revisando que los puntos de intersección sean armónicos. En particular, si trazamos una paralela a una de ellas, su pareja la debe intersectar en el punto medio de las intersecciones con el otro par (pues hemos mandado a uno de los puntos intencionalmente al infinito, que es el armónico de su punto medio respecto a un segmento).




---

**EJERCICIO 6.18** Demuestra que  $a, b$  son armónicos con  $p, q$  si y sólo si sus reflexiones conmutan, es decir,

$$\rho_{p,q} \circ \rho_{a,b} = \rho_{a,b} \circ \rho_{p,q}.$$

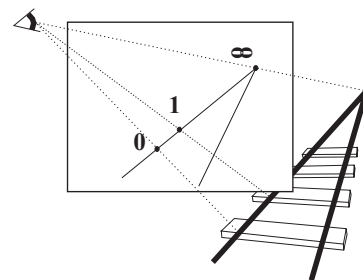
**EJERCICIO 6.19** Demuestra que las bisectrices de cualquier par de rectas es un par armónico a ellas.

---

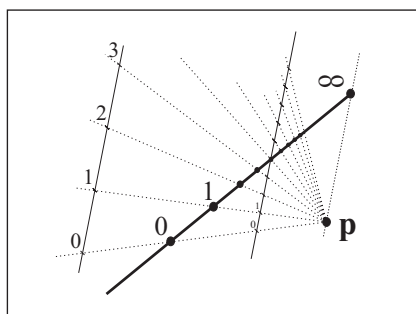
## 6.3 El problema del pintor II

Recordemos el problema del pintor que quiere pintar en un lienzo una vía de ferrocarril y nos pregunta ¿a cada cuántos centímetros debo dibujar los durmientes? Motivados por este problema definimos la línea proyectiva junto con su grupo de transformaciones y hemos desarrollado una gran teoría con posibilidades de generalizarse a otras dimensiones; pero antes de hacerlo, es justo que hagamos una pausa y le respondamos. Ya podemos darle respuestas numéricas y además constructivas (recetas que usan los arquitectos) basados fundamentalmente en el Teorema de 3 en 3 y en que los elementos del grupo de transformaciones de Moebius se pueden ver como proyecciones. Pero además, para desarrollar la intuición y como motivación para entrarle al plano proyectivo, veremos que nuestros métodos funcionan al ampliar el problema a dibujar una cuadrícula en un piso.

El riel (izquierdo, para fijar ideas) se dibuja como una línea recta en el lienzo, y esta línea tiene un punto distinguido: el punto de fuga en donde los dos rieles de la vía parecen juntarse. Con ese punto y cualquier otro, el del durmiente 0 digamos, se define esa recta. Sabemos que la función que nos dice a dónde debe ir el durmiente  $n$  es una transformación de Moebius, y que ésta estará determinada por la imagen del durmiente 0, el punto de fuga,  $\infty$ , y algún otro punto. Así que si el pintor nos da el  $\infty$ , el durmiente 0 y el durmiente 1 en el lienzo, podríamos calcular los coeficientes de la función de Moebius (después de medir cuidadosamente las distancias en el lienzo), programarla en una calculadora y regresársela al pintor para que continúe con su trabajo. La calculadora le dirá exactamente dónde debe dibujar al durmiente 2, al 3, etc. Problema resuelto.



Pero no para el pintor, que requeriría de un matemático de cabecera. Él quisiera una solución dentro de sus posibilidades y más cercana a las técnicas que maneja. Veamos de nuevo. También hemos demostrado que cualquier transformación de Moebius se puede ver como la proyección de una línea en otra. Queremos proyectar una escala afín (la del ferrocarril real con unidad de durmientes) a la escala proyectiva del lienzo desde el punto fijo de visión del pintor. Puesto que es una transformación de Moebius entre rectas, entonces debería ser posible diseñarle una construcción geométrica para que con líneas y puntos auxiliares en el lienzo reconstruya la escala proyectiva (del riel en el lienzo) a partir de una escala afín (la de su regla T, digamos) sin necesidad de una calculadora, o de estarle atinando a ojo.



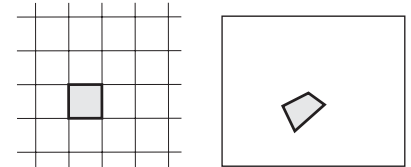
Suponemos entonces que tenemos definido el riel en el lienzo junto con sus tres puntos distinguidos. Fijemos arbitrariamente un punto de proyección  $p$  (fuera del riel). La recta  $l$  que pasa por  $p$  e  $\infty$  determina la dirección de la recta cuya escala afín vamos a proyectar (pues el infinito de ésta debe proyectarse en el infinito que tenemos dado). Para cualquier recta paralela a  $l$ , sus puntos de intersección con las rectas por  $p$  y el 0 y por  $p$  y el 1 (nos referimos al 0 y al 1 en el riel del lienzo) determinan la escala. Con un compás se puede reproducir esta escala afín

que, proyectándola desde  $p$ , nos da la escala proyectiva en el riel. Lo maravilloso de la teoría que hemos desarrollado es que demuestra que este procedimiento no depende del punto de proyección o de la recta a proyectar que escojamos; además, demuestra también que coincide con el primer método (el de la calculadora), y, por si fuera poco, que estos dos métodos coinciden con el original de proyectar al riel verdadero sobre el riel del lienzo.

Con este método, el pintor puede sacar la escala proyectiva del riel derecho (a partir del infinito, que comparten los rieles y los puntos donde se ven el durmiente 0 y el durmiente 1), luego la del riel izquierdo, y, detallando durmientes, concluir con una

buena perspectiva de la vía de tren. Pero aún puede simplificarse el procedimiento si la vía del tren está lo suficientemente ladeada para que los durmientes también estén en perspectiva. En este caso, que analizaremos a continuación, conviene plantearse un problema que parece más difícil: el de dibujar un piso cuadrículado en perspectiva.

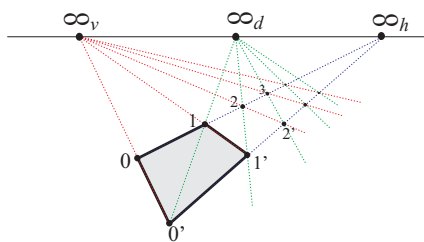
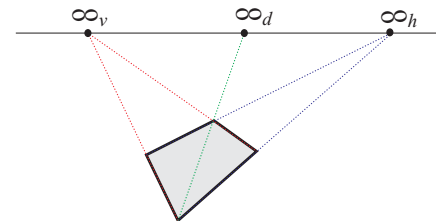
Queremos ahora proyectar un piso cuadrículado sobre un lienzo. Si le pedimos al pintor que dibuje, a ojo de buen pintor, una simple loseta, podremos reconstruir todo el piso.



Pensemos que la franja del piso que contiene a la loseta y que se aleja a la derecha (*horizontal*, llamémosla) es una vía de ferrocarril con durmientes verticales. Las dos líneas horizontales parecen converger a un punto de fuga que en el lienzo es un punto bien definido (el infinito horizontal,  $\infty_h$ ) como el punto de intersección de las dos rectas definidas por los lados opuestos de la loseta ya dibujada.

Por la misma razón, las líneas de la franja vertical convergen a otro punto (el infinito vertical,  $\infty_v$ ). Si estos dos puntos de fuga caen en el lienzo (que es el caso que analizaremos), determinan una línea llamada horizonte (definida en el lienzo como la intersección de éste con el plano paralelo al piso que pasa por el ojo del pintor, en general, una línea horizontal en el lienzo justo a la misma altura del piso que el ojo de proyección).

Sabemos que todas las líneas horizontales del piso se dibujan como líneas en el lienzo que confluyen al punto  $\infty_h$ ; no importa el ancho de la vía del tren. Y por la misma razón, las verticales confluyen en  $\infty_v$ . Pero las horizontales y las verticales no gozan de ningún beneficio (excepto el de definir la cuadrícula); cualquier otro haz de rectas paralelas se proyecta en un haz que confluye en algún punto del horizonte. Así que podemos tomar una diagonal de la loseta dada, que intersecciona al horizonte en un punto que llamaremos infinito diagonal,  $\infty_d$ , que está entre  $\infty_v$  e  $\infty_h$ .

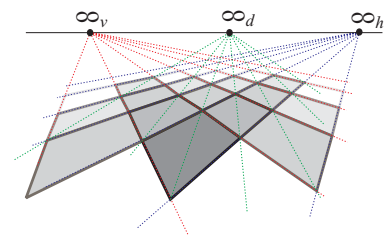


Si llamamos 0 y 1, como en el caso del ferrocarril, a los dos vértices en un lado horizontal de la loseta, y 0' y 1' a los correspondientes del lado opuesto, de tal manera que la diagonal pase por 0' y 1, entonces la línea que va de 1' a  $\infty_d$  es justo donde se dibuja la diagonal de la siguiente loseta; cuya intersección con la horizontal por 0 y 1 nos da el vértice 2 correspondiente a la siguiente loseta.

Trazando ahora la vertical por 2, su intersección con el otro riel nos da el vertice 2', completando así la información para dibujar la loseta 1 (empezamos con la 0). Es claro que este proceso se puede iterar para encontrar los durmientes que queremos del ferrocarril horizontal.

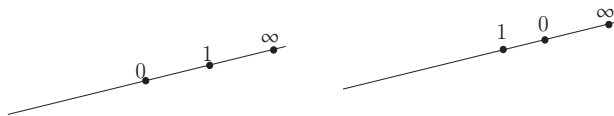
Pero de manera análoga, se puede completar el ferrocarril vertical y por ahí en medio van apareciendo los vértices de más losetas. E inclusive de losetas “negativas”.

Este método se conoce desde el Renacimiento. Obsérvese que ya ni siquiera necesitamos compás, con pura regla funciona. Y funciona bien, lo cual indica que debe haber teoremas que lo sustenten. Por ejemplo ¿porqué es que los puntos de intersección de las diagonales con las verticales siguientes ( $0'$  y  $1$  con  $2'$  y  $2$ ,  $1'$  y  $2$  con  $3'$  y  $3$ ,  $2'$  y  $3$  con  $4'$  y  $4$ , etc.) quedan todos alineados con  $\infty_h$ ? Desde el Renacimiento se sabe por experiencia que así resulta, pero los fundamentos matemáticos tardaron siglos en desarrollarse. Por el momento dejemos esto como motivación para estudiar y definir al plano proyectivo, dejando también al pintor contento con los métodos que sí puede aplicar.



**EJERCICIO 6.20** En el primer método geométrico para encontrar la escala en el riel, el punto de proyección  $\mathbf{p}$  se fijó arbitrariamente. Supón que la que se fija arbitrariamente es la recta  $\ell$  (digamos que es la orilla del restirador donde trabaja el pintor). ¿Cómo encuentras el punto de proyección y la escala afín en  $\ell$  para proyectar?

**EJERCICIO 6.21** Con regla y compás completa las siguientes escalas proyectivas añadiendo los puntos que corresponden a  $-1, 2$  y  $3$ . Haz otras.



## 6.4 El plano proyectivo

Nuestra definición del plano proyectivo será analítica, generalizando la idea de coordenadas homogéneas que acabamos de desarrollar. Esto nos permitirá hacer cálculos y definir objetos geométricos de manera precisa, pero peca de abstracta. En particular nos interesa en esta sección establecer la noción de línea y las propiedades básicas de incidencia. Para tener una intuición geométrica del plano proyectivo, que es muy importante, veremos en la siguiente sección otros modelos más geométricos. Es preciso remarcar, una y otra vez, que cada modelo geométrico tiene ventajas y desventajas, no hay una manera de “ver” todo el plano proyectivo de golpe, como creemos tener la idea del plano euclidiano. Pero observemos que esto último tampoco es cierto. Lo que intuitivamente sabemos del plano euclidiano, es por pequeñas porciones de él, el pizarrón, el piso o una hoja de papel, y de ahí extrapolamos diciendo “todo es así”. Lo mismo sucede con el plano proyectivo, en pequeñas porciones es como el euclidiano pero también incluye cierto comportamiento al infinito que se convierte en parte integral de él.



### 6.4.1 Coordenadas homogéneas

Dado  $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tal que  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  (esto es, tal que alguna de las tres coordenadas de  $\mathbf{x}$  es distinta de cero), sea

$$[\mathbf{x}] = [x : y : z] := \{(tx, ty, tz) \mid t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}.$$

Es decir,  $[\mathbf{x}]$  es la recta por el origen con dirección  $\mathbf{x}$ , menos el origen. Se tiene ...Dibujo entonces que

$$[\mathbf{x}] = [t\mathbf{x}] \text{ para cualquier } t \neq 0,$$

y ésta es la propiedad clave. Además consideraremos a  $[\mathbf{0}]$  o  $[0 : 0 : 0]$  como una expresión sin sentido.

Definimos al *plano proyectivo*  $\mathbb{P}^2$  como

$$\mathbb{P}^2 := \{[\mathbf{x}] \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\}.$$

Nos referimos a los elementos de  $\mathbb{P}^2$  como *puntos* y a la expresión  $[x : y : z]$  o  $[\mathbf{x}]$  como un punto de  $\mathbb{P}^2$  dado por *coordenadas homogéneas*.

Nótese que las coordenadas homogéneas de un punto en  $\mathbb{P}^2$  no son únicas (a diferencia de  $\mathbb{R}^2$ , donde sí lo son). Hay cierta ambigüedad, pero no es tan grave, pues

$$[\mathbf{x}] = [\mathbf{y}] \text{ si y sólo si } \mathbf{y} = t\mathbf{x} \text{ para alguna } t \neq 0;$$

así que por ejemplo,  $[1 : 2 : 3] = [2 : 4 : 6]$ , o bien  $[1 : 0 : 0] = [8 : 0 : 0] = [2^8 : 0 : 0]$ . Como en el caso de  $\mathbb{R}^2$  (o de  $\mathbb{R}^n$ ) los puntos de  $\mathbb{P}^2$  tienen coordenadas, y esto nos permitirá hacer geometría con métodos analíticos, pero habrá que tener cuidado de que las definiciones no dependan de coordenadas específicas sino de las homogéneas.

---

**EJERCICIO 6.22** Generaliza nuestra definición de  $\mathbb{P}^1$  y de  $\mathbb{P}^2$  para definir  $\mathbb{P}^3$  y  $\mathbb{P}^n$ .

---

### 6.4.2 Rectas proyectivas

Tenemos que *los puntos de  $\mathbb{P}^2$  corresponden a las rectas en  $\mathbb{R}^3$  que pasan por el origen* —si  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$ , se puede pensar a  $[\mathbf{x}]$  como punto en  $\mathbb{P}^2$  ( $[\mathbf{x}] \in \mathbb{P}^2$ ) o bien como su correspondiente línea por el origen en  $\mathbb{R}^3$  ( $[\mathbf{x}] \subset \mathbb{R}^3$ ). Podemos definir entonces a los subconjuntos distinguidos de  $\mathbb{P}^2$  que son sus *rectas o líneas* correspondiendo a los planos por el origen en  $\mathbb{R}^3$ ; es decir, una *recta* en  $\mathbb{P}^2$  es el conjunto de puntos cuyas correspondientes rectas en  $\mathbb{R}^3$  forman un plano. Tiene sentido, pues en la Sección 6.2.4 vimos que los puntos de una recta proyectiva corresponden biunívocamente a las rectas por el origen en un plano. Puesto que los planos en  $\mathbb{R}^3$  están dados por una ecuación lineal, podemos ser más explícitos:

Sea  $\mathbf{n}$  un vector no nulo en  $\mathbb{R}^3$ ; definimos la *recta dada por  $\mathbf{n}$*  en  $\mathbb{P}^2$  como

$$\ell_{\mathbf{n}} := \{[\mathbf{x}] \in \mathbb{P}^2 \mid \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0\}. \quad (6.11)$$

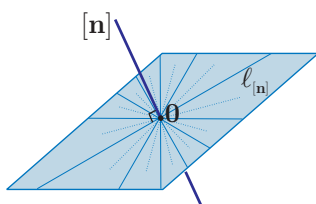
Está bien definida pues si tomamos  $\mathbf{t} \neq \mathbf{0}$ , entonces

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}\mathbf{x} = 0,$$

pues  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}\mathbf{x} = \mathbf{t}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})$ , lo cual implica que no importa qué representante de un punto tomemos ( $[\mathbf{x}]$  o  $[\mathbf{t}\mathbf{x}]$ ) la condición para pertenecer al conjunto da el mismo resultado (es cierta o no dependiendo del punto en  $\mathbb{P}^2$ , no del representante en  $\mathbb{R}^3$ ). Si  $\mathbf{n} = (a, b, c)$  entonces  $\ell_{\mathbf{n}}$  se describe por coordenadas homogéneas como

$$\ell_{\mathbf{n}} := \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \mid ax + by + cz = 0\}.$$

Y podemos decir que las rectas de  $\mathbb{P}^2$  son precisamente los conjuntos  $\ell_{\mathbf{n}}$  para  $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ . Notemos además que si  $\mathbf{t} \neq \mathbf{0}$ , entonces  $\ell_{\mathbf{n}} = \ell_{\mathbf{t}\mathbf{n}}$ , (pues  $\mathbf{t}\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{t}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0$ ). Así que la recta proyectiva  $\ell_{\mathbf{n}}$  depende no de  $\mathbf{n}$  (un vector no nulo en  $\mathbb{R}^3$ ) sino de  $[\mathbf{n}]$  (el correspondiente punto en  $\mathbb{P}^2$ ); entonces podemos definir para  $[\mathbf{n}] \in \mathbb{P}^2$  su *recta dual*



$$\ell_{[\mathbf{n}]} := \ell_{\mathbf{n}}.$$

Dicho de otra manera, a cada recta por el origen en  $\mathbb{R}^3$  ( $[\mathbf{n}]$ ) le asociamos su plano perpendicular que pasa por el origen ( $\ell_{[\mathbf{n}]}$ ). Pero además, como cada plano por el origen tiene una única recta perpendicular por el origen, se tiene que

$$\ell_{\mathbf{n}} = \ell_{\mathbf{m}} \Leftrightarrow [\mathbf{n}] = [\mathbf{m}].$$

Así que hemos establecido una biyección entre las rectas de  $\mathbb{P}^2$  y los puntos de  $\mathbb{P}^2$

$$\ell_{[\mathbf{n}]} \longleftrightarrow [\mathbf{n}]$$

que llamaremos *dualidad*. La dualidad cumple propiedades muy bonitas que vienen de una básica que dice que un punto está en una recta si y sólo si su recta dual contiene al punto dual; es decir, dados  $[\mathbf{p}]$  y  $[\mathbf{q}]$  en  $\mathbb{P}^2$ ,

$$[\mathbf{p}] \in \ell_{[\mathbf{q}]} \Leftrightarrow [\mathbf{q}] \in \ell_{[\mathbf{p}]}, \quad (6.12)$$

cuya demostración es obvia pues ambas condiciones son, por definición, equivalentes a  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 0$ .

**EJERCICIO 6.23** ¿Cómo definirías planos en  $\mathbb{P}^3$ ?

**EJERCICIO 6.24** ¿Cómo definirías rectas en  $\mathbb{P}^3$ ?

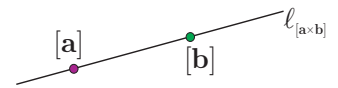
**EJERCICIO 6.25** ¿Habrá dualidad en  $\mathbb{P}^3$ ? ¿Entre qué y qué?

### 6.4.3 Axiomas de incidencia y el quinto postulado

Demostremos ahora las propiedades más elementales del plano proyectivo, que son las de *incidencia*, y se refieren a las relaciones “estar en” o “pasar por” que hay entre puntos y rectas.

**Lema 6.7** *Por cualesquiera dos puntos de  $\mathbb{P}^2$  pasa una recta, y si son distintos ésta es única.*

**Demostración.** Sean  $[\mathbf{a}]$  y  $[\mathbf{b}]$  puntos en  $\mathbb{P}^2$ . Si  $[\mathbf{a}] = [\mathbf{b}]$  entonces para cualquier  $[\mathbf{n}] \in \ell_{[\mathbf{a}]}$  se tiene que  $[\mathbf{a}] \in \ell_{[\mathbf{n}]}$  por (6.12). Si  $[\mathbf{a}] \neq [\mathbf{b}]$ , sea  $\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , entonces  $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$  y se tiene que  $[\mathbf{a}], [\mathbf{b}] \in \ell_{[\mathbf{n}]}$ , pues  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = 0$ . Además, esta recta es única pues  $\mathbf{n}$  genera a la recta perpendicular al plano que generan los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ .  $\square$



Y tenemos el resultado dual en el siguiente lema.

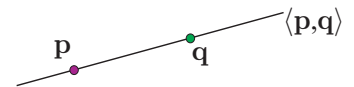
**Lema 6.8** *Dos rectas distintas de  $\mathbb{P}^2$  tienen un único punto en común.*

**Demostración.** Dadas  $\ell_{[\mathbf{a}]}$  y  $\ell_{[\mathbf{b}]}$  rectas en  $\mathbb{P}^2$ , si  $\ell_{[\mathbf{a}]} = \ell_{[\mathbf{b}]}$  no hay nada que demostrar. Si  $\ell_{[\mathbf{a}]} \neq \ell_{[\mathbf{b}]}$  (es decir, si  $[\mathbf{a}] \neq [\mathbf{b}]$ ), sea  $\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , entonces  $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ , pues  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son linealmente independientes; y se tiene que  $[\mathbf{n}] \in \ell_{[\mathbf{a}]} \cap \ell_{[\mathbf{b}]}$ , pues  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} = 0$ .  $\square$

Nótese que este lema consiste simplemente en pasar a lenguaje de puntos en  $\mathbb{P}^2$  el hecho de que dos planos por el origen en  $\mathbb{R}^3$  se intersectan en una línea; y el anterior que dos líneas por el origen generan un plano.

**Notación.** A veces será más fácil referirnos a los puntos de  $\mathbb{P}^2$  por una sola letra como  $\mathbf{p}$  o  $\mathbf{q}$ ; en este caso, sabemos que podemos recurrir a sus coordenadas homogéneas o a algún vector representante, pero en el contexto éstos no son relevantes. También será útil tener una notación para *la recta que generan dos puntos*:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$$



denotará la recta que pasa por  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$ . Así que hemos demostrado que si  $[\mathbf{a}] \neq [\mathbf{b}]$  entonces

$$\langle [\mathbf{a}], [\mathbf{b}] \rangle = \ell_{[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]}.$$

Obsérvese también que las dos demostraciones anteriores son casi la misma, y esto no es casualidad. Se debe al *principio de dualidad* (6.12) que nos permite traducir cualquier resultado a su versión dual intercambiando “recta” por “punto” y la relación “pasar por” por la de “estar en”. Pero de esto hablaremos más adelante con ejemplos más interesantes a la mano. Por el momento queremos insistir en la diferencia básica con el plano euclidiano.

En el plano euclidiano se cumple el Lema 6.7, pero no el 6.8. De hecho este último contradice al Quinto Postulado; establece que en el plano proyectivo no hay paralelismo, que cualquier par de rectas se comporta de la misma manera: se intersectan en un único punto.

---

**EJERCICIO 6.26** Sean  $[\mathbf{a}] = [1 : 0 : -1]$ ,  $[\mathbf{b}] = [2 : 1 : -1]$ ,  $[\mathbf{c}] = [0 : 1 : -1]$  y  $[\mathbf{d}] = [1 : -1 : 3]$ . Encuentra el punto de intersección de las rectas que pasan por  $[\mathbf{a}]$  y  $[\mathbf{b}]$  y por  $[\mathbf{c}]$  y  $[\mathbf{d}]$ ; es decir

$$\langle [\mathbf{a}], [\mathbf{b}] \rangle \cap \langle [\mathbf{c}], [\mathbf{d}] \rangle.$$

**EJERCICIO 6.27** Los cuatro puntos del ejercicio anterior generan seis rectas cuyas intersecciones dan siete puntos. ¿Cuáles son los dos que no hemos dado explícitamente?

**EJERCICIO 6.28** En el plano  $z = 1$  de  $\mathbb{R}^3$  puedes encontrar representantes de los puntos del Ejercicio 6.26; haz un dibujo en él (como papel con coordenadas  $x, y$ ) de los objetos mencionados en los ejercicios anteriores.

---

#### 6.4.4 Parametrización de rectas proyectivas

En el plano euclidiano, toda recta es copia de la recta real mediante una parametrización. Veremos ahora el análogo: que en el plano proyectivo toda recta es una copia de la recta proyectiva.

Dados los puntos  $[\mathbf{a}], [\mathbf{b}] \in \mathbb{P}^2$ , tales que  $[\mathbf{a}] \neq [\mathbf{b}]$ , tenemos una *parametrización* de la recta que pasa por ellos dada por la función

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^2 \\ [x : y] &\mapsto [x\mathbf{a} + y\mathbf{b}]; \end{aligned}$$

...Dibujo

que corresponde a la manera natural de generar un plano por dos vectores dados. Esta función es inyectiva y nos dice que cada recta del plano es como la recta proyectiva modelo, o abstracta,  $\mathbb{P}^1$ . Sin embargo no está unívocamente determinada por los puntos  $[\mathbf{a}]$  y  $[\mathbf{b}]$  (aunque sí por sus representantes  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ ). Si tomamos  $t\mathbf{a}$  en vez de  $\mathbf{a}$ , con  $t \neq 0$  por supuesto, entonces la asignación  $[x : y] \mapsto [x(t\mathbf{a}) + y\mathbf{b}]$  sigue mandando al  $[1 : 0]$  en  $[\mathbf{a}]$  y al  $[0 : 1]$  en  $[\mathbf{b}]$ , pero en el resto de los puntos es diferente (si  $t \neq 1$ ). Esto corresponde a que una transformación proyectiva de  $\mathbb{P}^1$  está determinada por su valor en tres puntos, no sólo en dos. Así que dado cualquier otro

punto  $[c] \in \langle [a], [b] \rangle$  se tiene que  $c = t a + s b$  para algunos  $t$  y  $s$  que son distintos de cero si  $[a] \neq [c] \neq [b]$ . Y entonces la función

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^2 \\ [x : y] &\mapsto [x(t a) + y(s b)], \end{aligned}$$

que manda a la terna canónica  $[1 : 0], [0 : 1], [1 : 1]$  en la terna  $[a], [b], [c]$  sí está unívocamente determinada.

Estas inclusiones de  $\mathbb{P}^1$  en  $\mathbb{P}^2$  son ejemplos de *funciones proyectivas*. Tenemos entonces que todas las rectas de  $\mathbb{P}^2$  son como nuestro modelo ideal de recta proyectiva  $\mathbb{P}^1$ .

**EJERCICIO 6.29** Sean  $[a] = [1 : 0 : -1], [b] = [2 : 1 : -1]$  y  $[c] = [0 : -1 : 0]$ . Demuestra que son colineales y encuentra explícitamente la función proyectiva de  $\mathbb{P}^1$  en  $\mathbb{P}^2$  que manda al  $[1 : 0]$  en  $[a]$ , al  $[0 : 1]$  en  $[b]$  y al  $[1 : 1]$  en  $[c]$ .

**EJERCICIO 6.30** ¿Puedes definir líneas en  $\mathbb{P}^3$ ? ¿Funciones proyectivas de  $\mathbb{P}^2$  en  $\mathbb{P}^3$ ?

## 6.5 Modelos del plano proyectivo

### 6.5.1 Completación de $\mathbb{R}^2$

Consideremos al plano en  $\mathbb{R}^3$  dado por la ecuación  $z = 1$ ; llamémosle  $\Pi_z$ . Tiene una parametrización natural tomando como origen al tercer vector canónico  $e_3$  y como generadores a  $e_1$  y  $e_2$ ; es decir, lo podemos identificar con  $\mathbb{R}^2$  mediante la inclusión:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \Pi_z \subset \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (x, y, 1). \end{aligned}$$

Consideremos también al siguiente conjunto de  $\mathbb{P}^2$ :

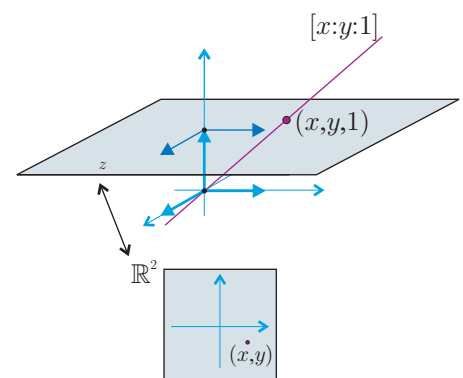
$$\mathbb{A}_z := \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \mid z \neq 0\}.$$

Consiste de todos los puntos de  $\mathbb{P}^2$  que no cumplen  $z = 0$ ; es decir, es el complemento en el plano proyectivo de la recta  $\ell_{[e_3]}$ ; esto es,  $\mathbb{A}_z = \mathbb{P}^2 - \ell_{[e_3]}$ . Entonces, tenemos una biyección natural

$$\begin{aligned} \Pi_z &\rightarrow \mathbb{A}_z \\ (x, y, 1) &\mapsto [x : y : 1], \end{aligned}$$

cuya inversa, que está bien definida, es

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_z &\rightarrow \Pi_z \\ [x : y : z] &\mapsto (x/z, y/z, 1). \end{aligned}$$



Si pensamos a los puntos de  $\mathbb{P}^2$ , geoméricamente, como rectas por el origen en  $\mathbb{R}^3$ , entonces  $\mathbb{A}_z$  consiste de todas estas rectas excepto las horizontales (en el plano  $z = 0$ , que corresponden a puntos de  $\ell_{[e_3]}$ ). Cada una de las rectas  $[\mathbf{x}] \in \mathbb{A}_z$  intersecta a  $\Pi_z$  en un único punto. Y ésta es la biyección  $\mathbb{A}_z \rightarrow \Pi_z$ ,  $([\mathbf{x}] \mapsto [\mathbf{x}] \cap \Pi_z)$ .

Componiendo las dos biyecciones que acabamos de definir, podemos identificar a  $\mathbb{R}^2$  con el complemento de una recta en  $\mathbb{P}^2$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{A}_z = \mathbb{P}^2 - \ell_{[e_3]} \\ (x, y) &\mapsto [x : y : 1]. \end{aligned} \tag{6.13}$$

A esta inclusión de  $\mathbb{R}^2$  en el plano proyectivo se le llama una *carta coordenada* (pueda coordenadas locales para un pedazo de  $\mathbb{P}^2$ ), y a ésta en particular la llamaremos la *carta coordenada canónica*. Observemos además que las rectas por el origen en  $\mathbb{R}^3$  cercanas a las horizontales intersectan en puntos muy lejanos al plano  $\Pi_z$  y, por tanto, corresponden a puntos de norma muy grande en  $\mathbb{R}^2$ . De tal manera que si a  $\mathbb{R}^2$  le “pegamos” una recta proyectiva al infinito (llamémosla  $\ell_\infty = \ell_{[e_3]}$ ) obtenemos  $\mathbb{P}^2$ ,

$$\mathbb{P}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \ell_\infty.$$

Veamos ahora que las rectas de  $\mathbb{R}^2$  y de  $\mathbb{P}^2$  se corresponden. Una recta  $\ell$  en  $\mathbb{R}^2$  está dada por una ecuación  $ax + by = c$ :

$$\ell = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\}.$$

Por (6.13) sus puntos van a los puntos de la recta dual a  $[a : b : -c]$ :

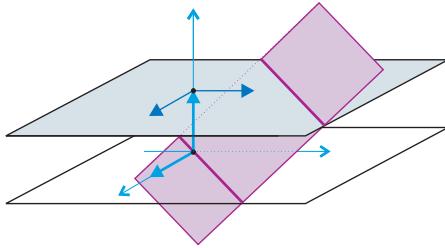
$$\{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \mid ax + by - cz = 0\},$$

y al único punto que no le “pegan” es a  $[-b : a : 0]$ ; que es justo la intersección de esta última recta con la recta al infinito.

Geoméricamente, una recta en  $\mathbb{R}^2$  pensado como  $\Pi_z$  genera junto con el origen (de  $\mathbb{R}^3$ ) un plano que corresponde a una recta en  $\mathbb{P}^2$ ; lo único que no se “ve” en  $\Pi_z$  es la intersección de ese plano con el plano horizontal ( $z = 0$ ), que es  $[-b : a : 0]$ . Obsérvese además, que **las rectas paralelas en  $\mathbb{R}^2$**  (obtenidas al variar  $c$  en la descripción anterior) **pasan por el infinito en este mismo punto**.

Inversamente, una recta en  $\mathbb{P}^2$  corresponde a un plano por el origen en  $\mathbb{R}^3$ , y todos ellos, excepto el horizontal ( $z = 0$ ), intersectan a  $\Pi_z$  en una recta.

Podemos resumir diciendo que el plano proyectivo se obtiene del euclidiano añadiendo un *punto al infinito* por cada clase de paralelismo de rectas. Las rectas del proyectivo son las rectas del euclidiano a las que se adjunta el punto al infinito de su clase de paralelismo (convirtiéndolas en rectas proyectivas), y además, todos los puntos al infinito constituyen una nueva recta, llamada “la recta al infinito”.



...Dibujo

### 6.5.2 Cartas afines

En la sección anterior demostramos que  $\mathbb{P}^2$  se puede ver como  $\mathbb{R}^2$  junto con una recta al infinito  $\ell_\infty$ . Podría parecer que esta recta tiene algo especial, pero no es así. Escogimos la tercera coordenada para definir el plano  $\Pi_z \subset \mathbb{R}^3$  y el subconjunto  $\mathbb{A}_z$  de  $\mathbb{P}^2$  por conveniencia. Podemos usar la segunda coordenada  $y$  para definir  $\Pi_y : y = 1$ ;  $\mathbb{A}_y := \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \mid y \neq 0\}$ , de tal manera que  $\mathbb{A}_y = \mathbb{P}^2 - \ell_{[e_2]}$  y tenemos una nueva carta coordenada

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{A}_y \\ (x, z) &\mapsto [x : 1 : z], \end{aligned}$$

cuya inversa es

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_y &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ [x : y : z] &\mapsto (x/y, z/y). \end{aligned}$$

En esta nueva carta coordenada, lo que antes era la recta al infinito se ve como el primer eje coordenado de  $\mathbb{R}^2$ , es decir, corresponde a la recta  $\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z = 0\}$ ; el origen de  $\mathbb{R}^2$  corresponde al punto  $[0 : 1 : 0] = [e_2]$ , y lo que ahora no se ve (la nueva recta al infinito) es su dual  $\ell_{[e_2]}$ . Si pensamos a estas cartas coordenadas como fotografías de porciones grandes de  $\mathbb{P}^2$ , con estas dos cartas hemos retratado a todos los puntos, con excepción de uno:  $[1 : 0 : 0] = [e_1]$ , que en ambas cartas quedó en el infinito. Pero debe ser claro ahora que si hacemos lo mismo con la primera coordenada  $x$ , obtenemos una nueva carta  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{A}_x = \mathbb{P}^2 - \ell_{[e_1]}$  con coordenadas naturales  $(y, z)$ , donde  $[e_1]$  aparece justo en el origen. ...Dibujo

El nombre de “carta” que hemos estado usando impunemente, ahora sí cobra sentido: viene de la palabra antigua para referirse a “mapa”. Y con las tres cartas que hemos definido armamos un *atlas* que describe a todo el plano proyectivo. Nos dice que **el plano proyectivo es localmente como el euclidiano** y las rectas de ambos se corresponden (también localmente).

Hemos usado el apellido “coordenada” para las cartas, pues son funciones explícitas de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{P}^2$  que nos dan coordenadas locales al quitar una de las tres rectas  $\ell_{[e_i]}$ . Pero, además de su sencillez analítica, no hay nada de especial en estas tres rectas. La idea funciona para que cualquier recta se vaya al infinito, pero entonces lo que nos queda no tiene coordenadas naturales (para hacerse corresponder a  $\mathbb{R}^2$ ) pues no habrá origen ni ejes canónicos. Veamos. ...Dibujo

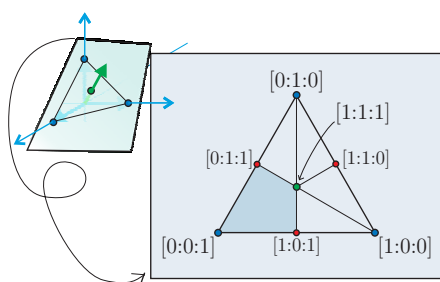
Dada una recta  $\ell_{[n]} \subset \mathbb{P}^2$  consideremos el plano  $\Pi_n : \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 1$  (el 1 podría cambiarse por cualquier constante distinta de cero, pero así será más fácil pues cambiar al 1 corresponde a alargar  $\mathbf{n}$ ). Cualquier recta por el origen  $[\mathbf{x}] \in \mathbb{P}^2$  que cumpla que  $[\mathbf{x}] \notin \ell_{[n]}$  (es decir, que  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \neq 0$ ) intersecta a  $\Pi_n$  justo en un punto. A saber, en  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})^{-1} \mathbf{x}$ . De tal manera que  $\Pi_n$  puede identificarse con  $\mathbb{P}^2 - \ell_{[n]}$  por medio de la

función

$$\begin{aligned}\Pi_n &\rightarrow \mathbb{P}^2 - \ell_{[n]} \\ \mathbf{x} &\mapsto [\mathbf{x}].\end{aligned}$$

Puesto que  $\Pi_n$  es un plano afín (no tiene coordenadas naturales), a ésta la llamamos *carta afín*. Lo cual implica que cualquier recta de  $\mathbb{P}^2$  funciona como recta al infinito en la carta afín que abarca a su complemento.

Como ejemplo importante, veamos al plano que contiene a los tres vectores canónicos. Sea  $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ , y sea  $\Pi : \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 1$ . Es decir,  $\Pi$  está dado por la ecuación  $x + y + z = 1$ . De tal manera que  $\mathbf{e}_i \in \Pi$  para  $i = 1, 2, 3$ .



Además forman un triángulo equilátero con  $(1/3)\mathbf{u}$  en el baricentro. Este plano contiene a un representante de cada  $[x : y : z] \in \mathbb{P}^2$  que cumpla  $x + y + z \neq 0$ ; a saber,  $(x/(x+y+z), y/(x+y+z), z/(x+y+z))$ . Esta carta afín es simétrica respecto a las tres coordenadas; las rectas al infinito de las tres cartas coordenadas que vimos al principio son ahora las rectas del triángulo básico. Nos será útil más adelante; entonces nos referiremos a ella

como *la carta afín canónica*. En ella también se ve la “loseta canónica” (los puntos  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$  de la carta coordenada canónica) y los siete puntos en que se basó el trazado de pisos del pintor. Nótese que al poner coordenadas proyectivas ya no nos preocupamos de que las coordenadas sumen 1, pero que a partir de ellas, las coordenadas baricéntricas correspondientes se obtienen fácilmente.

**EJERCICIO 6.31** Describe la intersección de dos cartas afines.

**EJERCICIO 6.32** Sea  $\varphi_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  la carta coordenada canónica como función, es decir

$$\varphi_3(x, y) = [x : y : 1].$$

Análogamente, sean  $\varphi_2, \varphi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  las cartas coordenadas de la segunda y primera variable respectivamente. ¿Cuál es la expresión analítica de  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_3$ ? ¿En dónde está definida? A estas funciones se les llama *cambio de coordenadas*, pues en un atlas indican cómo interpretar puntos en una carta (mapa) dentro de otra.

**EJERCICIO 6.33** En la carta afín canónica localiza los puntos  $[2 : 0 : 1]$ ,  $[3 : 0 : 1]$ ,  $[0 : 2 : 1]$ ,  $[1 : 0 : 2]$  y  $[1 : 1 : -1]$ . (Recuerda la sección de coordenadas baricéntricas).

**EJERCICIO 6.34** En la carta coordenada canónica, ¿cuál es la recta al infinito de la carta afín canónica?



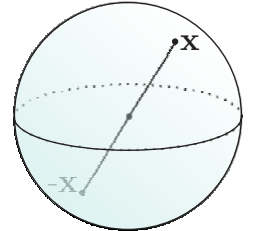
### 6.5.3 La esfera módulo antípodas

Otra manera de “ver” al plano proyectivo es usando a la esfera unitaria  $\mathbb{S}^2$ . Puesto que cada recta por el origen en  $\mathbb{R}^3$  intersecta a la esfera en dos puntos antípodas, a saber,

$$[\mathbf{x}] \cap \mathbb{S}^2 = \{|\mathbf{x}|^{-1} \mathbf{x}, -|\mathbf{x}|^{-1} \mathbf{x}\},$$

entonces la función

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^2 &\rightarrow \mathbb{P}^2 \\ \mathbf{x} &\mapsto [\mathbf{x}] \end{aligned}$$



es sobre y 2 a 1. Es decir, la pre-imagen de cada punto consiste precisamente de dos puntos; y en nuestro caso esos dos puntos son antípodas (pues  $[\mathbf{x}] = [-\mathbf{x}]$ ). Dicho de otra manera, la esfera unitaria  $\mathbb{S}^2$  contiene representantes de todos los puntos de  $\mathbb{P}^2$ ; más aún, contiene exactamente dos representantes de cada uno y éstos dos son antípodas. Si consideramos “ser antípodas” como una relación de equivalencia en  $\mathbb{S}^2$ , entonces  $\mathbb{P}^2$  es el conjunto de clases de equivalencia. Esto se escribe como

$$\mathbb{P}^2 = \mathbb{S}^2 / \{\mathbf{x} \sim -\mathbf{x}\}$$

y se lee “ $\mathbb{P}^2$  es igual a  $\mathbb{S}^2$  módulo antípodas”. Más aún, como las clases de equivalencia consisten de parejas de puntos muy alejados (de hecho tan alejados como es posible), entonces en porciones pequeñas de la esfera (que no contengan una pareja de antípodas) la correspondencia es 1 a 1. Se dice entonces que la esfera es un *cubrimiento doble* del plano proyectivo.

Si con las cartas afines hicimos el símil de una fotografía fiel pero local (de un pedazo) de  $\mathbb{P}^2$ , ahora tendríamos que decir que este modelo es una foto global, pero sobreexpuesta (aunque con control: cada punto aparece dos veces en la foto y justo en extremos opuestos de ella).

Éste será el modelo adecuado para hablar de cuestiones métricas en el plano proyectivo. Observemos que las rectas de  $\mathbb{P}^2$ , al corresponder a planos por el origen de  $\mathbb{R}^3$ , se “levantan” a círculos máximos en  $\mathbb{S}^2$ . Al recorrer un círculo máximo en  $\mathbb{S}^2$  para regresar al punto de partida, se recorre “abajo”, en  $\mathbb{P}^2$ , una recta pero se le dan dos vueltas (al llegar al punto antípoda en  $\mathbb{S}^2$  ya llegamos al punto de partida en  $\mathbb{P}^2$  y arrancamos una nueva vuelta). Cada círculo máximo se mapea 2 a 1 a su recta correspondiente en el proyectivo. Tenemos entonces que las maneras más económicas (o rápidas) de viajar en  $\mathbb{S}^2$ , que son los círculos máximos, corresponden a las rectas de  $\mathbb{P}^2$ . Lo cual indica que debe haber nociones de distancia y ángulo en el plano proyectivo si los copiamos de su cubierta doble. Esto se hará con detalle más adelante; por lo pronto queremos dejar la idea de que hay un proyectivo rígido, con nociones métricas y que localmente parece un cascarón esférico.

### 6.5.4 Modelo del disco

Del modelo de la esfera podemos obtener uno nuevo como sigue. Consideremos el hemisferio superior de la esfera

$$\mathbb{S}_+^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \mid z \geq 0\}.$$

De nuevo,  $\mathbb{S}_+^2$  tiene representantes de todos los puntos de  $\mathbb{P}^2$ , *i.e.*, la función  $\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]$  restringida a  $\mathbb{S}_+^2$  es sobre. Pero ahora es 2 a 1 solamente en la *frontera*, es decir, en el ecuador (cuando  $z = 0$ ), que corresponde a la recta al infinito de nuestra carta coordenada canónica  $z = 1$ . Pues cada punto que no está en la frontera de  $\mathbb{S}_+^2$  tiene su tercera coordenada positiva,  $z > 0$ , y entonces su antípoda la tiene negativa, y por tanto ya no está en  $\mathbb{S}_+^2$ . Si proyectamos ortogonalmente al hemisferio superior sobre el plano  $z = 0$ , obtenemos una biyección con el disco unitario en  $\mathbb{R}^2$ ,

$$\mathbb{D}^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\},$$

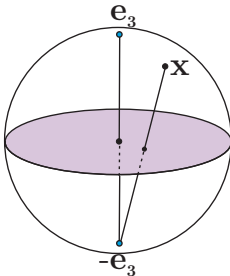
cuya frontera es  $\mathbb{S}^1$ . En topología, se usa al símbolo de “parcial”,  $\partial$ , para denotar la frontera, y se lee “frontera”, así que podemos escribir lo anterior:

$$\partial \mathbb{D}^2 = \mathbb{S}^1.$$

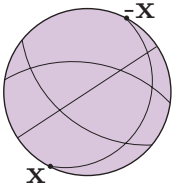
Y podemos concluir que el plano proyectivo se obtiene del disco  $\mathbb{D}^2$  identificando cada punto de la frontera con su antípoda, que se escribe

$$\mathbb{P}^2 = \mathbb{D}^2 / \{\mathbf{x} \sim -\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{S}^1\}.$$

A éste lo llamaremos el *modelo ortogonal del disco*. Tiene la desventaja de que las rectas proyectivas, excepto la del infinito y las que pasan por  $[\mathbf{e}_3]$ , se proyectan en elipses, y que en la recta al infinito distorsiona mucho pues ahí la proyección ortogonal colapsa la dirección vertical. Esto se corrige cambiando de proyección.



La *proyección estereográfica* de la esfera consiste en proyectar desde el polo sur,  $-\mathbf{e}_3$ , al plano  $z = 0$ ; es decir, a cada punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2$  lo mandamos a la intersección de su recta con  $-\mathbf{e}_3$  y el plano  $z = 0$ . Es claro que al hemisferio superior lo manda en el disco unitario (y al inferior a su exterior, pero esto no nos interesa). Resulta que la proyección estereográfica (de  $\mathbb{S}^2 - \{-\mathbf{e}_3\}$  en  $\mathbb{R}^2$ ) preserva ángulos y manda a las líneas esféricas en círculos que intersectan a  $\mathbb{S}^1$  en puntos antípodos. No demostramos lo anterior pues formalmente nunca lo necesitaremos, pero es un buen ejercicio de geometría en el espacio; aunque son las dos propiedades que hacen preferible a la proyección estereográfica sobre la ortogonal.



El *modelo del disco* (ya sin apellido, o *modelo estereográfico del disco*, si queremos ser más explícitos) se obtiene del hemisferio superior  $\mathbb{S}_+^2$  proyectando estereográficamente sobre  $\mathbb{D}^2$ , y entonces  $\mathbb{P}^2$  es este  $\mathbb{D}^2$  identificando puntos antípodas en la frontera ( $\{\mathbf{x} \sim -\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{S}^1\}$ ). Se tiene además que las rectas proyectivas son segmentos de círculo que intersectan a  $\mathbb{S}^1$  en puntos antípodas (incluyendo los diámetros como círculos con centro en el infinito). Tiene la agradable particularidad de que los ángulos sí se pueden medir en él, aunque las distancias no.

**EJERCICIO 6.35** En un pedazo de tela redondo ( $\sim \mathbb{D}^2$ ), un mantelito digamos, zurce la orilla ( $\partial \mathbb{D}^2$ ) de tal manera que cada punto quede pegado a su antípoda. ¿Se puede concluir este trabajo?

**EJERCICIO 6.36** Observa que en el modelo del disco sólo se usa el plano y subconjuntos de él. Describe el análogo del modelo del disco para  $\mathbb{P}^3$ .

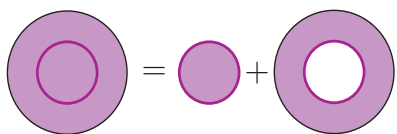
**EJERCICIO 6.37** Demuestra que la proyección estereográfica  $f : \mathbb{S}^2 - \{-\mathbf{e}_3\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  tiene la fórmula analítica

$$f(x, y, z) = \frac{1}{z+1}(x, y).$$

**EJERCICIO 6.38** Demuestra que bajo la proyección estereográfica la línea esférica dada por la ecuación  $\mathbf{ax} + \mathbf{by} + z = 0$  se mapea en el círculo con centro en  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  y radio  $\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + 1}$ . ¿Qué líneas esféricas no caen en el enunciado anterior y a dónde se mapean?

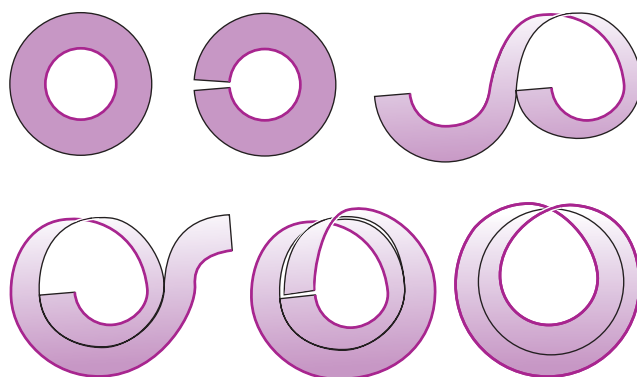
### 6.5.5 La banda de Moebius más un disco

El ejercicio de zurcir el mantelito tiene respuesta negativa; no hay manera de ver al plano proyectivo como subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ . Pero sí podemos verlo en dos peda-



zos. Si del disco  $\mathbb{D}^2$  cortamos un disco interior, el de radio  $1/2$  digamos, y llamémoslo  $\mathbb{D}_{1/2}^2$ , obtenemos un anillo y un disco (de los cuales hay que recordar que —y cómo— sus fronteras se identifican). En el anillo, además tenemos que identificar la frontera

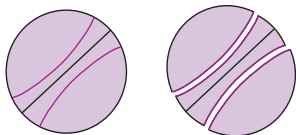
exterior antipodálmente para obtener el plano proyectivo, y esto se puede lograr haciendo un nuevo corte que nos da una banda; luego, dándole media vuelta a una mitad (estirándola), al mismo tiempo que vamos haciendo un giro (en  $\mathbb{R}^3$ ) que pase lo de adentro hacia afuera para identificar el primer par de antípodas. Y de ahí en adelante, seguir identificando es como cerrar un *zipper*: la banda tiene que dar otro giro de  $\pi$  para regresar justo a pegarse con el extremo que se había quedado fijo y untado al plano. Obtenemos una banda de Moebius  $M$ . La frontera de la banda de Moebius es un círculo (se escribe, topológicamente,  $\partial M = \mathbb{S}^1$ ) que debe identificarse con la frontera de  $\mathbb{D}_{1/2}^2$  que también es un círculo. Podríamos resumir con una fórmula topológica del estilo



$$“ \mathbb{P}^2 = \mathbb{D}^2 \cup_{\partial} M ”$$

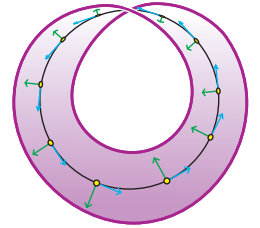
pues el disco  $\mathbb{D}_{1/2}^2$  es “igual” al canónico  $\mathbb{D}^2$  y tanto él como la banda de Moebius  $M$  tienen la misma frontera,  $\mathbb{S}^1$ , que se identifica; es una unión donde se “comparte” la frontera. El entrecomillado es porque no nos toca dar definiciones más precisas. Varias observaciones son pertinentes.

Primero, obsérvese que el círculo que originalmente era la frontera exterior del anillo viene de una línea proyectiva, la del infinito; al hacer la identificación antipodal quedó justo como una línea (punto por punto, sin redundancias, pues los puntos que debían identificarse lo hicieron), y es el corazón, alma o **ánima** de la banda de Moebius. Puesto que todas las líneas son iguales, debemos tener entonces que alrededor de cualquier línea proyectiva, su “vecindad regular”, que se obtiene alejándose un poquito en las dos direcciones normales a ella, también hay una banda de Moebius. Si hacemos esto con otra línea, un diámetro digamos en el modelo del disco, se obtiene el mismo resultado; es decir, córtese una vecindad regular de un diámetro, quedan tres pedazos, en ellos se pueden hacer las identificaciones de la frontera y nos queda, como era de esperarse, una banda de Moebius (con el diámetro como *ánima*) y un disco cuyas fronteras deben identificarse.



Segundo, recuérdese que en la sección última (y extra) del Capítulo 1 (si se pasó por alto, hojéese) ya habíamos obtenido una banda de Moebius abierta como el espacio de rectas en  $\mathbb{R}^2$ . Esa banda de Moebius abierta es justo el plano proyectivo quitándole un punto, pues las rectas en  $\mathbb{R}^2$  son las proyectivas menos la del infinito, y las rectas proyectivas corresponden, por dualidad, a los puntos de  $\mathbb{P}^2$ ; esa banda de Moebius se obtiene haciendo chiquito al disco complementario.

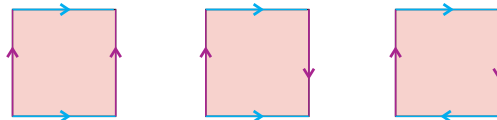
Y tercero: el plano proyectivo no es orientable. Si un punto viaja por el ánimo de una banda de Moebius junto con una base de vectorsitos, el primero apuntando en la dirección del movimiento y el segundo perpendicular a la izquierda (lo que hemos convenido como orientación positiva), al dar una vuelta el primer vector regresa justo a su lugar, pero el segundo apunta en la dirección contraria. No hay manera de dar orientaciones locales de manera coherente en toda la banda de Moebius y por eso se dice que es no orientable. Pero esto también tiene sus ventajas, y podemos mover a la banda de Moebius dentro de sí misma —empujándola junto con el punto, trasladando en la recta que es su ánimo— y al dar una vuelta completa, el efecto local es como si reflejáramos en la línea, la frontera sólo ha dado media vuelta dentro de sí misma. Esto se verá con más cuidado al estudiar las transformaciones del plano proyectivo.




---

### EJERCICIO 6.39 [“Toro”]

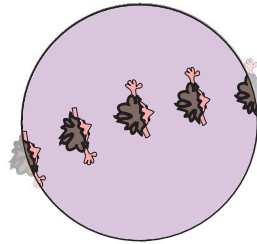
“Toro” Se pueden identificar los lados opuestos de un cuadrado de tres maneras esencialmente distintas como en la figura. La primera da la superficie (la frontera) de una dona, que en matemáticas se conoce como *toro*. La segunda da la *botella de Klein*, ¿qué da la tercera? ¿Cuáles se pueden ver en  $\mathbb{R}^3$ ? ¿Cuáles son orientables?



## 6.5.6 Modelo Nintendo

Muchos juegos de computadora o Nintendo en los que el objeto que controla el jugador, una navecita digamos, se mueve libremente en dos dimensiones, tienen la particularidad de que cuando la nave llega a un extremo de la pantalla aparece justo por el lado contrario. En estos juegos, el “espacio” (virtual por necesidad) donde vive la nave es un Toro (véase el ejercicio “Toro”). Podemos entonces diseñar un juego equivalente donde el espacio sea el plano proyectivo, tomando como “cancha” un disco y haciendo que cada vez que la navecita choque con la frontera aparezca continuamente por la parte opuesta.

La navecita tiene la particularidad de ser simétrica con respecto a un eje, así que la cambiaremos por un ser bidimensional que no sea simétrico; que tenga una mano pero la otra no, un “manquito”. Si sale del centro del disco, cruza la frontera (él ni cuenta se da de que lo está haciendo) y regresa al centro, ahora está manco de la mano contraria. No se puede decir, por tanto, si es manco de la mano derecha



o de la mano izquierda. Esto sucede porque el plano proyectivo no es orientable; localmente sí se puede hablar de derecha e izquierda, pero globalmente pierden su sentido. Al dar una vuelta “esencial” por su universo, el manquito ve todo como en espejo; pero no es tan grave, una vuelta más y todo regresa a la normalidad.

---

**EJERCICIO 6.40** ¿Es orientable  $\mathbb{P}^3$ ?

**EJERCICIO 6.41** Supón que nuestro universo es no orientable. ¿Cuál sería el efecto sobre ti de un viaje intergaláctico que regrese a la Tierra pero con la orientación opuesta? ¿Sabrías leer?

---

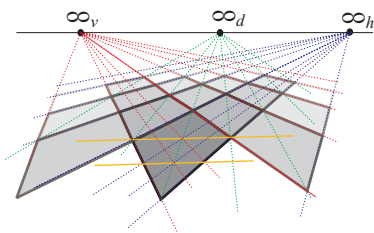
## 6.6 Transformaciones proyectivas

Hemos insistido en que un enfoque moderno en geometría debe incluir por fuerza un estudio de las transformaciones relevantes. Nos toca entonces estudiar las transformaciones del plano proyectivo en sí mismo que preservan la estructura que hemos definido, sus subconjuntos especiales llamados rectas.

### 6.6.1 Con regla

Recordemos la sección donde se construyó el método del pintor para que, con el simple uso de una regla (y lápiz y goma, por supuesto), se pudiera dibujar un piso cuadrado en perspectiva. Ahora podemos decir mucho más cosas sobre ese método.

Si pensamos en el piso como  $\mathbb{R}^2$  junto con una línea al infinito, es decir, como  $\mathbb{P}^2$ , y al lienzo también como  $\mathbb{P}^2$  (o una porción de él), entonces estabamos rastreando, o construyendo, una función de  $\mathbb{P}^2$  en sí mismo que manda rectas en rectas a partir de la imagen del cuadrado unitario o “loseta básica”. La construcción se hace totalmente general cuando sabemos que cada par de rectas se intersectan, pues de las dos (imágenes de las) horizontales definimos su intersección,  $\infty_h$ ; de las dos verticales el correspondiente  $\infty_v$ ; a partir de estos dos puntos (que son diferentes pues las intersecciones de unas y otras son los vértices de la loseta) encontramos la imagen de la línea al infinito (que en aquel entonces llamamos horizonte), etc. Solamente se están usando los lemas de incidencia y que la función manda rectas en rectas.

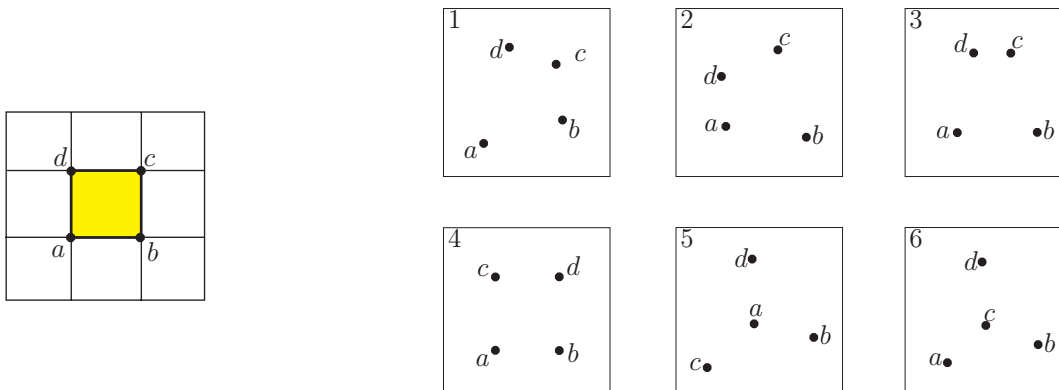


Inclusive se puede definir a dónde se mandan cuadrículas más finas al considerar la otra diagonal de la loseta, y tomar la intersección de ambas diagonales que debe ser la imagen del centro de la loseta original; a partir de este punto trazamos nuevas horizontales y verticales y el mismo proceso nos definirá a dónde van las losetitas. Para efectos de un pintor, se puede entonces aproximar (usando cuadrículas más y más finas) tanto como él quiera a una perspectiva perfecta de lo que esté dibujado en el piso. Y con variaciones o aplicaciones del mismo método a otros planos (fachadas, etc.), bastará para buenas reproducciones del mundo tridimensional sobre un lienzo. Pero para nosotros no basta.

Da la impresión de que este método tiene como corolario que para cualquier cuadrángulo (la loseta originalmente pintada y bastante arbitraria por cierto), habrá una transformación de  $\mathbb{P}^2$  en  $\mathbb{P}^2$  que manda rectas en rectas, y al cuadrado unitario en el dado. Este teorema es cierto, pero en su demostración por métodos sintéticos se involucran resultados fuertes, entre otros los teoremas de Desargues y de Pappus (que tienen que ver con el problema de colinearidad que se planteó entonces), y también surge un problema profundo de completez. Pues para nada es claro que a cualquier punto lo podamos definir con una simple regla y un compás; tendríamos que invocar continuidad, que nos rebasa.

Pero las cosas no están tan mal como las estamos pintando. Hemos construido un poderoso método analítico con el que resolveremos las interrogantes planteadas.

**EJERCICIO 6.42** Dadas las imágenes de los cuatro vértices de una loseta como en las figuras siguientes, completa a dónde tienen que ir las ocho losetas circundantes bajo una transformación proyectiva (que preserve líneas).



**EJERCICIO 6.43** Añade a las figuras anteriores la horizontal y la vertical que parten a la loseta en cuatro losetitas iguales.

### 6.6.2 Analíticas

Una transformación de  $\mathbb{P}^2$  en  $\mathbb{P}^2$ , pensando a sus puntos como rectas por el origen en  $\mathbb{R}^3$ , nos dice cómo mandar a estas rectas en ellas mismas, define una correspondencia entre ellas; si además le pedimos que mande rectas proyectivas en rectas proyectivas, la correspondencia entre rectas deberá mandar planos por el origen en planos por el origen. Y de este tipo de transformaciones en  $\mathbb{R}^3$  ya hemos hablado. Tenemos las transformaciones lineales de  $\mathbb{R}^3$  que cumplen justo estas propiedades, mandan al origen en sí mismo, a las rectas por él en rectas por él y a los planos por el origen en planos por el origen. ¡Ni mandadas a hacer!

Sea  $A$  una matriz invertible de  $3 \times 3$ , que define una transformación lineal de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$  dada por la regla de correspondencia  $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$  para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ . Podemos entonces definir su *transformación proyectiva asociada* como

$$f_A : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$$

$$f_A([\mathbf{x}]) = [A\mathbf{x}].$$

Para ver que está bien definida, hay que ver que la imagen está en donde debe y que no depende del representante. Puesto que  $[\mathbf{x}] \in \mathbb{P}^2$  implica que  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , y esto a su vez que  $A\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  pues escogimos a  $A$  invertible, entonces  $[A\mathbf{x}] \in \mathbb{P}^2$ . Además, dada  $t \neq 0$ , se tiene que

$$f_A([t\mathbf{x}]) = [A(t\mathbf{x})] = [t(A\mathbf{x})] = [A\mathbf{x}] = f_A([\mathbf{x}]).$$



Por tanto  $f_A$  está bien definida y manda rectas en rectas, pues éstas corresponden a los planos por el origen en  $\mathbb{R}^3$  y  $A$  manda planos por el origen en planos por el origen.

Es fácil ver que estas transformaciones forman un grupo pues las matrices invertibles (o las transformaciones lineales) lo hacen (veáse, y hágase el Ejercicio 6.44). Definimos entonces el *grupo de transformaciones proyectivas de  $\mathbb{P}^2$* , o de *proyectividades*, como

$$\mathbf{Pr}(2) := \{f_A : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2 \mid A \in \mathbf{GL}(3)\}.$$

Por la definición, parecería que  $\mathbf{Pr}(2)$  está en correspondencia con  $\mathbf{GL}(3)$ , pero no es así. Muchas matrices definen la misma función. Por ejemplo, si tomamos  $t \neq 0$  entonces  $tA \in \mathbf{GL}(3)$  y se tiene que

$$[(tA)\mathbf{x}] = [t(A\mathbf{x})] = [A\mathbf{x}]$$

para todo  $[\mathbf{x}] \in \mathbb{P}^2$ . Así que  $f_A = f_{tA}$ , y se valdría de nuevo hablar de  $f_{[A]} := f_A$  como nos sucedió con las rectas. Lo que sí hay es una función de  $\mathbf{GL}(3)$  sobre  $\mathbf{Pr}(2)$ , que por preservar el producto se llama *homomorfismo*. Y lo que sería bonito demostrar es que dos funciones proyectivas son iguales sólo si sus matrices son *proyectivamente equivalentes*, es decir de la forma  $A$  y  $tA$  para  $t \neq 0$ . Pero esto se verá en la siguiente sección.

**EJERCICIO 6.44** Demuestra que  $\mathbf{Pr}(2)$  es un grupo de transformaciones.

**EJERCICIO 6.45** ¿Cómo definirías  $\mathbf{Pr}(3)$ ?

### 6.6.3 El Teorema de 4 en 4

Decimos que un conjunto de puntos en el plano proyectivo está en *posición general* si ninguna tercia de ellos es colineal.

**Teorema 6.9** Sean  $p_0, p_1, p_2, p_3$  y  $q_0, q_1, q_2, q_3$  dos cuartetos de puntos en  $\mathbb{P}^2$  en posición general. Entonces existe una única transformación proyectiva  $f \in \mathbf{Pr}(2)$  que manda una en la otra, es decir, tal que  $f(p_i) = q_i$  para  $i = 0, 1, 2, 3$ .

**Demostración.** Como ya hemos visto en la demostración de los teoremas análogos, bastara demostrar que una cuarteta determinada puede ir a cualquier otra (ver y hacer el Ejercicio 6.46). Como cuarteta determinada, claramente nos conviene escoger a la cuarteta canónica  $[e_0], [e_1], [e_2], [e_3]$  donde  $e_1, e_2, e_3$  son la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ , y  $e_0 = (1, 1, 1) = e_1 + e_2 + e_3$ .

Sea  $q_0, q_1, q_2, q_3$  una cuarteta de puntos cualquiera en  $\mathbb{P}^2$  en posición general. Tenemos entonces que  $q_i = [u_i]$  para algún vector  $u_i \in \mathbb{R}^3$ . Es muy fácil lograr que la base canónica vaya a donde debe. Sea

$$A' = (u_1, u_2, u_3)$$

la matriz  $3 \times 3$  que cumple  $A' \mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1$ ,  $A' \mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_2$  y  $A' \mathbf{e}_3 = \mathbf{u}_3$ . Que  $[\mathbf{u}_1]$ ,  $[\mathbf{u}_2]$  y  $[\mathbf{u}_3]$  no sean colineales en  $\mathbb{P}^2$  implica que los vectores  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$  y  $\mathbf{u}_3$  no son coplanares en  $\mathbb{R}^3$  y, por lo tanto, que la matriz  $A'$  es invertible. Entonces su función proyectiva asociada  $f'$  está bien definida y cumple que  $f'([\mathbf{e}_1]) = [\mathbf{u}_1]$ ,  $f'([\mathbf{e}_2]) = [\mathbf{u}_2]$  y  $f'([\mathbf{e}_3]) = [\mathbf{u}_3]$ , pero su valor en  $[\mathbf{e}_0]$  no tiene por qué ser  $[\mathbf{u}_0]$ ; por eso hemos usado las primas, todavía no es la buena.

Observemos que aún podemos modificar a  $A'$  de tal manera que los puntos de la base canónica vayan a dónde deben, a saber, si multiplicamos una columna por una constante no cero. Por ejemplo la matriz

$$A'' = (t \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$$

cumple que  $[A'' \mathbf{e}_1] = [t \mathbf{u}_1] = [\mathbf{u}_1]$  (aunque ya no sea cierto que mande al vector  $\mathbf{e}_1$  en el vector  $\mathbf{u}_1$ ). De tal manera que todavía tenemos tres grados de libertad para modificar a  $A'$  multiplicando sus tres columnas por constantes distintas de cero.

Como  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$  y  $\mathbf{u}_3$  forman una base de  $\mathbb{R}^3$ , existen constantes  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$  tales que

$$\mathbf{u}_0 = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3.$$

Sea  $A$  (ahora sí la buena) la matriz

$$A = (\lambda_1 \mathbf{u}_1, \lambda_2 \mathbf{u}_2, \lambda_3 \mathbf{u}_3).$$

Puesto que  $[\mathbf{u}_0]$  no es colineal con  $[\mathbf{u}_2]$  y  $[\mathbf{u}_3]$ , entonces  $\mathbf{u}_0$  no es coplanar con  $\mathbf{u}_2$  y  $\mathbf{u}_3$ , y por lo tanto  $\lambda_1 \neq 0$ . Análogamente,  $\lambda_2 \neq 0$  y  $\lambda_3 \neq 0$ , y por tanto  $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \det(A') \neq 0$ . Lo cual nos dice que  $A \in \mathbf{GL}(3)$  y tiene una transformación proyectiva asociada  $f = f_A$  que cumple

$$\begin{aligned} f([\mathbf{e}_0]) &= [A \mathbf{e}_0] = [\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3] = [\mathbf{u}_0] \\ f([\mathbf{e}_1]) &= [A \mathbf{e}_1] = [\lambda_1 \mathbf{u}_1] = [\mathbf{u}_1] \\ f([\mathbf{e}_2]) &= [A \mathbf{e}_2] = [\lambda_2 \mathbf{u}_2] = [\mathbf{u}_2] \\ f([\mathbf{e}_3]) &= [A \mathbf{e}_3] = [\lambda_3 \mathbf{u}_3] = [\mathbf{u}_3] \end{aligned}$$

y por tanto demuestra la existencia.

Para demostrar la unicidad, de nuevo (por las propiedades de grupo) basta demostrar un caso particular (ver y hacer el Ejercicio 6.47). Supongamos que  $f \in \mathbf{Pr}(2)$  es tal que  $f([\mathbf{e}_i]) = [\mathbf{e}_i]$  para  $i = 0, 1, 2, 3$ . Sabemos que  $f$  está dada por una matriz

$$A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3).$$

Puesto que  $[\mathbf{e}_1] = f([\mathbf{e}_1]) = [A \mathbf{e}_1] = [\mathbf{v}_1]$ , entonces existe  $t_1 \neq 0$  tal que  $\mathbf{v}_1 = t_1 \mathbf{e}_1$ ; y análogamente existen  $t_2 \neq 0$  y  $t_3 \neq 0$  tales que  $\mathbf{v}_2 = t_2 \mathbf{e}_2$  y  $\mathbf{v}_3 = t_3 \mathbf{e}_3$ ; es decir,  $A$  es una matriz diagonal. Pero se tiene además que

$$[1 : 1 : 1] = [\mathbf{e}_0] = f([\mathbf{e}_0]) = [A \mathbf{e}_0] = [t_1 : t_2 : t_3],$$

lo cual implica que  $t_1 = t_2 = t_3 = t$ . Por tanto

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} = tI$$

y esto, como ya hemos visto, implica que  $f = f_I = \text{id}_{\mathbb{P}^2}$ .  $\square$

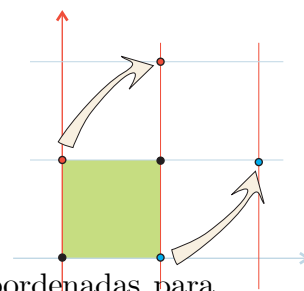
De este teorema y su demostración obtendremos, por lo pronto, dos implicaciones. La primera es que el método del pintor que hemos descrito es coherente. Pues si las cuatro esquinas de la loseta inicial están en posición general, entonces existe una transformación proyectiva, dada analíticamente, que manda a todo  $\mathbb{P}^2$  en sí mismo y que manda rectas en rectas (preservando por tanto colinearidad y concurrencia), de tal manera que el método constructivo que describimos es obligado.

La otra implicación es concluir la descripción del grupo  $\mathbf{Pr}(2)$  en términos de matrices. Si declaramos que dos matrices  $A$  y  $B$  son equivalentes cuando existe  $t \neq 0$  tal que  $B = tA$  y denotamos con  $[A]$  a la clase de equivalencia de  $A$ , entonces las transformaciones proyectivas están en correspondencia natural y biyectiva con el conjunto de clases de equivalencia de matrices invertibles, es decir, con  $\{[A] \mid A \in \mathbf{GL}(3)\}$ ; que a veces se llama  $\mathbf{GL}(3)$  proyectivizado y se le denota  $\mathbf{PGL}(3)$ .

### Ejemplo

Para fijar ideas, veamos un ejemplo concreto. Queremos expresar analíticamente la transformación proyectiva de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$  (pensados como la carta coordenada canónica de  $\mathbb{P}^2$ ) que hace lo siguiente

$$\begin{aligned} (0,0) &\mapsto (0,0) \\ (1,0) &\mapsto (2,1) \\ (0,1) &\mapsto (1,2) \\ (1,1) &\mapsto (1,1). \end{aligned}$$



Proyectivamente, a cada punto hay que agregarle un 1 a sus coordenadas para representarlos con un vector en  $\mathbb{R}^3$ , pues nos dieron sólo datos finitos, y el problema consiste en encontrar una matriz  $A$  de  $3 \times 3$  que mande a cada vector en la línea generada por el vector correspondiente. Si llamamos  $\mathbf{a}_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) a los correspondientes vectores de la izquierda y  $\mathbf{b}_i$ , respectivamente, a los que tienen que ser sus imágenes, necesitamos encontrar  $A$  tal que  $A\mathbf{a}_i = \lambda_i \mathbf{b}_i$  para algunas  $\lambda_i \neq 0$ . Puesto que  $A$  tiene 9 entradas incógnitas y hemos agregado las  $\lambda_i$ , tenemos 13 incógnitas en total; cada ecuación  $A\mathbf{a}_i = \lambda_i \mathbf{b}_i$  representa tres ecuaciones lineales donde los datos dados proveen las constantes. Así que tenemos 12 ecuaciones lineales con 13 incógnitas que, en principio, debían tener soluciones a un parámetro, que corresponde al hecho de que si  $A$  es solución también lo es  $tA$  para  $t \neq 0$ . Aunque no es tan difícil como parece, pues se pueden reagrupar las ecuaciones para hacerse similares por grupos, mejor intentemos otro método: siguiendo la demostración del teorema.

Sea  $\mathfrak{E}$  la cuarteta canónica  $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  que usamos en el teorema ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ ). Nos conviene reenumerar nuestros datos del dominio para que se parezcan más, de entrada, a  $\mathfrak{E}$ ; sean entonces  $\mathbf{a}_3 = (0, 0, 1)$ ,  $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 1)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 1)$  y  $\mathbf{a}_0 = (1, 1, 1)$  y denotemos con  $\mathfrak{A}$  a la cuarteta ordenada  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ . Respectivamente, sea  $\mathfrak{B}$  la cuarteta  $\mathbf{b}_0 = (1, 1, 1)$ ,  $\mathbf{b}_1 = (2, 1, 1)$ ,  $\mathbf{b}_2 = (1, 2, 1)$  y  $\mathbf{b}_3 = (0, 0, 1)$ . Nuestro problema se parte en dos: encontrar una matriz  $A$  que mande a la cuarteta  $\mathfrak{E}$  en la  $\mathfrak{A}$  (ojo, esta matriz no es la del párrafo anterior) y una matriz  $B$  que mande a  $\mathfrak{E}$  en  $\mathfrak{B}$ . Para, finalmente, obtener la solución  $BA^{-1}$  que manda a las cuartetos  $\mathfrak{A}$  en  $\mathfrak{B}$ :

$$\mathfrak{A} \xleftarrow{A} \mathfrak{E} \xrightarrow{B} \mathfrak{B}.$$

La matriz  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$  manda a  $\mathbf{e}_i$  en  $\mathbf{a}_i$  para  $i = 1, 2, 3$ ; pero sólo nos interesa que mande a  $[\mathbf{e}_i]$  en  $[\mathbf{a}_i]$  (los puntos proyectivos o las líneas), y esto lo logran todas las matrices  $(\lambda_1 \mathbf{a}_1, \lambda_2 \mathbf{a}_2, \lambda_3 \mathbf{a}_3)$  con  $\lambda_i \neq 0$ . Así que nos interesa una solución de la ecuación

$$(\lambda_1 \mathbf{a}_1, \lambda_2 \mathbf{a}_2, \lambda_3 \mathbf{a}_3) \mathbf{e}_0 = \lambda_0 \mathbf{a}_0$$

para atinarle al cuarto punto. Al sustituir nuestros datos tenemos el sistema

$$\begin{aligned} \lambda_1 & & & = \lambda_0 \\ & \lambda_2 & & = \lambda_0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = \lambda_0. \end{aligned}$$

cuya solución más bonita es  $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$  y  $\lambda_3 = -1$ ; que nos da como matriz que manda a  $\mathfrak{E}$  en  $\mathfrak{A}$ :

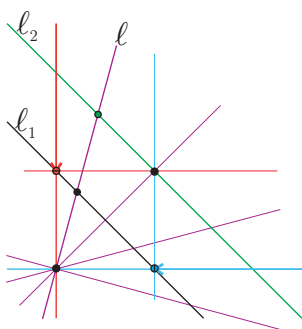
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ya que necesitaremos sacar su inversa, de una vez: resulta que es  $A$ , es decir,  $A^2 = I$  (hágase mentalmente el cálculo). Es, en cierta manera, una reflexión y vale la pena analizar su comportamiento geométrico antes de proseguir con el ejemplo.

La matriz  $A$  manda a la cuarteta canónica  $\mathfrak{E}$  en la “loseta canónica”  $\mathfrak{A}$  y, puesto que  $A^2 = I$ ,  $A$  manda entonces a la loseta canónica en la cuarteta  $\mathfrak{E}$ ; es decir, las intercambia. Su expresión analítica como función de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$  es

$$f(x, y) = \left( \frac{x}{x+y-1}, \frac{y}{x+y-1} \right)$$

(pues se añade un 1, se multiplica por  $A$  y se divide entre la tercera coordenada), de donde podemos sacar más información o corroborarla. Notemos primero que sus



puntos fijos son el punto  $(0,0) = \mathbf{a}_3$  y la recta  $l_2 : x + y = 2$  (que pasa por  $\mathbf{a}_0$ ), pues son las únicas soluciones de las ecuaciones  $f(x, y) = (x, y)$ . La recta  $l_1 : x + y = 1$  va a la recta al infinito  $l_\infty$  (que ya sabíamos pues  $\mathbf{a}_1$  y  $\mathbf{a}_2$  que la generan lo hacen), pero más aún, se intercambia con ella.

Entonces, si  $l$  es cualquier recta que pasa por el origen tenemos que  $f$  la manda en sí misma por medio de la reflexión proyectiva en los puntos  $l \cap l_2$  y  $\mathbf{O}$ ; pues estos se quedan fijos y el punto medio de su segmento,  $l \cap l_1$ , se intercambia con su punto al infinito  $l \cap l_\infty$ .

Podríamos decir que  $f$ , o equivalentemente  $A$ , es la *reflexión en la recta  $l_2$  respecto al punto  $\mathbf{a}_3 (= \mathbf{O})$* ; y esto tiene sentido para cualquier recta y un punto fuera de ella. Por ejemplo, si tomamos cualquier recta y el punto al infinito en su dirección ortogonal, esta reflexión es justo la euclidiana (isométrica), y para cualquier otro punto al infinito es una reflexión afín que para reflejar usa una dirección distinta de la ortogonal.

Pero si vemos a  $f$  con lupa, muy cerca de  $\mathbf{O}$ , ahí parece una rotación de ángulo  $\pi$ , pues todas las rectas que pasan por él únicamente cambian de dirección. Y esto también es cierto; si tomamos la reflexión en la recta al infinito respecto a cualquier punto  $\mathbf{p}$ , cada recta que pasa por  $\mathbf{p}$  se refleja en  $\mathbf{p}$ , simplemente cambia rígidamente de dirección, y entonces es la rotación isométrica por un ángulo  $\pi$  alrededor de  $\mathbf{p}$ .

Después de esta digresión respecto a la matriz  $A$ , regresemos a nuestro problema. Nos faltaba encontrar la matriz  $B$  que mande a la cuarteta canónica en la  $\mathfrak{B}$ . Pero ahora al primer tiro cae el gol: la matriz

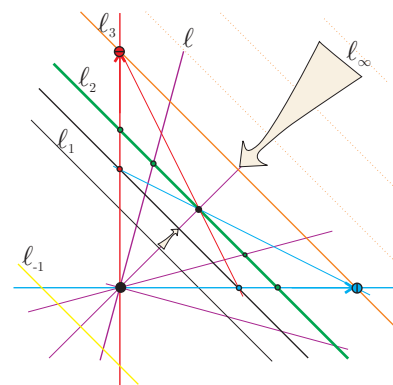
$$B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

cumple que  $B\mathbf{b}_0 = 3\mathbf{b}_0$ .

Para entender mejor el efecto geométrico de lo que hace  $B$  nos conviene partirla en dos movimientos. El primero, que fijando al origen y todas sus líneas (como líneas, no punto a punto), trae, jala, a la línea al infinito hasta la línea  $l_3 : x + y = 3$ , fijando punto a punto a la línea  $l_2$ . Entonces en cada línea  $l$  que pasa por el origen tiene que ser una expansión de  $\mathbf{O}$  a  $l \cap l_2$  y consecuentemente empuja a la línea  $l_1$  hacia  $l_2$  (y expande a cualquier segmento de  $\mathbf{O}$  a  $l_2$  hacia  $l_2$ ). Esta transformación, donde  $\mathbf{O}$  sigue “viendo” exactamente lo mismo, es una suerte de homotecia desde el origen con horizonte en  $l_2$ , y tiene la matriz

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Y la línea que va a cubrir la línea al infinito es  $l_{-1} : x + y = -1$ .



Y después hay que componerla con una simple transformación lineal  $B_2$  que acerca a los dos ejes para llevarlos a las líneas por  $(2, 1)$  y  $(1, 2)$ . (esta transformación ya deja al infinito en su lugar):

$$B = B_2 B_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

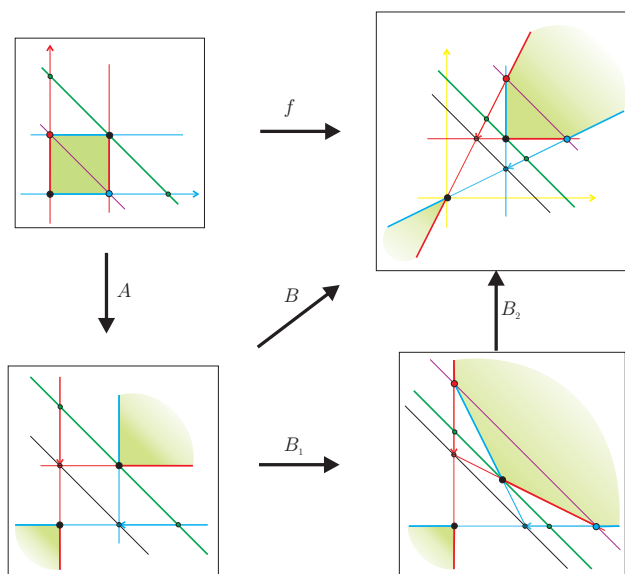
La matriz que buscamos es entonces

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lo cual en coordenadas de la carta canónica, nos da la función

$$f(x, y) = \frac{1}{2x + 2y - 1} (2x + y, x + 2y).$$

En la siguiente figura se persigue a la “loseta” canónica bajo las transformaciones proyectivas que acabamos de usar en el ejemplo.



**EJERCICIO 6.46** Demuestra que si existe  $f \in \mathbf{Pr}(2)$  tal que  $f(\mathbf{a}_i) = \mathbf{q}_i$  para  $i = 0, 1, 2, 3$  para cualquier cuarteta  $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$  de puntos en  $\mathbb{P}^2$  en posición general, donde  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  es una cuarteta fija de puntos en  $\mathbb{P}^2$  en posición general, entonces se sigue la parte de existencia del Teorema 6.9

**EJERCICIO 6.47** Demuestra que si es cierto que dada  $f \in \mathbf{Pr}(2)$  tal que  $f([\mathbf{e}_i]) = [\mathbf{e}_i]$  para  $i = 0, 1, 2, 3$  implica que  $f = \text{id}_{\mathbb{P}^2}$ , entonces se sigue la parte de unicidad del Teorema 6.9.

**EJERCICIO 6.48** Sean  $\mathbf{e}_1 = [1 : 0 : 0]$ ,  $\mathbf{e}_2 = [0 : 1 : 0]$ ,  $\mathbf{e}_3 = [0 : 0 : 1]$  y  $\mathbf{e}_0 = [1 : 1 : 1]$ . Encuentra explícitamente las transformaciones proyectivas que mandan a estos cuatro puntos respectivamente en:

- a)  $[1 : 0 : 0]$ ,  $[0 : 1 : 0]$ ,  $[0 : 0 : 1]$ ,  $[1 : 1 : -1]$ .
- b)  $[0 : 1 : 1]$ ,  $[1 : 0 : 1]$ ,  $[1 : 1 : 0]$ ,  $[1 : 1 : 1]$ .
- c)  $[1 : 2 : 2]$ ,  $[-1 : 1 : 2]$ ,  $[0 : 2 : 1]$ ,  $[-2 : -1 : 3]$ .

**EJERCICIO 6.49** En la carta afín canónica ( $x + y + z = 1$ ) dibuja la imagen de la línea al infinito bajo las transformaciones proyectivas del ejercicio anterior.

**EJERCICIO 6.50** En la carta coordenada canónica ( $z = 1$ ) dibuja la imagen de la línea al infinito bajo las transformaciones proyectivas del Ejercicio 6.48.

#### 6.6.4 Transformaciones afines

Puesto que  $\mathbb{R}^2$  se puede ver de manera canónica dentro de  $\mathbb{P}^2$  como la carta euclidiana distinguida  $((x, y) \mapsto [x : y : 1])$ , es natural preguntarse si los grupos de transformaciones de  $\mathbb{R}^2$  que ya conocemos se pueden ver dentro del grupo de transformaciones proyectivas. La respuesta es muy bonita. Sea  $\ell_\infty = \ell_{[\mathbf{e}_3]}$  la recta al infinito dada por la ecuación  $z = 0$  en  $\mathbb{P}^2$ , y sea  $\mathbf{G}$  el conjunto de transformaciones proyectivas que dejan a la recta al infinito en su lugar (la pueden mover punto a punto pero no como conjunto). Esto es,

$$\mathbf{G} = \{f \in \mathbf{Pr}(2) \mid f(\ell_\infty) = \ell_\infty\}.$$

Entonces  $\mathbf{G}$  es un subgrupo que se identifica naturalmente con el grupo de transformaciones afines  $\mathbf{Af}(2)$ . Es decir, las transformaciones proyectivas que dejan al infinito en el infinito son precisamente las afines (como en el caso de dimensión 1). Demostremoslo.

Sea  $A \in \mathbf{GL}(3)$  una matriz que representa a  $f \in \mathbf{G}$  ( $A$  está bien definida salvo constantes no cero). Puesto que  $[\mathbf{e}_1] = [1 : 0 : 0] \in \ell_\infty$  entonces  $f([\mathbf{e}_1]) = [A\mathbf{e}_1] \in \ell_\infty$ ; lo cual implica que la tercera coordenada de  $A\mathbf{e}_1$ , que es la primera columna de  $A$ , es cero. Análogamente, con  $\mathbf{e}_2$ , se obtiene que la segunda columna de  $A$  tiene la tercera coordenada igual a cero. Si la tercera coordenada de la tercera columna también fuera cero,  $A$  no sería invertible; lo cual implica (multiplicando por la constante adecuada) que podemos suponer que es precisamente 1. Entonces  $A$  tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz deja fijo (como conjunto) al plano canónico  $z = 1$ , pues

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + e \\ cx + dy + f \\ 1 \end{pmatrix},$$

que claramente corresponde (pensando a  $\mathbb{R}^2$  como el plano canónico) a la función de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

Sea  $A'$  la matriz  $2 \times 2$  anterior (el bloque superior izquierdo de  $A$ ), entonces  $\det(A') = \det(A) \neq 0$  y por tanto esta función es una transformación afín.

Inversamente, para cualquier transformación afín de  $\mathbb{R}^2$  se puede construir una matriz de  $3 \times 3$  como arriba (que resulta ser invertible) y la transformación proyectiva correspondiente dejará fija a la recta al infinito (pues manda a  $[e_1]$  y a  $[e_2]$  en puntos de esa recta). Como la recta  $z = 0$  es igual a cualquier otra, hemos demostrado el siguiente teorema.

**Teorema 6.10** *Dada cualquier recta  $\ell$  de  $\mathbb{P}^2$ , hay un isomorfismo de grupos*

$$\mathbf{Af}(2) \simeq \{f \in \mathbf{Pr}(2) \mid f(\ell) = \ell\},$$

*es decir, las transformaciones proyectivas que fijan una recta se puede identificar con las transformaciones afines de la carta afín correspondiente  $\mathbb{P}^2 - \ell$ .*

**EJERCICIO 6.51** Sea  $G$  un grupo de transformaciones de un conjunto  $X$ . Demuestra que para cualquier subconjunto  $Y \subset X$ , el conjunto de transformaciones que fijan a  $Y$ ,

$$G_Y = \{f \in G \mid f(Y) = Y\},$$

es un subgrupo de  $G$ .

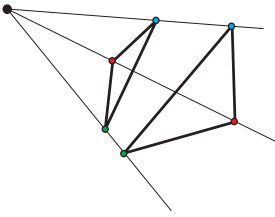
**EJERCICIO 6.52** En la demostración que dimos ¿a qué matrices de  $3 \times 3$  corresponden las transformaciones lineales de  $\mathbb{R}^2$ ?

**EJERCICIO 6.53** Considera la carta coordenada canónica  $\mathbb{A}_z$  definida por  $z = 1$  con coordenadas naturales  $(x, y)$ . ¿Cuáles transformaciones proyectivas del Ejercicio 6.48 se ven como transformaciones afines en esta carta?. Descríbelas geoméricamente.

### 6.6.5 \*Teoremas de Desargues y de Pappus

En esta sección demostramos dos teoremas clásicos que precedieron, como teoría aceptada, a la geometría proyectiva y que entonces la invocan como el hábitat para su planteamiento elegante y natural.

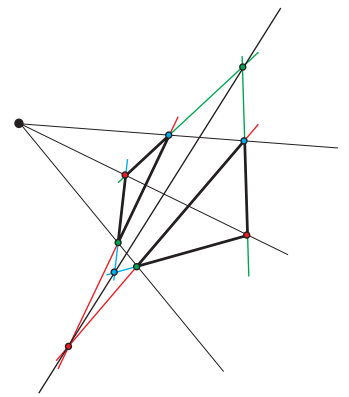




Desargues es considerado el fundador de la geometría proyectiva como estudio sistemático de la “perspectiva”. El teorema que lleva su nombre se refiere a parejas de triángulos en perspectiva. Se dice que dos triángulos *están en perspectiva* si hay una correspondencia entre sus vértices de tal manera que las tres líneas que unen vértices correspondientes son concurrentes. Al punto de concurrencia se le llama el *foco*, y desde él veríamos un solo triángulo (de ahí el nombre de “en perspectiva”).

**Teorema 6.11 (Desargues)** *Si dos triángulos están en perspectiva, entonces los puntos de intersección de sus lados correspondientes son colineales.*

Aunque no hayamos especificado que los dos triángulos viven en el plano proyectivo, el enunciado del teorema en sí lo exige, pues habla de los puntos de intersección como un hecho. El enunciado en el caso euclidiano (recordemos que Desargues no sabía aún del plano proyectivo) debería tener varios apartados por si alguna pareja, o algunas, de lados correspondientes fueran paralelas, y también podría enunciarse para triángulos en perspectiva desde el infinito. De tal manera que, por la posibilidad euclidiana del paralelismo, en términos euclidianos clásicos este teorema se convierte en una colección de enunciados similares con pruebas similares. Desde Desargues, y él sí lo notó, fue un teorema en busca de un contexto amplio y general; lo encontró en la geometría proyectiva.



Otro aspecto interesante del Teorema de Desargues es que si se le piensa en dimensión 3 y no 2 (nótese que en el enunciado nunca especificamos la dimensión), su demostración es bastante fácil pensando, de nuevo, en términos proyectivos (sin excepciones). En el caso en que los triángulos no están en un plano, la hipótesis de que están en perspectiva es que sus lados correspondientes son segmentos en las caras de un cono triangular, y entonces las líneas correspondientes se intersectan por estar en un plano (determinado por un lado del cono). Considérense los dos planos generados por los triángulos y sea  $\ell$  su línea de intersección: estos planos intersectan a cada lado del cono en los lados correspondientes de los triángulos y entonces  $\ell$  los intersecta en su punto de intersección. Así que  $\ell$  es la línea deseada.

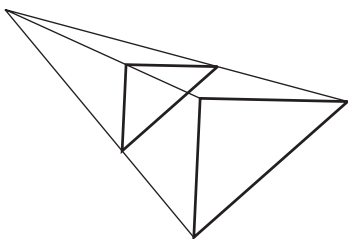
...Dibujo

Faltaría el caso en el que todos los planos que se usaron en el argumento anterior son uno solo, y podría argumentarse por continuidad “levantando” a la tercera dimensión y luego volviendo a proyectar. Pero mejor seguiremos un camino intrínseco que ilustra el juego de la dualidad.

Recordemos el principio de dualidad que nos permite traducir cualquier enunciado o demostración cambiando recta por punto y “estar en” por “pasar por” (o bien usar únicamente el concepto incidencia). El Teorema de Desargues es justo un enunciado sobre rectas y puntos y su relación de incidencia. Más aún, el dual de su hipótesis es

precisamente su conclusión. El dual de la definición de estar en perspectiva es: se dice que dos triángulos están en *perspectiva dual* si hay una correspondencia entre sus lados de tal manera que los tres puntos de intersección de los lados correspondientes son colineales; la recta que los contiene se llama *focal*. De tal modo que lo que Desargues dice es que si dos triángulos están en perspectiva entonces están en perspectiva dual. Lo que demostraremos es su dual.

**Teorema 6.12 (Desargues dual)** *Si dos triángulos en  $\mathbb{P}^2$  están en perspectiva dual entonces están en perspectiva.*



**Demostración.** Ambas condiciones se preservan por transformaciones proyectivas. Por tanto podemos suponer que la recta focal de la perspectiva dual,  $\ell$ , está en el infinito del plano euclidiano. Entonces la hipótesis da dos triángulos cuyos lados son paralelos. Si son del mismo tamaño, están en perspectiva desde un punto al infinito. Si no, hay una homotecia que manda a uno en el otro y están en perspectiva desde el centro de esa homotecia. (Esto último también se puede razonar analíticamente o por semejanza de triángulos, Ejercicio 6.54).  $\square$

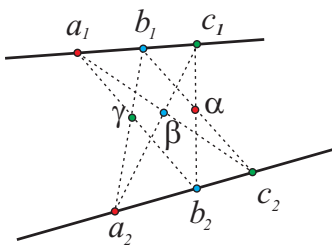
---

**EJERCICIO 6.54** Sean  $T_1$  y  $T_2$  triángulos en  $\mathbb{R}^2$  con vértices  $a_1, b_1, c_1$  y  $a_2, b_2, c_2$  respectivamente, y tales que  $\langle a_1, b_1 \rangle \parallel \langle a_2, b_2 \rangle$ ,  $\langle b_1, c_1 \rangle \parallel \langle b_2, c_2 \rangle$  y  $\langle c_1, a_1 \rangle \parallel \langle c_2, a_2 \rangle$ ; donde  $\langle p, q \rangle$  denota la recta por  $p$  y  $q$ . Demuestra, sin usar transformaciones, que entonces están en perspectiva, es decir, que las líneas  $\langle a_1, a_2 \rangle$ ,  $\langle b_1, b_2 \rangle$  y  $\langle c_1, c_2 \rangle$  son concurrentes

---

**Papus**

En cuanto a su historia, el Teorema de Papus es análogo al de Desargues. Aunque su enunciado es un poco más sofisticado, vivió un buen tiempo como teorema en busca de un contexto amplio; se refiere a los puntos que uno puede construir a partir de dos ternas colineales.



**Teorema 6.13 (Papus)** *Sean  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  seis puntos distintos tales que  $a_1, b_1, c_1$  y  $a_2, b_2, c_2$  son colineales pero en rectas distintas, entonces su terna de Papus*

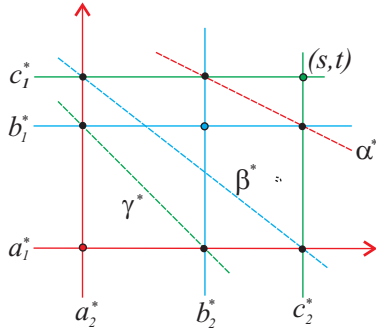
$$\begin{aligned} \alpha &= \langle b_1, c_2 \rangle \cap \langle b_2, c_1 \rangle \\ \beta &= \langle c_1, a_2 \rangle \cap \langle c_2, a_1 \rangle \\ \gamma &= \langle a_1, b_2 \rangle \cap \langle a_2, b_1 \rangle \end{aligned}$$

*es colineal.*

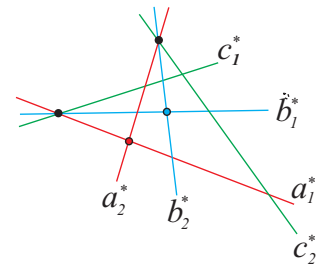
Antes de demostrarlo, notemos que su enunciado es netamente proyectivo. Su conclusión es sobre puntos de intersección de rectas, y si nos pusiéramos euclidianos, sería muy engorroso enunciar los distintos casos especiales de paralelismo tanto en la hipótesis como en la conclusión.

**Demostración.** Veamos el caso en que ninguno de los puntos es la intersección de las dos rectas. Consideremos la configuración dual; es decir, sean  $\alpha_i^*, \beta_i^*, \gamma_i^*$  las rectas polares de  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  respectivamente, para  $i = 1, 2$ . Se tiene entonces que cada terna de rectas es concurrente.

Mediante una transformación proyectiva, y quizá renombrando los puntos, podemos mandar a



$$\begin{aligned} \alpha_1^* \cap \beta_1^* &\mapsto [1 : 0 : 0] \\ \alpha_2^* \cap \beta_2^* &\mapsto [0 : 1 : 0] \\ \alpha_1^* \cap \alpha_2^* &\mapsto [0 : 0 : 1] \\ \beta_1^* \cap \beta_2^* &\mapsto [1 : 1 : 1]. \end{aligned}$$



Para entonces trabajar en el  $\mathbb{R}^2$  de la carta canónica. Como  $c_1^*$  y  $c_2^*$  no son la recta al infinito, quedan determinadas por su punto de intersección,  $(s, t) = c_1^* \cap c_2^*$ .

Entonces las rectas polares a la terna de Pappus tienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} \gamma^* &: & x + y &= 1 \\ \beta^* &: & tx + sy &= ts \\ \alpha^* &: & (t - 1)x + (s - 1)y &= ts - 1, \end{aligned}$$

que indican claramente que son rectas concurrentes, y por tanto sus puntos polares son colineales.

El caso faltante, y posibles degeneraciones de las hipótesis, se dejan al lector.  $\square$

---

**EJERCICIO 6.55** Demuestra el Teorema de Pappus cuando uno de los puntos es la intersección de las dos rectas.

**EJERCICIO 6.56** ¿Se puede relajar el teorema a que los seis puntos no sean necesariamente distintos? ¿A qué casos?

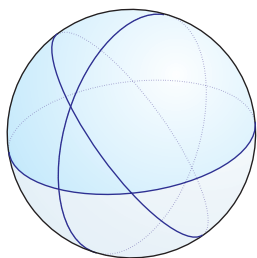
---

## 6.7 El plano proyectivo rígido

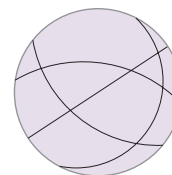
Hasta ahora sólo hemos considerado el plano proyectivo “*holgado*”, con su estructura de incidencia (las rectas como subconjuntos distinguidos) y las transformaciones que la preservan (las proyectividades). Pero también tiene nociones métricas naturales (distancia y ángulos) y con ellas se convierte en el plano proyectivo “*rígido*” también

conocido como “*plano elíptico*” o podríamos decir que es el “*plano esférico*”; está más en la idea general de “geometría” que tenían los griegos y entonces sí es un contraejemplo de la necesidad del Quinto Postulado: cumple todos los axiomas de Euclides excepto el Quinto.

Como habíamos anticipado en la Sección 6.5.3, las nociones de distancia y ángulo en  $\mathbb{P}^2$  se heredan naturalmente de la esfera  $\mathbb{S}^2$ . Pues ahí vimos que  $\mathbb{S}^2$  cubre 2 a 1 a  $\mathbb{P}^2$  (este último se obtiene identificando antipodas en  $\mathbb{S}^2$ ) y localmente (es decir, en pequeños pedazos) son idénticos.



Quizá el modelo del proyectivo rígido “más preciso” (aunque ésta sea una cuestión subjetiva) es pensarlo como media esfera (de cascarón no de hule, y cualquier media esfera) con la salvedad de que puntos opuestos de su frontera son el mismo y que entonces las distancias hay que medirlas a veces por “fuera”. En una hoja de papel, conviene usar el modelo estereográfico del disco (pg.



279) pues tiene la gracia de preservar ángulos (aunque no distancias); y, por supuesto, puntos antipodas en la frontera se identifican.

Más formalmente, sean  $[\mathbf{x}]$  y  $[\mathbf{y}]$  dos puntos en  $\mathbb{P}^2$ . Como rectas en  $\mathbb{R}^3$  generan un plano (euclidiano) y en él estas dos rectas forman dos ángulos; definimos su *distancia*  $d([\mathbf{x}], [\mathbf{y}])$  como el mínimo de ellos. De tal manera que

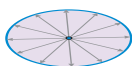
$$0 \leq d([\mathbf{x}], [\mathbf{y}]) \leq \pi/2 ;$$

la igualdad con 0 se da sólo cuando  $[\mathbf{x}] = [\mathbf{y}]$ , y la cota máxima se alcanza cuando las rectas  $[\mathbf{x}]$  y  $[\mathbf{y}]$  son perpendiculares, es decir, cuando  $[\mathbf{y}] \in \ell_{[\mathbf{x}]}$ . Si se quiere una fórmula más analítica, podemos definir

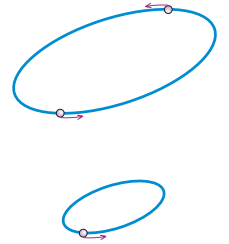
$$d([\mathbf{x}], [\mathbf{y}]) := \arccos \left( \left| \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}| |\mathbf{y}|} \right| \right). \tag{6.15}$$

Las curvas en  $\mathbb{P}^2$  cuyo recorrido logra las distancias (las de distancia mínima) o “*geodésicas*” son justo las rectas proyectivas (que corresponden a planos por  $\mathbf{0}$  en  $\mathbb{R}^3$ , o bien a los círculos máximos en  $\mathbb{S}^2$ ). Todas las rectas proyectivas tienen longitud  $\pi$  (o “*circunferencia*” podría decirse, pues son topológicamente círculos) y, por eso, lo más alejados que pueden estar dos puntos en una de ellas es la mitad cuando ambos segmentos de uno a otro miden lo mismo.

La recta polar de un punto  $[\mathbf{x}]$ ,  $\ell_{[\mathbf{x}]}$ , consta entonces de todos los puntos a distancia máxima de  $[\mathbf{x}]$ , los más alejados de él; y para cada uno de ellos,  $[\mathbf{y}] \in \ell_{[\mathbf{x}]}$  digamos, se tienen justo dos geodésicas para llegar de  $[\mathbf{x}]$  a él, que juntas forman una recta. E inversamente, para cada recta  $\ell$  hay un único punto, su polar, que está a distancia  $\pi/2$  de todos sus puntos, y se llega a él saliendo *ortogonalmente* hacia cualquiera de los dos lados y desde cualquier punto de  $\ell$  ... pero nos estamos adelantando.



La noción de ángulo en  $\mathbb{P}^2$  también se copia de  $\mathbb{S}^2$ . Notemos que si bien las rectas de  $\mathbb{P}^2$  corresponden biunívocamente a los puntos de  $\mathbb{P}^2$ , tenemos una correspondencia natural entre las rectas orientadas de  $\mathbb{P}^2$  y los puntos de la esfera  $\mathbb{S}^2$ . Pues la *orientación* de una recta en  $\mathbb{P}^2$  (una partícula que viaja inercialmente en ella, puede pensarse) se levanta naturalmente a una orientación de su círculo máximo correspondiente (dos partículas antípoda persiguiéndose inercial e inútilmente); y, como vimos en la Sección 5.2.1, a esta recta esférica orientada le corresponde un punto polar en  $\mathbb{S}^2$ . Los *ángulos* entre rectas orientadas en  $\mathbb{P}^2$  se miden entonces como sus correspondientes en  $\mathbb{S}^2$  (por la distancia de sus puntos polares).



Cada uno de los teoremas o resultados métricos que demostramos para la esfera (en las Secciones ?? y 5.2.3) se cumplen en el plano esférico (o proyectivo rígido); la diferencia esencial es que aquí las rectas se intersectan en un único punto y se pierde la redundancia que siempre acarreaban las parejas antípoda en  $\mathbb{S}^2$ . No vale la pena reescribirlos.

---

**EJERCICIO 6.57** Argumenta por qué la definición (6.15) corresponde a la descripción previa de distancia en  $\mathbb{P}^2$ .

**EJERCICIO 6.58** ¿Cuántos triángulos definen tres rectas en  $\mathbb{P}^2$ ?

**EJERCICIO 6.59** ¿Cuál es la fórmula del área de los triángulos en  $\mathbb{P}^2$ ?

**EJERCICIO 6.60** Da un ejemplo de tres puntos en  $\mathbb{P}^2$  tales que las tres rectas que pasan por ellos forman sólo triángulos iguales. ¿En qué ángulos se intersectan estas rectas?

---

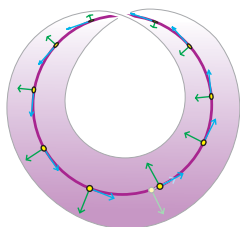
### 6.7.1 Las isometrías de $\mathbb{P}^2$ ( $\mathbf{SO}(3)$ )

Podemos diferenciar al plano proyectivo holgado del rígido de manera “kleiniana”, por el grupo de transformaciones que implícitamente se están considerando. Mientras que en el primero está uno pensando en el grupo de todas las proyectividades ( $\mathbf{Pr}(2)$ ), en el segundo sólo se toma en cuenta al subgrupo de transformaciones proyectivas que preservan la métrica, es decir, a las isometrías.

Puesto que la métrica de  $\mathbb{P}^2$  se derivó de la de  $\mathbb{S}^2$ , entonces las transformaciones lineales que fijan a  $\mathbb{S}^2$  y preservan su métrica (es decir, las ortogonales  $\mathbf{O}(3)$ ) son las que dan lugar a isometrías de  $\mathbb{P}^2$ .

Notemos que la función antípoda  $\alpha \in \mathbf{O}(3)$  da lugar a la identidad en  $\mathbb{P}^2$  y es la única que lo hace además de la identidad (Ejercicio 6.62). Entonces la proyectivización de  $f$  y de  $\alpha \circ f$  son iguales para cualquier  $f \in \mathbf{O}(3)$ , y sólo una de ellas está en  $\mathbf{SO}(3)$  (preserva orientación de  $\mathbb{S}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ ) pues la función antípoda  $\alpha$  invierte la orientación de  $\mathbb{S}^2$ . Por lo tanto, las isometrías de  $\mathbb{P}^2$  están en correspondencia biunívoca con  $\mathbf{SO}(3)$ : los movimientos orientados de  $\mathbb{S}^2$ .

Esto implica (por el Teorema 5.14) que todas las isometrías de  $\mathbb{P}^2$  son rotaciones. Efectivamente, al ir rotando en un punto,  $[\mathbf{u}]$  digamos, su recta polar se va trasladando la distancia correspondiente al ángulo (como en la esfera). Pero al llegar a la rotación de  $\pi$  en  $[\mathbf{u}]$  su recta polar  $\ell_{[\mathbf{u}]}$  ya regresó a su lugar punto a punto. En ese momento tenemos la reflexión en  $\ell_{[\mathbf{u}]}$  (su espejo); localmente, en una



vecindad de la recta, equivale a empujar una banda de Moebius dentro de sí misma una vuelta: el corazón regresa a su lugar pero los “dos” lados (tanto de la banda como del corazón y vistos localmente) se han intercambiado. Y a partir de  $\pi$ , seguir rotando en  $[\mathbf{u}]$  parece un paso en  $\ell_{[\mathbf{u}]}$  hasta dar una segunda vuelta y llegar a la identidad (rotar  $2\pi$ ). Así, los cuatro tipos de isometrías que teníamos en el plano euclidiano (y que, con algo más, reaparecerán



en el plano hiperbólico) se vuelven lo mismo en el plano proyectivo rígido. En él sólo hay un tipo de isometrías, aunque se pueden ver desde distintos puntos de vista.

Notemos del párrafo anterior que hay tantas reflexiones en  $\mathbb{P}^2$  como rectas; es decir, hay justo “un  $\mathbb{P}^2$  de reflexiones” en  $\mathbf{SO}(3)$ . Y que muy cerca de cada reflexión están los pasos chicos en ambas posibles direcciones de su recta; este  $\mathbb{P}^2$  de reflexiones se va “engordando” mientras consideramos pasos hasta un cierto tamaño creciente. Nótese también que los pasos de una longitud fija forman una esfera  $\mathbb{S}^2$ , pues corresponden a las rectas orientadas y que todos los pasos de longitud  $\pi$  son la identidad. Esta descripción remite a la de  $\mathbb{P}^2$  a partir —alejándose— de un  $\mathbb{P}^1$ . Pero por el momento sólo nos interesa establecer que  $\mathbf{SO}(3)$  se puede pensar como un espacio —hay una noción natural de cercanía en él (también en los otros grupos de transformaciones que hemos considerado)— y que este espacio se siente cerca de entender mejor...




---

**EJERCICIO 6.61** Demuestra directamente que toda isometría de  $\mathbb{P}^2$  es una rotación siguiendo las ideas de la demostración del Teorema 5.14. Verás que algunos argumentos se simplifican y que la demostración se limpia.

**EJERCICIO 6.62** Con base en el Teorema de 4 en 4, demuestra que si la proyectivización de una transformación en  $\mathbf{O}(3)$  es la identidad, entonces es la identidad o la función antípoda.

---

### 6.7.2 \*El homeomorfismo de $\mathbf{SO}(3)$ con $\mathbb{P}^3$

Consideremos de nuevo la acción natural de  $\mathbf{SO}(3)$  en la esfera  $\mathbb{S}^2$  (sus movimientos rígidos). Recordemos de la Sección 5.3.1 que cada elemento de  $\mathbf{SO}(3)$  es la rotación de un cierto ángulo  $\alpha$  con eje en un vector unitario  $\mathbf{u} \in \mathbb{S}^2$ , donde  $\alpha$  se mide de acuerdo con la orientación positiva definida en la superficie de la esfera. Además, a

tal rotación la habíamos denotado  $\rho_{\alpha, \mathbf{u}}$  y se tiene que  $\rho_{\alpha, \mathbf{u}} = \rho_{-\alpha, -\mathbf{u}}$ , esto es, que al rotar positivamente en un punto de la esfera, se está rotando negativamente en su antípoda —es por esto que al intentar abrir un frasco de mermelada no importa con qué mano se tome la tapa, el movimiento (o el pujido) va para el mismo lado—.

Con esta notación, hemos coordinatizado con las “coordenadas polares” de  $\mathbb{R}^3$  a los elementos del grupo  $\mathbf{SO}(3)$ . Un punto  $\mathbf{x}$  en  $\mathbb{R}^3$ , tiene como *coordenadas polares* a un número no negativo  $\alpha$  (con  $\alpha = |\mathbf{x}|$ ) y a un vector unitario  $\mathbf{u} \in \mathbb{S}^2$  ( $\mathbf{u} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$  cuando  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  y puede ser cualquiera para  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ), de tal manera que  $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{u}$ . Entonces, nuestra notación es una función natural

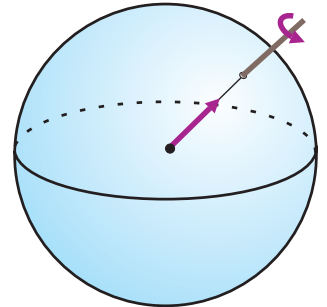
$$\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbf{SO}(3),$$

que en coordenadas polares se expresa como

$$\alpha, \mathbf{u} \mapsto \rho_{\alpha, \mathbf{u}}$$

y en coordenadas cartesianas tiene la fórmula

$$\mathbf{x} \mapsto \begin{cases} \text{id}_{\mathbb{S}^2} & \text{si } \mathbf{x} = \mathbf{0} \\ \rho_{|\mathbf{x}|, \mathbf{x}/|\mathbf{x}|} & \text{si } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}. \end{cases}$$



Nótese que esta función es “continua” en el origen, pues rotar cero grados en cualquier eje es la identidad y rotar con un ángulo muy pequeño está cercano a ella.

Esta función es “periódica”. En la esfera de radio  $2\pi$  es la constante identidad y a partir de ahí “vuelve a empezar”. Pero incluso ahí ya tenemos “redundancia”: ya le hemos “dado dos vueltas a  $\mathbf{SO}(3)$ ”, pues si llamamos  $B_\pi$  a la bola sólida con centro en el origen y radio  $\pi$ , es decir,

$$B_\pi = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| \leq \pi \},$$

entonces  $\rho(B_\pi) = \mathbf{SO}(3)$ . Con la bola sólida  $B_\pi$  ya cubrimos todas las rotaciones, pues una rotación de ángulo mayor que  $\pi$  se expresa en la antípoda con uno menor. Así que

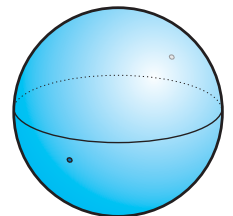
$$\rho : B_\pi \rightarrow \mathbf{SO}(3)$$

es sobre y además es 1 a 1 excepto en la frontera, donde

$$\rho_{\pi, \mathbf{u}} = \rho_{\pi, -\mathbf{u}};$$

pues rotar  $\pi$  en una dirección es igual a rotar  $\pi$  en la contraria; nótese que corresponden a las reflexiones de  $\mathbb{P}^2$  que vimos en la sección anterior.

Así que  $\mathbf{SO}(3)$  se puede pensar como la bola sólida  $B_\pi$  identificando puntos antípodos en la frontera, pues estos dan lugar a la misma rotación (por un ángulo  $\pi$ ). Por la analogía de que  $\mathbb{P}^2$  se obtiene topológicamente de un disco identificando puntos antípodos en la frontera, este espacio debe ser el espacio proyectivo  $\mathbb{P}^3$ .



En algunos ejercicios hemos dejado al lector el problema de generalizar a 3 y más dimensiones los principios y las definiciones básicas de la geometría proyectiva; por cuestión de completez, en los párrafos que siguen esbozamos las ideas fundamentales.

### Rudimentos de $\mathbb{P}^3$

Se define  $\mathbb{P}^3$  como el espacio cuyos puntos corresponden a las líneas que pasan por el origen en  $\mathbb{R}^4$ . Si denotamos con  $[\mathbf{x}]$  a la línea por el origen determinada por  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ , con  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  ( $[\mathbf{x}] := \{t\mathbf{x} \mid t \in \mathbb{R}\}$ ), entonces

$$\mathbb{P}^3 := \{ [\mathbf{x}] \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \text{ con } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \}$$

y tiene nociones naturales de línea (correspondiendo a planos por el origen en  $\mathbb{R}^4$ ) y plano (las líneas en subespacios de dimensión 3). Se tiene además que cualquier par de planos se intersectan en una línea y una línea y un plano (que no la contenga) se intersectan siempre en un punto.

El espacio proyectivo se puede considerar con dos grupos naturales de transformaciones: el “holgado” que es con la *proyektivización* de todas las transformaciones lineales de  $\mathbb{R}^4$  (es decir, considerando su acción en las líneas por el origen), y el “rígido” donde sólo se considera la proyectivización de las transformaciones ortogonales  $\mathbf{O}(4)$  que preservan el producto interior y, por tanto, los ángulos que dan la distancia natural de  $\mathbb{P}^3$ . En el espacio proyectivo rígido, todos los planos son copias de  $\mathbb{P}^2$  rígido y las líneas o geodésicas miden  $\pi$ .

Por su parte, también tenemos la esfera unitaria de dimensión 3 que consta de todos los vectores unitarios en  $\mathbb{R}^4$ ,

$$\mathbb{S}^3 := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid |\mathbf{x}| = 1 \},$$

y es tal que cada recta por el origen en  $\mathbb{R}^4$  la intersecta en dos puntos antípodos. Así que de nuevo hay un cubrimiento natural 2 a 1 de  $\mathbb{S}^3$  sobre  $\mathbb{P}^3$ . Un *casquete* o *hemisferio* de  $\mathbb{S}^3$  (el subconjunto donde alguna de sus coordenadas es no negativa) se puede identificar biyectivamente con una bola sólida en  $\mathbb{R}^3$ , y entonces se puede ver que el espacio proyectivo  $\mathbb{P}^3$  es (topológicamente) una bola sólida con puntos antípodos en la frontera identificados. Esto es lo que necesitábamos para concluir que  $\mathbf{SO}(3)$  es topológicamente  $\mathbb{P}^3$  (se dice que son *homeomorfos*, “con la misma forma”), pero vale la pena hacer la identificación con más precisión.

### Geometría de $\mathbf{SO}(3)$ .

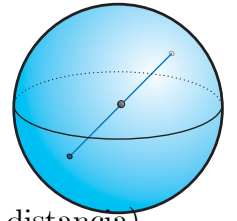
Puesto que  $\mathbf{SO}(3)$  tiene estructura de grupo, veremos que tiene una “geometría” natural y que, al hacer las identificaciones con cuidado, ésta corresponde a la de  $\mathbb{S}^3$ .

Notemos primero que  $\mathbf{SO}(3)$  tiene muchos subgrupos “circulares”: dado  $\mathbf{u} \in \mathbb{S}^2$ , todas las rotaciones con eje en  $\mathbf{u}$  (que coinciden con las de su antípoda  $-\mathbf{u}$ ),



$$S_u := \{\rho_{\alpha, u}\},$$

forman un subgrupo que se comporta como el círculo  $S^1$  con la suma de ángulos (isomorfo a  $SO(2)$ ). Estos subgrupos son precisamente los diámetros al pensar a  $SO(3)$  como la bola  $B_\pi$  con identificación de antípodas en la frontera. En estos círculos hay una distancia natural, la angular; y a partir de ella podremos extrapolar a una métrica (noción de distancia) en todo  $SO(3)$  haciéndolos geodésicos.



Como cada elemento de  $SO(3)$  está en uno de estos círculos (único si no es la identidad), entonces su distancia a  $id_{S^2}$  debe ser el ángulo de rotación, o proporcional a él. Para que la distancia corresponda a la natural de  $\mathbb{P}^3$ , hay que tomar la mitad de los ángulos y definir, para  $0 \leq \alpha \leq \pi$ , que

$$d(\rho_{\alpha, u}, id) = \alpha/2. \tag{6.16}$$

De aquí, aprovechando la estructura de grupo que nos da las transformaciones “multiplicar por un elemento constante”, esparcimos la distancia definiendo para cualquier par  $f, g \in SO(3)$ :

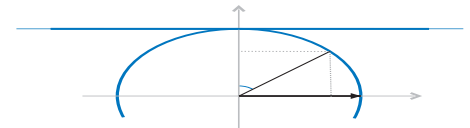
$$d(f, g) = d(f \circ g^{-1}, id). \tag{6.17}$$

Pues al multiplicar un subgrupo circular (el que pasa por  $f \circ g^{-1}$ ) por un elemento que no esté en él ( $g$ ) nos da nuevas geodésicas (una que pasa por  $f$  y  $g$ ).

Ahora sí, de las muchas maneras de identificar una bola sólida ( $B_\pi$ ) con un casquete de  $S^3$  (por ejemplo la proyección estereográfica, proyecciones desde otros puntos o la ortogonal), la que geoméricamente nos conviene es “untarla radialmente”: mandar a los círculos  $S_u$  isométricamente. Esto es, después de reescalar a  $B_\pi$  a la mitad, mandar a los diámetros por longitud de arco, que en coordenadas polares se escribe

$$\begin{aligned} \mu : B_\pi &\rightarrow S^3 \\ \mu(\alpha, \mathbf{u}) &= (\cos(\alpha/2), \text{sen}(\alpha/2) \mathbf{u}). \end{aligned}$$

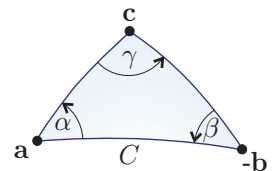
Donde estamos pensando a  $\mathbb{R}^4$  como una pareja ordenada de un número real y un vector de  $\mathbb{R}^3$  (la identificación natural  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ ); o bien añadirle una “coordenada cero” a un vector de  $\mathbb{R}^3$ , y estamos dibujando a esta “coordenada cero” verticalmente.



Veremos ahora que esta identificación  $\mu$  induce una isometría de  $SO(3)$  con  $\mathbb{P}^3$ . Para esto, supongamos que  $f$  y  $g$  en  $SO(3)$  son

$$f = \rho_{2\alpha, \mathbf{a}} \quad \text{y} \quad g = \rho_{2\beta, \mathbf{b}}, \quad \text{con } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in S^2 \text{ y } 0 < \alpha, \beta \leq \pi/2.$$

Por (6.17) y (6.16), debemos medir el ángulo de  $f \circ g^{-1}$ . Puesto que  $g^{-1}$  es la rotación de  $2\beta$  en el antípoda  $-\mathbf{b}$ , por el Lema 5.15 tenemos que  $f \circ g^{-1} = \rho_{-2\gamma, \mathbf{c}} = \rho_{2\gamma, -\mathbf{c}}$ , donde  $\gamma$  y  $\mathbf{c}$  son el tercer ángulo y vértice del triángulo con vértices  $\mathbf{a}$  y  $-\mathbf{b}$  y ángulos correspondientes  $\alpha$  y  $\beta$ . Sea  $C = d_{S^2}(\mathbf{a}, -\mathbf{b})$  lo que mide el lado opuesto a  $\gamma$ ; por la Ley Esférica de Cosenos (Lema ??) se tiene que



$$\cos \gamma = \cos C \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta - \cos \alpha \cos \beta.$$

Por el otro lado, la distancia en  $\mathbb{S}^3$ , que es la angular, se mide con el producto punto y se tiene

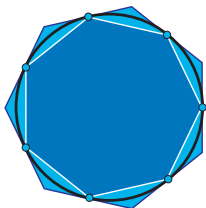
$$\begin{aligned} \mu(2\alpha, \mathbf{a}) \cdot \mu(2\beta, \mathbf{b}) &= (\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha \mathbf{a}) \cdot (\cos \beta, \operatorname{sen} \beta \mathbf{b}) \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta (\mathbf{a} \cdot (-\mathbf{b})) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos C = \cos(\pi - \gamma). \end{aligned}$$

Tenemos entonces que  $\gamma$  (la mitad del ángulo de rotación de  $f \circ g^{-1}$  medido en el triángulo) y el ángulo entre los vectores  $\mu(2\alpha, \mathbf{a})$  y  $\mu(2\beta, \mathbf{b})$  en  $\mathbb{S}^3$  son complementarios. Pero en ambos casos, el menor de ellos es el que mide la distancia deseada: si  $\gamma > \pi/2$  entonces  $d(f, g) = \pi - \gamma$  (hay que considerarlo como rotación en la antípoda), y la distancia en  $\mathbb{P}^3$  es el ángulo entre las rectas  $[\mu(2\alpha, \mathbf{a})]$  y  $[\mu(2\beta, \mathbf{b})]$  que es  $\leq \pi/2$ . Así que  $\mathbf{SO}(3)$  y  $\mathbb{P}^3$  son métricamente equivalentes o, dicho de otra manera,  $\mathbb{P}^3$  tiene estructura de grupo compatible con su métrica natural.

Resulta que también  $\mathbb{S}^3$  tiene estructura de grupo que se “levanta” de la de  $\mathbf{SO}(3)$ ; así como  $\mathbf{SO}(2)$  se puede pensar como los complejos unitarios,  $\mathbb{S}^3$  resulta ser los cuaterniones unitarios.<sup>4</sup>

### 6.7.3 \*Los politopos regulares de $\mathbb{R}^4$

Una observación interesante, debida a Coxeter en [5], que no podemos dejar pasar pues ya se hizo casi todo el trabajo, es que los subgrupos finitos de  $\mathbf{SO}(3)$  dan lugar a subconjuntos finitos muy homogéneos en  $\mathbb{S}^3$  al tomar su doble cubierta, y que de ellos se pueden construir los análogos de los sólidos platónicos en dimensión 4. Antes de verlo, considérese el ejemplo en dimensión 2 de  $n$  puntos equidistribuidos en  $\mathbb{S}^1$  (un subgrupo finito de  $\mathbf{SO}(2)$ ); al tomar la intersección de sus hemiplanos tangentes o bien su *casco convexo* (i.e., lo que “atrapan” entre ellos o el conjunto de sus combinaciones afines positivas), se obtienen polígonos regulares de  $n$  lados: respectivamente *circunscrito* o *inscrita* en  $\mathbb{S}^1$ . Es fácil ver que los sólidos platónicos se pueden definir análogamente con subconjuntos finitos de  $\mathbb{R}^3$ ; tienen esferas inscrita y circunscrita.



Ahora sí. Del grupo de simetrías orientadas del dodecaedro (que habíamos llamado 235 en la Sección 5.4.1) con 60 elementos se obtiene, al tomar su preimagen bajo la proyección  $\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3 = \mathbf{SO}(3)$ , un conjunto de 120 puntos en  $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$  con mucha simetría. Tan es así, que al tomar sus hiperplanos (de dimensión 3) tangentes a la esfera e intersectar sus hemiespacios, se obtiene uno de los “politopos regulares”

<sup>4</sup>Para seguir este camino ver [3].

que generalizan a los sólidos platónicos. Está formado por 120 dodecaedros (que habíamos denotado con  $\{\{5, 3\}\}$  en la Sección 5.4.3) pegados por sus caras y con 3 de ellos alrededor de cada arista; su símbolo de Schlafli es entonces  $\{\{5, 3, 3\}\}$ . Su dual se obtiene tomando el *casco convexo* de los 120 puntos: consta de 600 tetraedros con cinco alrededor de cada arista; es el  $\{\{3, 3, 5\}\}$ . En la literatura en inglés se les conoce como el “120-cell” y el “600-cell” respectivamente; Coxeter también les llama *panales* (“honeycombs”); en [2] se le llamó “dodecaédromo” al  $\{\{5, 3, 3\}\}$ .

Con el grupo de simetrías orientadas del tetraedro, el 233, y de cualquiera de las dos maneras (por tangentes o casco convexo), se obtiene el  $\{\{3, 4, 3\}\}$  hecho de octaedros ( $\{\{3, 4\}\}$ ) y de a 3 por arista; resulta ser “autodual”. El hipercubo  $\{\{4, 3, 3\}\}$  se obtiene por tangentes a partir del grupo 222 con las rotaciones de  $\pi$  en los tres ejes; y su dual  $\{\{3, 3, 4\}\}$  es el casco convexo.

Falta un politopo regular, el  $\{\{3, 3, 3\}\}$  análogo del triángulo y el tetraedro con 5 vértices equidistantes. Y sobra un grupo importante: el del cubo. No todos, poliedros y grupos finitos, caen en este esquema... pero aquí lo dejamos, pues habíamos prometido no meternos demasiado en la dimensión 4.

## 6.8 \*Despliegue de realidad virtual

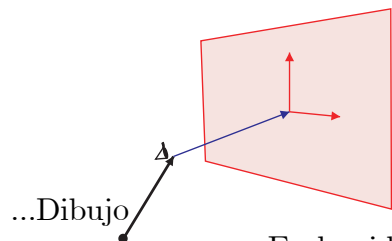
La “realidad virtual” —esos juegos donde nos paseamos por un mundo imaginario, que está ahí, transcurriendo ante nuestros ojos en la pantalla de una computadora— consta, al menos, de tres grandes elementos. Primero, el escenario arquitectónico, la base de datos que lo define como una serie de objetos en tres dimensiones con sus posiciones, cualidades, texturas, etc. Segundo, que puede ser vacío, las reglas internas y los procesos que lo hacen cambiante y que permiten interactuar tanto a sus seres virtuales como al jugador. Y tercero, el procedimiento por el cual las porciones relevantes de estos datos se despliegan coherentemente en la pantalla para hacernos sentir que nos estamos moviendo, actuando y viendo lo que ocurre ahí. El problema que nos ocupa es este último, el de “ver” en una realidad virtual: desplegarla en la pantalla de una computadora; y, como veremos, es básicamente el problema del pintor con el que empezamos el capítulo pero hecho numérico y continuo. Además, su planteamiento teórico se aplica a otras muchas situaciones, como lo es parte del mecanismo básico de la visión humana.

### La cámara

...Dibujo

Suponiendo que tenemos un “mundo virtual” definido en  $\mathbb{R}^3$ , ¿qué ve un punto que se pasea por él? Primero hay que definir que es eso de “ver”: pensemos que deambulamos en ese mundo metidos dentro de una de esas cortinas negras de las cámaras daguerrotípicas de hace dos siglos, pero con una ventanita al frente (la pantalla de la computadora). *Ver* es asomarse el mundo desde esa ventana, o, lo que es lo mismo, proyectar al mundo externo en ella (la pantalla) que es parte

de un plano; y esta proyección se hace desde un punto (el ojo hipotético del sujeto ante la pantalla, o debajo de la cortina): es, entonces, el problema del pintor con que arrancamos el capítulo. Pero tenemos aún más; ese plano está coordinatizado. La pantalla de una computadora consta de pixeles determinados por dos coordenadas y a ellos habrá que asignárseles un color. Nótese, además, que también un lienzo en blanco, la película (o el detector digital) en una cámara o bien la retina de un ojo (suponiéndola plana para incluirnos en la discusión) tienen sus coordenadas locales establecidas. Entonces hay que pensar que en ese plano hay un origen y dos vectores direccionales distinguidos,  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$  digamos, que lo generan y coordinatizan.



Además, está el punto desde el cual se proyecta, llamémoslo el *foco*, que tiene una posición bien definida  $\mathbf{u}_4 \in \mathbb{R}^3$ ; y para acabar de definir el plano y la proyección, tomemos a  $\mathbf{u}_3$  como el vector que va del foco al origen del plano pantalla. Estos cuatro vectores definen una “cámara”.

En la vida real (cámaras, telescopios, ojos, etc.)  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$  son de tamaño fijo. En un ojo,  $\mathbf{u}_3$  también lo es y apunta hacia atrás del foco (la retina está detrás del foco que es simulado por un sistema óptico). En una cámara de cine —donde incluimos la fotográfica—  $\mathbf{u}_3$  también apunta hacia atrás pero es variable: su tamaño es la *distancia focal*. Al crecer se tiene el efecto de *zoom*, se hace telefoto; y al decrecer tiende al gran angular pues más de la escena entra a la parte sensible de la pantalla (al acercarse a una ventana aumenta la porción de mundo que se ve en ella).

Por su parte, tanto en la computadora como en el caso del pintor,  $\mathbf{u}_3$  apunta hacia adelante, hacia la escena relevante. En la computadora,  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$  son las coordenadas de la pantalla y  $\mathbf{u}_3$  representa la distancia del usuario promedio a ella; aunque al hacerla crecer se logra el efecto de acercamiento o magnificación (sin que el usuario se tenga que mover de su lugar). Este efecto también se puede lograr en la computadora disminuyendo los vectores  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$  que definen las coordenadas de la pantalla (y seguir pensando que el usuario sigue en su silla). Nótese, por último, que cambiar  $\mathbf{u}_4$  corresponde justamente a desplazar la cámara, paralela a sí misma, dentro del mundo; da la posibilidad de “pasearse” por él. Y aquí sí, ni modo, se trivializa para el pintor y su caballete fijo.

En la *cámara canónica*, cuando  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$  es la base canónica y  $\mathbf{u}_4$  es el origen, conviene pensar a las dos primeras coordenadas, la  $x$  y la  $y$ , como las de un plano vertical y a la coordenada  $z$  como la profundidad (las  $z$  positivas son las que interesan cuando pensamos en el lienzo o en la pantalla de la computadora, y las negativas para la película o la retina). Entonces la función *proyección* es muy sencilla de expresar:

$$\begin{aligned} \text{“ } \varphi & : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ ”} \\ \varphi(x, y, z) & = (x/z, y/z). \end{aligned}$$

Pues la intersección de la recta por el origen (el foco) y el punto “real”  $(x, y, z)$  con la pantalla (que es el plano  $z = 1$ ) es  $(x/z, y/z, 1)$ , pero de éste sus primeras dos

coordenadas son las de la pantalla. El problema general se resuelve a partir de éste.

Dada una cámara cualquiera  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$  y un punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , su imagen se obtiene aplicando  $\varphi$  a las coordenadas con que se expresa  $\mathbf{x}$  en las coordenadas afines del sistema de referencia dado por la cámara. Y el problema numérico se reduce a encontrar tales coordenadas; hay que expresar el mundo en ese sistema y dividir a las dos primeras coordenadas entre la tercera.

### 6.8.1 Proyecciones del espacio proyectivo

Aunque en principio hemos resuelto el problema, veamos que al proyectivizar éste adquiere más consistencia y la solución numérica se hace más fácil en la práctica.

Primero tenemos que pensar en  $\mathbb{R}^3$  como la carta canónica de  $\mathbb{P}^3$ , que analíticamente es añadir un 1 a las tres coordenadas y pensar a estas como homogéneas. Geométricamente, se añade entonces un plano proyectivo al infinito con coordenadas homogéneas  $[x : y : z : 0]$ , que, si llamamos  $w$  a la nueva coordenada homogénea, está determinado por la ecuación  $w = 0$ . Un punto  $[x : y : z : w] \in \mathbb{P}^3$  que no tenga su última coordenada cero representa al punto  $(x/w, y/w, z/w) \in \mathbb{R}^3$ .

En términos de definir una realidad virtual, pensar en  $\mathbb{R}^3$  como parte del espacio proyectivo añadiéndole un plano proyectivo al infinito es importante, pues permite agregar un *horizonte*; un fondo en el infinito, una textura fija definida por las posibles direcciones. Parecería que hay una contradicción con que en el espacio proyectivo  $\mathbb{P}^3$  se llega al mismo punto al infinito viajando en direcciones opuestas. Pero no hay tal contradicción. En efecto es el mismo punto, pero cada plano tiene localmente dos lados y a estos puede asignárseles colores diferentes.

La información de una cámara equivale a la matriz de  $4 \times 4$

$$C = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde los datos reales son la matriz superior de  $3 \times 4$  y a la cual se añade un renglón con 0's y un 1 al final. Análogamente a la Sección 6.6.4, esta matriz representa en  $\mathbb{P}^3$  a la transformación afín de  $\mathbb{R}^3$  que manda a la cámara canónica en la dada, pues obsérvese que manda al vector  $(x, y, z, 1)$  en

$$x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2 + z\mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4.$$

Lo que se necesita entonces, para dar numéricamente a la proyección determinada por la cámara  $C$ , es encontrar su matriz inversa y luego aplicar la proyección canónica; es decir, se tendrá la fórmula

$$\varphi(C^{-1}\mathbf{x}).$$

Parecería muy difícil sacar la matriz inversa de una de  $4 \times 4$ , pero en la práctica se puede hacer en forma muy sencilla. Nótese primero que la identidad  $I$  corresponde a la cámara canónica que es donde, para simplificar, se puede empezar un recorrido

por el mundo virtual. Y segundo, que los movimientos que producen las teclas corresponden a matrices muy sencillas. Por ejemplo, las flechas izquierda y derecha, o los correspondientes movimientos del ratón, son rotaciones en el plano  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3$  (voltar hacia arriba o hacia abajo son rotaciones en el plano  $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ ) cuyas matrices son muy simples y sus inversas se obtienen casi trivialmente. Así que si tenemos una cámara dada  $\mathbf{C}$ , un teclado de estos cambiará a  $\mathbf{C}^{-1}$  multiplicándola (por el lado adecuado: ¿cuál es éste?) por la correspondiente matriz de rotación. De la misma manera, moverse hacia adelante es cambiar  $\mathbf{u}_4$  por  $\mathbf{u}_4 + t\mathbf{u}_3$ , cuya matriz correspondiente y su inversa son muy sencillas. Entonces, al ir apretando las teclas, los coeficientes de la matriz importante para la proyección, que es  $\mathbf{C}^{-1}$ , van cambiando poco a poco y de manera fácil de obtener.

# Capítulo 7

## Cónicas III (proyectivas)

En este capítulo retomamos la motivación que surgió de las cónicas en  $\mathbb{R}^2$  para estudiar el “infinito” y que nos llevó a definir la geometría proyectiva. Ya tenemos la herramienta para entender y formalizar el comportamiento de las cónicas en el infinito, pero con el mismo esfuerzo se puede hacer una buena parte de la teoría para curvas algebraicas en general, y así lo haremos. Después clasificaremos las cónicas proyectivamente y esbozaremos qué debe pasar en dimensiones más altas.

### 7.1 Curvas algebraicas en $\mathbb{P}^2$

Lo que nos interesa principalmente es la completación proyectiva de las curvas cuadráticas, es decir, entender el comportamiento de las cónicas al infinito, pero hay ciertas partes de la teoría que se pueden generalizar fácilmente, y vale la pena hacerlo para no repetir *verbatim* lo que vimos en el Capítulo 4. Ahí definimos una curva cuadrática como los ceros de un polinomio cuadrático en dos variables  $x$  y  $y$ . Es claro que esto puede generalizarse a cualquier polinomio y eso haremos.

#### 7.1.1 Polinomios y su homogeneización

Un polinomio en una variable  $x$  es una expresión

$$P(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i.$$

Su *grado* es la máxima  $i$  para la cual  $a_i \neq 0$ , y cada sumando es un *monomio*. Un *monomio* en dos variables  $x$  y  $y$  es una expresión de la forma

$$a_{i,j} x^i y^j,$$

donde  $a_{ij}$  es un número real; su *grado* es  $i + j$ ; y un polinomio en dos variables  $x$  y  $y$  es una suma finita de monomios. Así que se puede expresar como una sumatoria

$$P(x, y) = \sum_{i,j=0}^k a_{i,j} x^i y^j, \quad (7.1)$$

donde quizá muchos de los *coeficientes*  $a_{ij}$  son 0. El *grado* de un polinomio en dos variables es el máximo grado de sus monomios (que no necesariamente coincide con el límite superior  $k$  de la sumatoria anterior, que se puso ahí sólo para enfatizar que hay un número finito de sumandos).

Los polinomios en dos variables (como los de una) tienen una estructura algebraica muy rica. Se pueden sumar (y con la suma forman un grupo) y se pueden multiplicar (aunque no forman un grupo multiplicativo pues no tienen inversos). En este sentido, son como los números enteros,  $\mathbb{Z}$ , su unidad multiplicativa es el polinomio constante 1, y por esto se le conoce como el *anillo* de los polinomios.

Vale la pena declarar de una vez por todas que cuando digamos “polinomio” sin especificar el apellido “constante” nos referimos a un polinomio de “a de veras”, de grado al menos 1. Los de grado 0 (las constantes distintas de cero) y el de grado  $-1$  (la constante 0 a la que hay que ponerle este grado para que las cosas funcionen) no se entrometerán tanto en el texto con esta convención.

Como en el caso de los polinomios en una variable, los polinomios en dos variables se pueden considerar también como funciones con valores reales (al evaluar sustituyendo valores fijos de las variables), pero en este caso su dominio es  $\mathbb{R}^2$ . Una *curva algebraica* en  $\mathbb{R}^2$  es el conjunto de ceros de un polinomio  $P$ , es decir

$$C(P) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid P(x, y) = 0\}.$$

El *grado* de una curva algebraica es el grado de su polinomio asociado. Ya hemos clasificado las curvas algebraicas de grados 1 y 2 (rectas y cónicas). El problema natural de entender y clasificar todas las curvas algebraicas ha dado lugar a lo que ahora se conoce como **geometría algebraica** que claramente requiere un estudio más profundo del álgebra subyacente. Por el momento, veamos una relación muy sencilla entre el álgebra y la geometría.

Supongamos que un polinomio  $P$  es el producto de dos polinomios  $P_1$  y  $P_2$ . Es decir, que  $P$  se obtiene al multiplicar, con las reglas de los números reales, las expresiones de  $P_1$  y de  $P_2$  (todos los monomios de uno contra los del otro y luego agrupando). Esto se escribe

$$P(x, y) = P_1(x, y) P_2(x, y).$$

Entonces es cierto que para cualquier valor de las variables  $x, y$  esta igualdad se cumple. En particular se obtiene que

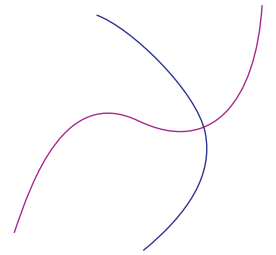
$$P(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P_1(x, y) = 0 \quad \text{o} \quad P_2(x, y) = 0,$$



y por lo tanto que

$$C(P) = C(P_1) \cup C(P_2).$$

Hemos demostrado que si  $P$  es *reducible* (es decir, si  $P$  es un producto de polinomios, de grado  $\geq 1$ , recuérdese nuestra convención), entonces su curva algebraica asociada es unión de curvas algebraicas. Esto explica en general por qué cuando clasificamos curvas cuadráticas nos aparecían a veces parejas de rectas; surgen de la multiplicación de dos polinomios lineales. Es natural definir entonces que una curva algebraica es *irreducible* si su polinomio asociado lo es, es decir, si no se puede expresar como un producto de polinomios (de grado al menos 1, insistimos por última vez).



Es muy claro que también tenemos polinomios en tres (o  $n$ ) variables; que tienen su grado, su suma y multiplicación y que sus ceros definen subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$  (o, respectivamente, de  $\mathbb{R}^n$ ) a los que se les llama *superficies algebraicas* (o bien, *hiper-superficies algebraicas*). Por el momento, nos interesa definir un polinomio de tres variables a partir de uno de dos.

Dado  $P$  como en (7.1), su *homogeneización*, o bien su *polinomio homogéneo asociado*, es

$$\tilde{P}(x, y, z) = \sum_{i,j=0}^k a_{i,j} x^i y^j z^{(n-i-j)},$$

donde  $n$  es el grado de  $P$ .

El nombre viene de que, en general, se dice que un polinomio es *homogéneo* de grado  $n$  si todos sus monomios son de grado  $n$ . Y la receta para obtener el polinomio homogéneo asociado es muy fácil: cada monomio se multiplica por la potencia de  $z$  necesaria para convertirlo en monomio de grado  $n$ . De su polinomio homogéneo se puede recuperar el polinomio original al hacer  $z = 1$ ; es decir, se tiene que

$$P(x, y) = \tilde{P}(x, y, 1). \quad (7.2)$$

De tal manera que la asociación  $P \mapsto \tilde{P}$  es inyectiva de los polinomios de grado  $n$  en dos variables a los homogéneos de grado  $n$  en tres variables. Y un polinomio homogéneo en tres variables viene de uno en dos si y sólo si  $z$  no aparece en todos sus monomios, es decir, si y sólo si el polinomio  $z$  no lo divide. Esto se da pues a los monomios de grado  $n$  de  $P$  (que los hay) no se les multiplica por nada ( $z^0 = 1$ ).

---

**EJERCICIO 7.1** Argumenta geoméricamente que los polinomios  $x^2 + y^2 - 1$ ,  $x^2 - y^2 - 1$  y  $x^2 - y$  son irreducibles.

**EJERCICIO 7.2** ¿Cuáles son los polinomios homogéneos asociados a los anteriores? ¿Puedes describir las superficies que definen en  $\mathbb{R}^3$ ? Describe cuáles son sus intersecciones con los planos horizontales  $z = \text{cte}$ ; y luego qué pasa cuando  $z$  varía.

**EJERCICIO 7.3** Demuestra que la superficie algebraica definida por el polinomio homogéneo asociado a un polinomio lineal en dos variables es un plano por el origen.

### 7.1.2 Conos y curvas algebraicas proyectivas

Veamos ahora cómo es la superficie algebraica definida en  $\mathbb{R}^3$  por la homogeneización de un polinomio en dos variables.

Hay que explicitar primero lo que dijimos antes por ensimita. Dado cualquier polinomio en tres variables  $P(x, y, z)$ , define un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ ,

$$C(P) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid P(x, y, z) = 0\},$$

llamado su *superficie asociada*. Y a estos subconjuntos se les conoce como las *superficies algebraicas* de  $\mathbb{R}^3$ . Un ejemplo que ya conocemos bien son los planos, ya que están definidos por polinomios lineales. Otro ejemplo que ya hemos estudiado es la esfera unitaria  $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$ ; o bien, cualquier esfera, pues estará definida por un polinomio de la forma  $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - d^2$  (ver más ejemplos en los siguientes ejercicios).

Supongamos ahora que  $\tilde{P}(x, y, z)$  es un **polinomio homogéneo en tres variables**. Se cumple entonces que  $\mathbf{0} \in C(\tilde{P})$ , pues como cada monomio tiene al menos una variable, se anulará en el origen; esto es,  $\tilde{P}(0, 0, 0) = 0$ . Pero además, la propiedad de ser homogéneo nos da que para cualquier  $t \in \mathbb{R}$  se cumple que

$$\tilde{P}(tx, ty, tz) = t^n \tilde{P}(x, y, z), \quad (7.3)$$

donde  $n$  es el grado de  $\tilde{P}$ ; pues en cada monomio se asocian las  $t$  correspondientes a las tres variables para darnos una  $t^n$  que se factoriza en toda la sumatoria. Esta propiedad es exclusiva de los polinomios homogéneos, pues en los otros las  $t$  de los monomios adquieren diferentes exponentes y es imposible factorizarlos más allá de los pedazos homogéneos de un grado dado.

Esta propiedad tiene una implicación geométrica importantísima:

$C(\tilde{P})$  es unión de rectas por el origen.

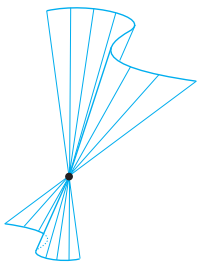
Pues (7.3) implica claramente que

$$\tilde{P}(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow \tilde{P}(tx, ty, tz) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Conviene introducir la notación de un vector variable  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  con la obvia  $\tilde{P}(\mathbf{x}) = \tilde{P}(x, y, z)$ , para poder concluir que si  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  (nada más para estar de acuerdo con nuestra convención del capítulo anterior), entonces

$$\mathbf{x} \in C(\tilde{P}) \Leftrightarrow [\mathbf{x}] \subset C(\tilde{P}),$$

donde  $[\mathbf{x}]$  está pensado como recta por el origen en  $\mathbb{R}^3$ . Pero si lo pensamos como punto en  $\mathbb{P}^2$ , nos lleva a la definición básica de este capítulo.



**Definición 7.1.1** Una *curva algebraica* de grado  $n$  ( $\geq 1$ ) en el plano proyectivo es un subconjunto definido como

$$\tilde{C}(\tilde{P}) = \left\{ [\mathbf{x}] \in \mathbb{P}^2 \mid \tilde{P}(\mathbf{x}) = 0 \right\},$$

donde  $\tilde{P}(x, y, z) = \tilde{P}(\mathbf{x})$  es un polinomio homogéneo de grado  $n$ . Si además  $\tilde{P}$  es la homogeneización de un polinomio  $P(x, y)$ , entonces a  $\tilde{C}(\tilde{P})$  se le llama la *cerradura proyectiva* de la curva algebraica  $C(P) \subset \mathbb{R}^2$ .

Puesto que  $C(\tilde{P}) \subset \mathbb{R}^3$  es unión de rectas por el origen, se le llama *cono*. Y esta misma razón nos permite pensarlo como un conjunto bien definido de puntos en  $\mathbb{P}^2$ , que denotamos  $\tilde{C}(\tilde{P})$ . En el caso que  $\tilde{P}$  se obtiene de un polinomio en dos variables  $P(x, y)$  como su homogeneización, entonces (como demostraremos a continuación) este cono consiste exactamente de las rectas que pasan por el origen y los puntos de la curva  $C(P)$  dibujada en el plano coordenado canónico  $z = 1$  (es el *cono sobre  $C(P)$* ); y apenas incluye unas cuantas rectas horizontales más que corresponden a cómo se aproxima la curva al infinito.

**Teorema 7.1** Sea  $P(x, y)$  un polinomio de grado  $n$ . Entonces su curva algebraica y su cerradura proyectiva coinciden en  $\mathbb{R}^2$  (pensado dentro de  $\mathbb{P}^2$  como la carta coordenada canónica  $z = 1$ ), es decir,

$$C(P) = \tilde{C}(\tilde{P}) \cap \mathbb{R}^2$$

y además, la cerradura proyectiva tiene a lo sumo  $n$  puntos en el infinito, es decir

$$\#(\tilde{C}(\tilde{P}) - C(P)) \leq n.$$

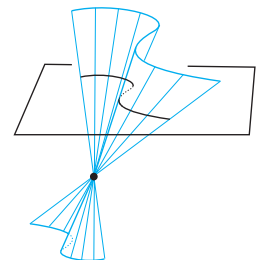
**Demostración.** Sea  $\Pi_1$  el plano  $z = 1$  en  $\mathbb{R}^3$ , e identificamos sus puntos con los de  $\mathbb{R}^2$  como siempre (mediante la correspondencia  $(x, y, 1) \leftrightarrow (x, y)$ ).

Demostremos primero que

$$C(P) = C(\tilde{P}) \cap \Pi_1. \tag{7.4}$$

Puesto que  $P(x, y) = \tilde{P}(x, y, 1)$  (recuérdese (7.2)), se tiene que

$$P(x, y) = 0 \iff \tilde{P}(x, y, 1) = 0.$$



La expresión de la izquierda dice que  $(x, y) \in C(P)$  y la de la derecha que su punto correspondiente en  $\Pi_1$ ,  $(x, y, 1)$ , está en  $C(\tilde{P})$ . Lo cual demuestra (7.4).

Consideremos ahora el primer enunciado del teorema. Si  $[\mathbf{x}] \in \tilde{C}(\tilde{P}) \cap \mathbb{R}^2$ , entonces está representado por un vector  $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tal que  $z \neq 0$  y que además está en el cono  $C(\tilde{P})$ . Pero entonces  $(x/z, y/z, 1)$  también está en  $C(\tilde{P})$ , y por (7.4), está en la curva original  $C(P)$ ; por tanto  $\tilde{C}(\tilde{P}) \cap \mathbb{R}^2 \subset C(P)$ . El otro lado es más fácil, si  $(x, y) \in C(P)$ , entonces  $\tilde{P}(x, y, 1) = P(x, y) = 0$  y por definición  $[x : y : 1] \in \tilde{C}(\tilde{P})$ .

Entonces, lo único nuevo que puede tener  $\tilde{C}(\tilde{P})$  (que no tenía  $C(P)$ ) está en el infinito, es decir, puntos de la forma  $[x : y : 0]$ . Para estudiarlos, consideremos el plano  $\Pi_0$  paralelo a  $\Pi_1$  por el origen, dado por la ecuación  $z = 0$ . Nos interesa ahora describir el conjunto

$$C(\tilde{P}) \cap \Pi_0.$$

Sabemos que consiste de rectas por el origen. ¿Cuáles? Para saberlo, hay que sustituir  $z = 0$  en el polinomio  $\tilde{P}$ : esto anula todos los monomios de  $P$  excepto los de grado  $n$ , que son los únicos que no multiplicamos por  $z$  (o una potencia mayor de  $z$ ) para obtener  $\tilde{P}$ .

Ésta es la parte *dominante* o *de grado máximo* del polinomio  $P$ , llamémosle  $P_n$ . Es decir,

$$P_n(x, y) := \tilde{P}(x, y, 0).$$

Podemos identificar a  $C(\tilde{P}) \cap \Pi_0$  con  $C(P_n)$ , y ello por la correspondencia obvia  $(x, y, 0) \leftrightarrow (x, y)$ . Como  $P_n$  es homogéneo de grado  $n$  (aunque ahora de dos variables) se corrobora que  $C(P_n)$  consiste de rectas por el origen en un plano. Nos falta ver que son a lo más  $n$  para completar el teorema.

Supongamos primero que el polinomio  $y$  no divide a  $P_n$ , es decir, que no todos los monomios de  $P_n$  tienen a  $y$  (o, lo que es lo mismo, que el coeficiente de  $x^n$  es distinto de cero). Esto implica que la recta  $y = 0$  no está en  $C(P_n)$  pues  $P_n(1, 0) \neq 0$  (es justo el coeficiente de  $x^n$ ). Se tiene entonces que todas las rectas de  $C(P_n)$  intersectan a la recta  $y = 1$  en un punto que además las determina. Estos puntos se encuentran al resolver la ecuación en  $x$

$$P_n(x, 1) = 0.$$

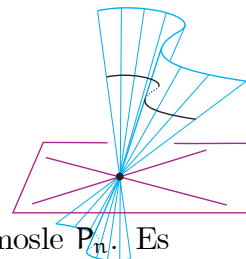
Como  $P_n(x, 1)$  es un polinomio de grado  $n$  en una variable, tiene a lo más  $n$  raíces reales, y hemos terminado.

Nos falta el caso en que  $y$  divide a  $P_n$ , pero es igual de fácil. Ya tenemos una recta de  $C(P_n)$ , pues  $P_n(x, 0) = 0$ . Al factorizar  $y$  nos queda un polinomio de grado menor que  $n$  y sus soluciones, como en el caso anterior, serán a lo más  $n - 1$ .  $\square$

**Observación.** Aunque hemos usado los polinomios homogéneos para definir las curvas algebraicas proyectivas, estos **no** definen funciones de  $\mathbb{P}^2$ ; hay que resistir la tentación pues, a diferencia del caso euclidiano, no tienen valores bien definidos excepto sus ceros. Nótese que el valor de un polinomio homogéneo en tres variables cambia dentro de una línea por el origen en  $\mathbb{R}^3$  esencialmente como lo hace  $t^n$ ; ahí no es constante y por tanto no se le puede asignar un valor al punto proyectivo correspondiente excepto cuando es cero.

### Ejemplos

**Líneas rectas** Sabemos que cualquier línea recta de  $\mathbb{R}^2$  está definida por un polinomio lineal  $ax + by + c$ . Su homogeneización  $ax + by + cz$  define precisamente su



Dibujo...

completación proyectiva que intersecta a la línea al infinito en el punto  $[-b : a : 0]$ . De tal manera que lo que hemos hecho incluye lo que ya sabíamos del Capítulo 6 sobre los polinomios lineales y las rectas.

**Cónicas** Sea

$$P(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Sabemos bien que  $C(P)$  es el **círculo** unitario  $\mathbb{S}^1$ . Su polinomio homogéneo asociado es

$$\tilde{P}(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2,$$

que define el cono desde el origen del círculo unitario dibujado en el plano  $z = 1$ . ...Dibujo  
Esto se puede ver desde la óptica de la demostración anterior, o bien observando que al variar  $z$  se obtienen círculos centrados en el origen con radio  $|z|$ . La parte dominante de  $P$  es  $P_2(x, y) = x^2 + y^2$ , cuya única solución es  $(0, 0)$ , la que no vale proyectivamente. De tal manera que su completación proyectiva es ella misma,  $\mathbb{S}^1$  no tiene nada al infinito; lo cual es bastante obvio, pero corrobora que nuestro método es bueno: no añade nada si no hay necesidad.

Consideremos ahora a la **hipérbola**; sea

$$P(x, y) = x^2 - y^2 - 1,$$

cuyo polinomio homogéneo asociado es

$$\tilde{P}(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2.$$

En el infinito, cuando  $z = 0$ , tenemos la parte dominante

...Dibujo

$$P_2(x, y) = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y),$$

que define dos rectas, las asíntotas. De tal manera que a la completación proyectiva de la hipérbola,  $\tilde{C}(\tilde{P})$ , se le añaden en el infinito precisamente los puntos correspondientes a sus asíntotas. El cono  $C(\tilde{P})$  es de nuevo un cono circular pero ahora horizontal que intersecta al plano  $z = 0$  en las asíntotas. Para ver esto, obsérvese que su intersección con el plano  $x = 1$  es un círculo unitario; o en general, que sus intersecciones con los planos  $x = cte$  son círculos que crecen linealmente (la coordenada  $x$  desempeña ahora el papel que tenía la coordenada  $z$  en el caso anterior). Pensando en el plano proyectivo, la hipérbola se ve como círculo en la carta coordenada  $x = 1$ . Proyectivamente es igual al círculo.

Veamos por último a la **parábola** definida por el polinomio

$$P(x, y) = x^2 - 2y, \tag{7.5}$$

cuyo polinomio homogéneo asociado es

$$\tilde{P}(x, y, z) = x^2 - 2zy. \tag{7.6}$$

Su parte dominante es  $P_2(x, y) = x^2$ , cuya única solución es la recta  $x = 0$  (el eje  $y$ ). Dibujo... Así que, como era de esperarse, la parábola intersecta al infinito en un solo punto: el correspondiente a su eje. En este caso, el cono  $C(\tilde{P})$  vuelve a ser un cono circular, pero ahora “descansa” sobre el plano  $z = 0$ ; es decir, lo toca únicamente en una línea. También contiene al eje  $z$ , y los planos donde se intersecta en un círculo tienen la ecuación  $y + z = k$ , con  $k$  constante (ver Ejercicio 7.4).

Obsérvese que en este caso el cono  $C(\tilde{P})$  es tangente al plano  $z = 0$ , lo cual quiere decir que la línea al infinito es tangente a la cónica proyectiva  $\tilde{C}(\tilde{P})$ . Esto es, las parábolas son tangentes a la línea al infinito y la tocan en un punto único.

### El Teorema de Bézout (descripción)

Ya con algunos ejemplos concretos en la cabeza, esbochemos algunas consecuencias del Teorema 7.1.

Primero, como ya habíamos visto, los únicos polinomios homogéneos que no son la homogeneización de un polinomio en dos variables son aquellos divisibles por  $z$ ; y que entonces tienen a la recta al infinito  $z = 0$  como componente. Pero la recta al infinito no tiene nada de especial dentro del plano proyectivo. Así que una curva algebraica proyectiva o bien contiene una recta dada (como componente), o bien la intersecta en un número finito de puntos y este número es a lo más el grado de la curva. Hemos visto ya tres ejemplos donde este número varía entre 0 y el grado de la curva. Si hay menos puntos de intersección que el grado es porque algún polinomio no tuvo todas sus raíces potenciales; algunas de ellas fueron complejas, y esto es porque los números reales no son “algebraicamente cerrados”.

Los números complejos sí son algebraicamente cerrados, es decir, cualquier polinomio (en una variable) tiene tantas raíces como su grado.<sup>1</sup> En el siglo XIX se desarrolló su teoría a la par que explotaba la geometría. Las dos ideas se lograron juntar dando lugar a lo que ahora se conoce como geometría algebraica. En ella se siguen (y de ella surgen) las ideas de construir una geometría proyectiva con coordenadas homogéneas y básicamente las mismas definiciones que hemos dado, pero sobre el campo de los números complejos. Y en ese contexto, sí es cierto lo que se intuye, si dos curvas algebraicas no tienen componentes comunes, entonces se intersectan en tantos puntos (contados adecuadamente con multiplicidad) como el producto de sus grados. A esto se le conoce como el Teorema de Bézout, pero rebasa el nivel de este libro; que quede ahí como motivación.

---

**EJERCICIO 7.4** Demuestra que la intersección del cono  $C(\tilde{P})$  de la parábola, donde  $\tilde{P}(x, y) = x^2 - 2y$ , con el plano  $y + z = k$  (con  $k$  constante) es un círculo, y da una parametrización isométrica de él. ¿Cuál es el radio de ese círculo?

---

<sup>1</sup>Ver Apéndice.

**EJERCICIO 7.5** Considera la familia de polinomios  $P_k(x, y) = x^2 - y^2 - k$ , donde  $k$  es una constante real. Demuestra que las curvas algebraicas de todos estos polinomios intersectan a la recta al infinito en los mismos dos puntos: ¿cuáles son? ¿Puedes dibujar qué tipos de curvas definen en  $\mathbb{R}^2$  cuando  $k$  es negativa y cuando  $k$  es positiva? ¿Cuándo es chica o grande?

**EJERCICIO 7.6** Considera la familia de polinomios  $P_k(x, y) = x^3 - xy^2 - k$ , donde  $k$  es una constante real. Demuestra que las curvas algebraicas de todos estos polinomios intersectan a la recta al infinito en los mismos tres puntos: ¿cuáles son? ¿Puedes dibujar, a grandes rasgos, qué tipos de curvas definen en  $\mathbb{R}^2$  cuando  $k$  es negativa y cuando  $k$  es positiva? Para esto, puedes encontrar los sectores de  $\mathbb{R}^2$  donde el polinomio  $P_0(x, y)$  es positivo o negativo.

### 7.1.3 Equivalencia proyectiva

Así como definimos la equivalencia de curvas cuadráticas en  $\mathbb{R}^2$  usando el grupo afín, para las curvas algebraicas proyectivas tenemos que usar el grupo de transformaciones proyectivas. La equivalencia geométrica puede muy bien definirse en general para subconjuntos.

Dados dos subconjuntos  $C$  y  $C'$  del plano proyectivo, se dice que son *equivalentes*, y lo escribimos  $C \sim C'$ , si existe  $f \in \mathbf{Pr}(2)$  tal que  $f(C') = C$ , *i.e.*, si son  $\mathbf{Pr}(2)$ -equivalentes como figuras. Así, por ejemplo, todos los cuadrángulos (cuatro puntos en posición general) son equivalentes, o por dualidad, cuatro rectas sin tercias concurrentes lo son. Es fácil ver que ésta es una relación de equivalencia (ver Ejercicio 7.7).

Uno de los problemas que dan lugar al desarrollo de la geometría algebraica es la clasificación de curvas algebraicas, entendida como la descripción o enumeración de sus clases de equivalencia. Como la herramienta para definir las o trabajarlas son los polinomios, es necesario definir la equivalencia de polinomios homogéneos.

Sean  $P(x, y, z)$  y  $Q(x, y, z)$  dos polinomios homogéneos. Se dice que son *proyektivamente equivalentes*, o simplemente *equivalentes*, si existen  $t \neq 0$  y una transformación lineal  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tales que

$$Q = t(P \circ f).$$

Puesto que  $f$  se escribe en coordenadas como  $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_3(\mathbf{x}))$  donde cada  $f_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) es una función lineal de la forma  $f_i(x, y, z) = a_i x + b_i y + c_i z$ , entonces  $P \circ f$  se obtiene sustituyendo estos polinomios lineales en vez de sus tres variables y claramente resulta un nuevo polinomio homogéneo y del mismo grado. Así que la noción de equivalencia está bien definida y sólo hace equivalentes a polinomios de un mismo grado.

Por ejemplo, si  $P(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$  y  $Q(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$  son los polinomios que vienen del círculo y la hipérbola respectivamente, entonces para ver

que son equivalentes tomemos  $f(x, y, z) = (z, y, x)$  y  $t = -1$ , pues entonces

$$\begin{aligned} t(P \circ f)(x, y, z) &= -1(P(f(x, y, z))) \\ &= -P(z, y, x) = -(z^2 + y^2 - x^2) = Q(x, y, z). \end{aligned}$$

**Lema 7.2** Sean  $P(x, y, z)$  y  $Q(x, y, z)$  dos polinomios homogéneos equivalentes. Entonces sus curvas algebraicas proyectivas  $\tilde{C}(P)$  y  $\tilde{C}(Q)$  son equivalentes.

**Demostración.** Por hipótesis tenemos  $t \neq 0$  y una transformación lineal  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tales que

$$Q = t(P \circ f).$$

Abusando de la notación, pensamos que  $f$  también es función de  $\mathbb{P}^2$  en sí mismo con la fórmula  $f([\mathbf{x}]) = [f(\mathbf{x})]$ . Demostraremos que  $f(\tilde{C}(Q)) = \tilde{C}(P)$ .

Supongamos primero que  $[\mathbf{x}] \in \tilde{C}(Q)$ , entonces  $Q(\mathbf{x}) = 0$ . Para ver si  $f([\mathbf{x}]) = [f(\mathbf{x})] \in \tilde{C}(P)$ , tenemos que evaluar a  $P$  en  $f(\mathbf{x})$ :

$$P(f(\mathbf{x})) = (P \circ f)(\mathbf{x}) = t^{-1}Q(\mathbf{x}) = 0.$$

Por lo tanto  $f([\mathbf{x}]) \in \tilde{C}(P)$  y concluimos que  $f(\tilde{C}(Q)) \subset \tilde{C}(P)$ .

Supongamos ahora que  $[\mathbf{y}] \in \tilde{C}(P)$ , *i.e.* que  $P(\mathbf{y}) = 0$ ; para ver que  $[\mathbf{y}] \in f(\tilde{C}(Q))$  debemos encontrar  $[\mathbf{x}] \in \tilde{C}(Q)$  tal que  $f([\mathbf{x}]) = [\mathbf{y}]$ . Para esto, como  $f$  es transformación, tiene una inversa y podemos declarar  $\mathbf{x} := f^{-1}(\mathbf{y})$ . Como  $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$  pues es un punto en  $\mathbb{P}^2$  y  $f^{-1}$  es una transformación,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  y  $[\mathbf{x}] \in \mathbb{P}^2$  está bien definido. Nos falta ver que  $[\mathbf{x}]$  está en  $\tilde{C}(Q)$ , y para esto hay que evaluar

$$Q(\mathbf{x}) = t(P \circ f)(f^{-1}(\mathbf{y})) = tP(\mathbf{y}) = 0.$$

Por lo tanto  $\tilde{C}(P) \subset f(\tilde{C}(Q))$  y queda demostrado el lema.  $\square$

Sería muy bonito que el lema tuviera inverso, que fuera un teorema “si y sólo si”. Pero no es estrictamente cierto. Por ejemplo, si  $P$  fuera el cuadrado de un polinomio y  $Q$  el cubo, definen la misma curva pero no son equivalentes. También tenemos el problema de que los reales no son algebraicamente cerrados. Por ejemplo, en  $\mathbb{P}^1$  el polinomio homogéneo  $x^2 + y^2$  define el vacío (su única solución real es  $(0, 0)$ , que proyectivamente no vale), así que el producto  $(x^2 + y^2)(x + y)$  y el polinomio homogéneo lineal  $x + y$  definen al mismo punto  $[1 : -1]$  pero no son proyectivamente equivalentes ni potencias de un mismo polinomio. Lo que sí es cierto a grandes rasgos es que, sobre los complejos, si dos polinomios definen la misma “curva” entonces, salvo constantes, son potencias de algún otro. Éste es un teorema famoso conocido como el “Nullstellensatz” que habla sobre los ceros de polinomios. De nuevo, rebasa el ámbito de este libro. Pero no nos desanimemos, en ciertos casos (el cuadrático y el lineal) sí daremos la demostración pero hay que desarrollar más la teoría geométrica.



---

**EJERCICIO 7.7** Demuestra que la equivalencia proyectiva de subconjuntos es una relación de equivalencia.

**EJERCICIO 7.8** Demuestra que la equivalencia de polinomios es una relación de equivalencia.

**EJERCICIO 7.9** Demuestra que la hipérbola  $x^2 - y^2 - 1$  es proyectivamente equivalente al círculo  $x^2 + y^2 - 1$ .

**EJERCICIO 7.10** Demuestra que hay una única clase de equivalencia de rectas.

---

## 7.2 Formas cuadráticas

Basta de generalidades. Concentrémonos en el caso de las curvas cuadráticas o cónicas. Una curva cuadrática en  $\mathbb{R}^2$  está determinada por un polinomio de segundo grado que podemos expresar como

$$P(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f.$$

(Nótese que añadimos un 2 a los términos lineales, a diferencia del Capítulo 4, pues en un momento, al proyectivizar, se comportarán como términos mixtos con la nueva variable.) Su homogeneización es

$$\tilde{P}(x, y, z) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2.$$

Si tomamos un vector variable  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ , entonces podemos simplificar la notación como en el Capítulo 4. Este polinomio se escribe

$$\tilde{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot A \mathbf{x},$$

donde  $A$  es la matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix},$$

pues (y aquí aparece la importancia de haber añadido 2 en los términos mixtos),

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\top A \mathbf{x} &= (x, y, z) \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= (x, y, z) \begin{pmatrix} ax + by + dz \\ bx + cy + ez \\ dx + ey + fz \end{pmatrix} \\ &= x(ax + by + dz) + y(bx + cy + ez) + z(dx + ey + fz) \\ &= \tilde{P}(x, y, z). \end{aligned}$$

Llamaremos *forma cuadrática* a un polinomio homogéneo de grado 2. Por lo que acabamos de ver, la forma cuadrática general se escribe como

$$P(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x} \quad \text{con} \quad A = A^\top; \quad (7.7)$$

y la única posibilidad de que no sea la homogeneización de un polinomio cuadrático en dos variables es que tenga la forma  $2dxz + 2eyz + z^2 = z(2dx + 2ey + z)$ , cuya curva es un par de rectas y siendo una de ellas la del infinito. Así que conviene considerar el caso de una curva cuadrática proyectiva definida por una forma cuadrática en tres variables como en (7.7), donde le hemos quitado ya la tilde a  $P$  para simplificar nuestra notación.

La matriz simétrica  $A$  que define una forma cuadrática es el paquete que lleva toda su información: los coeficientes. Veamos ahora cómo se traduce la equivalencia de polinomios en las matrices simétricas que los determinan. Tenemos que ver qué le pasa cuando precomponemos con una transformación lineal  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que está definida como  $f(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$  donde  $B$  es una matriz no singular. Se tiene

$$\begin{aligned} (P \circ f)(\mathbf{x}) &= P(f(\mathbf{x})) = P(B\mathbf{x}) \\ &= (B\mathbf{x})^\top A (B\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^\top B^\top) A (B\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{x}^\top (B^\top A B) \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Lo cual implica que dos matrices simétricas  $A$  y  $A'$  determinan formas cuadráticas equivalentes si existen  $t \neq 0$  y  $B \in \mathbf{GL}(3)$  tales que

$$A' = t (B^\top A B);$$

diremos en este caso que  $A$  y  $A'$  son *algebraicamente equivalentes*.

El problema de clasificar curvas cuadráticas proyectivas se reduce entonces a encontrar las formas canónicas a las que podemos reducir matrices algebraicamente equivalentes. Pero antes de entrar de lleno en él, concluyamos un ejemplo importante que dejamos pendiente: el de la parábola.

Sean  $P$  y su homogeneización  $\tilde{P}$  como en (7.5) y (7.6) respectivamente. Dicho de otra manera, su matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabemos que  $C(\tilde{P})$  es un cono circular (ver Ejercicio 7.4) y además que es tangente al plano  $z = 0$  (y también al  $y = 0$ ). Isométricamente es igual al cono del círculo unitario; y la isometría que lleva a este último en  $C(\tilde{P})$  es la rotación de  $-45^\circ$  alrededor del eje  $x$ . Sea  $B$  la matriz de esa rotación, es decir

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

...Dibujo

Tenemos entonces, de acuerdo con la demostración del Lema 7.2, que

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^\top \mathbf{A} \mathbf{B} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

es la matriz del cono de  $\mathbb{S}^1$ , al que llamaremos el *cono de Lorentz*.

Junto con el Ejercicio 7.9, tenemos entonces que la hipérbola, la parábola y el círculo son proyectivamente equivalentes. Lo que afinmente las diferencia es cómo intersectan a la línea al infinito: la hipérbola en dos puntos (correspondientes a la dirección de sus asíntotas), la parábola en uno (correspondiente a su directriz) y el círculo en ninguno.

### 7.2.1 Clasificación usando a la afín

Puesto que el grupo afín  $\mathbf{Af}(2)$  se puede considerar naturalmente dentro del grupo general lineal,  $\mathbf{Af}(2) \subset \mathbf{GL}(3)$ , como las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}' & \mathbf{k} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.8)$$

donde  $\mathbf{B}' \in \mathbf{GL}(2)$  (la parte lineal) y  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$  (la traslación), actuando en el plano  $z = 1$  (ver Sección 6.6.4); entonces podemos usar la clasificación afín del Capítulo 4 para dar la clasificación proyectiva. Esta clasificación es tanto de formas cuadráticas, como de sus curvas algebraicas y sus matrices simétricas asociadas. Enunciémoslo en términos de matrices, aunque en la demostración hablaremos indistintamente de estos tres tipos de objetos hermanados.

**Teorema 7.3** *Una matriz simétrica  $3 \times 3$  distinta de cero es algebraicamente equivalente a una y sólo una de las siguientes*

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Demostración.** Sabemos que afinmente se reducen a nueve (ver Sección 4.2), es decir, que actuando únicamente con matrices afines (7.8) llegamos a nueve formas canónicas. Pero ya hemos visto que tres de ellas (círculo, parábola e hipérbola) son proyectivamente equivalentes (para hacerlas equivalentes se usan necesariamente matrices no afines). De tal manera que las *no degeneradas* de la primera línea son dos: la *forma cuadrática definida* (o *euclidiana*) cuya curva es vacía, y la *forma cuadrática de Lorentz* que define a la cónica proyectiva no degenerada (representada por la forma cuadrática del círculo unitario).

Las formas *degeneradas* son las tres del segundo renglón. La primera tiene como curva un único punto, el  $[0 : 0 : 1]$ . En ella se han fundido lo que habíamos llamado “el círculo de radio cero” ( $x^2 + y^2$ ) y “las rectas paralelas imaginarias” ( $x^2 + 1$ ), que, al homogeneizarse en  $x^2 + z^2$ , sí tiene un punto al infinito. La segunda es un par de rectas (antes eran dos casos: paralelas y no que en el proyectivo son lo mismo). Y por último, una recta doble.

Puesto que los subconjuntos del proyectivo asociados a estas matrices (las curvas de sus respectivas formas) son todos de distinta índole, no es posible que sean equivalentes. Y esto concluye la demostración.  $\square$

Podría parecer que hemos acabado nuestro trabajo de clasificación de curvas cuadráticas proyectivas, y en principio así es. Pero repasemos la demostración que dimos en el fondo. La clasificación afín. Consistió en reducir el polinomio general a alguno de los canónicos en dos pasos centrales pero independientes. Primero, encontrar un centro (para eliminar términos lineales) por medio de una traslación, y, segundo, encontrar los ejes (para eliminar términos mixtos) por medio de una rotación. Lo demás fueron detalles, se reescalaron los ejes coordenados y se multiplicó por la constante si fuera requerido para hacer de todos los coeficientes 0, 1 o  $-1$ ; y finalmente, se permutaron variables.

Al proyectivizar y homogeneizar el polinomio nos hemos “deshecho” de los términos lineales y el constante; ahora todo es cuadrático, entonces parece que podríamos evitar el primer paso, y hacerlo todo de golpe con la rotación. Esto nos dará una demostración más elegante, cuyas ventajas serán múltiples. Por un lado nos dará una idea general de cómo deben ser las superficies cuadráticas en todas las dimensiones, y por el otro, un entendimiento más profundo de las formas cuadráticas que redundará en conocimientos concretos sobre las cónicas y en nuevas geometrías.

### 7.2.2 Equivalencia lineal

Sea  $A$  una matriz simétrica  $3 \times 3$  y  $P$  su forma cuadrática asociada, es decir,

$$P(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot (A \mathbf{x}) \quad \text{con} \quad A^\top = A.$$

Para entender con más precisión qué hace esta forma cuadrática en  $\mathbb{R}^3$ , y en particular cómo es la geometría de su cono asociado  $C(P)$ , actuaremos en ella, no a lo bestia

con matrices cualesquiera de  $\mathbf{GL}(3)$  como en la sección anterior, sino con más tacto, con las que preservan el producto interior y por tanto la métrica. Sabemos que estas matrices son las matrices ortogonales (que forman el grupo  $\mathbf{O}(3)$ ) y que también preservan la métrica de  $\mathbb{P}^2$ .

Si  $B \in \mathbf{O}(3)$ , y  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es su transformación asociada, tenemos que

$$(P \circ f)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top (B^\top AB) \mathbf{x},$$

como para cualquier matriz  $B$ . Pero en este caso especial ( $B \in \mathbf{O}(3)$ ), la matriz  $B^\top AB$  tiene una interpretación geométrica muy particular. Puesto que

$$B \in \mathbf{O}(3) \iff B^\top = B^{-1},$$

entonces  $B^\top AB = B^{-1}AB$  y esta matriz es la matriz asociada a la transformación  $A$  ...Diujo pero escrita en la base  $B$ .

Veámoslo. Si  $B$  tiene columnas  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ , entonces el que sea invertible significa que estos tres vectores forman una base, es decir, que cualquier vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  se puede escribir como

$$\mathbf{x} = \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2 + \beta_3 \mathbf{u}_3. \quad (7.9)$$

Definimos  $\mathbf{x}_B := (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  como la expresión de  $\mathbf{x}$  en la base  $B$ . Así que, por ejemplo,  $\mathbf{u}_1$  en la base  $B$  es  $(1, 0, 0) = \mathbf{e}_1$ ; pero  $\mathbf{u}_1$  en la base canónica puede ser complicado. Para pasar de la expresión en la base  $B$  a la expresión en la base canónica, simplemente hay que multiplicar por  $B$ , pues equivale a calcular los valores reales de las coordenadas en la expresión (7.9), que se puede reescribir como  $\mathbf{x} = B\mathbf{x}_B$ . Y al revés, para pasar de la expresión en la base canónica a la expresión en la base  $B$  hay que multiplicar por la inversa  $B^{-1}$ , pues es la manera de encontrar la solución de (7.9) pensado como sistema de ecuaciones con incógnitas  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ; puesto que  $\mathbf{x} = B\mathbf{x}_B$ , tenemos que  $\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{x}$ . En el ejemplo, está claro que  $B^{-1}\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1$ . Así que la matriz  $B^{-1}AB$  pensada como transformación aplicada a un vector escrito en la base  $B$ , primero lo reescribe en la base canónica, luego le aplica  $A$  (que es como ella sabe actuar) y luego lo traduce de nuevo a la base  $B$ . Con la notación que desarrollamos en el párrafo anterior, esto se escribe

$$(B^{-1}AB) \mathbf{x}_B = B^{-1}A(B\mathbf{x}_B) = B^{-1}A\mathbf{x} = B^{-1}(A\mathbf{x}) = (A\mathbf{x})_B.$$

Hemos demostrado que  $B^{-1}AB$  es la matriz de la transformación  $A$  escrita en la base  $B$ . Es natural entonces decir que dos matrices son *linealmente equivalentes* si expresan la misma transformación pero en diferentes bases, es decir si son  $A$  y  $B^{-1}AB$  para alguna  $B \in \mathbf{GL}(3)$ , pues obsérvese que en nuestra discusión de la escritura en diferentes bases sólo usamos que  $B$  fuera invertible. Si, en particular,  $B \in \mathbf{O}(3)$ , que es el caso que nos interesa, entonces se dice, aún más, que  $A$  y  $B^{-1}AB$  son *ortogonalmente equivalentes*.

Hay que remarcar que la equivalencia lineal **no** corresponde a la equivalencia algebraica que estamos estudiando (de ahí que haya sido necesario poner apellidos),

pues en general  $B^T A B \neq B^{-1} A B$ . Sólo en el caso especial en que se actúe con las ortogonales (cuando  $B \in \mathbf{O}(3)$ , y que cumple que su inversa es su transpuesta), sí coinciden. Es decir...

**Lema 7.4** *Si dos matrices simétricas son ortogonalmente equivalentes, entonces son algebraicamente equivalentes.*  $\square$

Podemos entonces pensar a  $A$  como función lineal y no como forma cuadrática para simplificarla ortogonalmente.

### 7.3 Diagonalización de matrices simétricas

Esta sección está dedicada a demostrar lo siguiente.

**Teorema 7.5** *Sea  $A$  un matriz simétrica. Entonces es ortogonalmente equivalente a una matriz diagonal, es decir, existe una matriz ortogonal  $B$  tal que*

$$B^T A B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (7.10)$$

Y para demostrarlo podemos pensar a  $A$  como función lineal (o proyectiva) pues como  $B \in \mathbf{O}(3)$ ,  $B^T = B^{-1}$  y entonces la matriz  $B^T A B$  representa a la función  $A$  escrita en otra base. Que en esta nueva base sea diagonal, como vimos en la demostración del Teorema de 4 en 4, significa que, proyectivamente, fija los tres puntos de la base; y euclidianamente, que alarga (o acorta) a sus ejes, que los deja en sí mismos. Para encontrar a  $B$  buscamos entonces puntos fijos de la función  $A$  (proyectiva); o bien, vectores propios de la función lineal.

Recordemos de la Sección 4.3.2, como de hecho gran parte de la discusión anterior ya lo hace, que un *vector propio* de la matriz  $A$  es un  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  distinto de  $\mathbf{0}$  para el cual existe una  $\lambda \in \mathbb{R}$ , su *valor propio*, tal que

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v},$$

y a la pareja  $\mathbf{v}, \lambda$  la llamaremos un *par propio* de  $A$ . Si  $\lambda \neq 0$ ,  $[\mathbf{v}]$  es un punto fijo de  $A$  (pensada como transformación proyectiva), y si  $\lambda = 0$ , es un “punto de proyección” donde no está definido su valor. También vimos en 4.3.2 que para encontrar pares propios, primero se encuentra un valor propio como raíz del polinomio característico y luego se encuentra una solución no trivial al sistema de ecuaciones lineales correspondiente. Como en aquel entonces trabajábamos en  $\mathbb{R}^2$ , reconstruyamos la argumentación en  $\mathbb{R}^3$  haciendo énfasis en qué se necesitaría para el caso general.

**Lema 7.6** *Dado  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces existe  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  tal que  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$  si y sólo si  $\det(A - \lambda I) = 0$ .*

**Demostración.** Tenemos que

$$\begin{aligned} A\mathbf{v} &= \lambda\mathbf{v} \\ \Leftrightarrow A\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} &= \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow (A - \lambda I)\mathbf{v} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Y la última ecuación sucede con algún  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  si y sólo si  $\det(A - \lambda I) = 0$  (ver el Teorema 5.9 para el caso en  $\mathbb{R}^3$ , y esto es lo que se necesita demostrar en el caso general).  $\square$

Dibujos...

Regresemos al ejemplo de la parábola con esta óptica. Si  $A$  es la matriz de la parábola,  $\det(A - \lambda I)$  toma la forma

$$\begin{aligned} \det \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) &= \det \left( \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \right) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2-1) \\ &= -(\lambda-1)^2(\lambda+1). \end{aligned}$$

Lo cual nos dice que los valores propios de  $A$  son  $1$  y  $-1$  pues son las *raíces* de este polinomio (los valores de  $\lambda$  que lo anulan). Para el valor propio  $-1$ , se tiene entonces que el sistema de ecuaciones homogéneas

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tiene soluciones no triviales, a saber cualquiera de la forma  $(0, t, t)$  con  $t \neq 0$ , correspondientes al vector propio  $\mathbf{u} := (0, 1, 1)$  ( $A\mathbf{u} = -\mathbf{u}$ ) y al eje de simetría del cono. Por su parte, el valor propio  $1$ , que tiene multiplicidad  $2$ , da el sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuyas soluciones son todos los puntos del plano  $y + z = 0$ ; que es el plano de simetría ...Dibujo del cono. Proyectivamente, la recta  $y + z = 0$ , que es precisamente  $\ell_{[\mathbf{u}]}$  se queda fija punto a punto, de tal manera que la matriz  $A$  representa la reflexión en  $\ell_{[\mathbf{u}]}$ , que también es la inversión en su polar  $[\mathbf{u}]$ .

Regresando al caso general, el lema nos dice que los valores propios de la matriz  $A$  son las raíces (los ceros) de su *polinomio característico*

$$\det(A - \lambda I),$$

donde se piensa a  $\lambda$  como una variable. El polinomio característico de una matriz no cambia cuando la escribimos en otra base, pues para cualquier  $B \in \mathbf{GL}(3)$ :

$$\begin{aligned} \det(B^{-1}AB - \lambda I) &= \det((B^{-1}AB) - \lambda(B^{-1}B)) \\ &= \det((B^{-1}AB) - (B^{-1}(\lambda I)B)) \\ &= \det(B^{-1}(A - \lambda I)B) \\ &= \det(B^{-1}) \det(A - \lambda I) \det(B) \\ &= \det(A - \lambda I). \end{aligned}$$

Así que diagonalizar una matriz (como en 7.10) incluye necesariamente encontrar las raíces de su polinomio característico, pues entonces se tiene por lo anterior que

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda) \\ &= -(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3), \end{aligned}$$

que es escribir el polinomio en términos de sus raíces.

Si  $A$  es una matriz  $3 \times 3$  (como en el caso que nos interesa), éste es un polinomio de grado 3, y por el Teorema Fundamental del Algebra,<sup>2</sup> tiene al menos una raíz real. En realidad lo que dice este teorema es que tiene tres raíces complejas, pero si sus coeficientes son reales, como en nuestro caso, entonces las raíces complejas vienen en parejas; un complejo y su conjugado. Como el grado es impar, entonces hay al menos una raíz real. Hemos demostrado entonces lo siguiente.

**Corolario 7.7** *Toda matriz de  $3 \times 3$  tiene al menos un par propio.* □

Ahora, usaremos la simetría de  $A$  para aplicar inducción encontrando un plano “invariante” y buscar ahí los dos pares propios que nos faltan. En general, dada una matriz cuadrada  $A$  se dice que un subespacio  $V$  es *invariante* si se cumple que

$$\mathbf{x} \in V \quad \Rightarrow \quad A\mathbf{x} \in V.$$

Es decir si la función  $A$  lo deja en su lugar (aunque posiblemente cambiado internamente). El ejemplo básico de espacios invariantes corresponden a las líneas generadas por los vectores propios, pues la condición  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$  implica que  $[\mathbf{v}]$  es invariante y viceversa, una línea (por el origen) invariante consta de vectores propios.

Recordemos del Capítulo 4 la caracterización de las matrices simétricas como aquellas que “saltan” en el producto interior. Por su sencillez, y para que quede autocontenida nuestra discusión, lo volveremos a demostrar.

**Lema 7.8** *Sea  $A$  una matriz de  $n \times n$ . Entonces*

$$A = A^T \quad \Leftrightarrow \quad (A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

---

<sup>2</sup>Ver Apéndice.



**Demostración.** Para la ida ( $\Rightarrow$ ) se usa que el producto interior es un caso particular del producto de matrices y su asociatividad. Para cualquier  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ,

$$(\mathbf{Ax}) \cdot \mathbf{y} = (\mathbf{Ax})^\top \mathbf{y} = (\mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top) \mathbf{y} = (\mathbf{x}^\top \mathbf{A}) \mathbf{y} = \mathbf{x}^\top (\mathbf{Ay}) = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{Ay}).$$

Para demostrar el otro lado ( $\Leftarrow$ ), basta ver que la entrada  $i, j$  de  $\mathbf{A}$  es  $\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{Ae}_j)$ . Por hipótesis,  $\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{Ae}_j) = \mathbf{e}_j \cdot (\mathbf{Ae}_i)$ , que es la entrada  $j, i$ , así que  $\mathbf{A}$  es simétrica.  $\square$

Hay que hacer resaltar que la condición de ser simétrica, para una transformación, se ha expresado en términos del producto interior. Así que si tiene un subespacio invariante, se puede decir cuándo es simétrica en él y éste será el fundamento de la inducción después de encontrar el plano invariante.

**Lema 7.9** *Sea  $\mathbf{A}$  una matriz simétrica ( $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$ ) y  $\mathbf{v}$  un vector propio de  $\mathbf{A}$ . Entonces el plano ortogonal a  $\mathbf{v}$  es un espacio invariante de  $\mathbf{A}$ ; es decir*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{Ax}) \cdot \mathbf{v} = 0.$$

**Demostración.** Si  $\mathbf{v}$  un vector propio de  $\mathbf{A}$  se tiene que  $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$  para alguna  $\lambda \in \mathbb{R}$ , y entonces  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = 0$  implica que

$$(\mathbf{Ax}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{Av}) = \mathbf{x} \cdot (\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}) = 0.$$

$\square$

Ya tenemos todos los ingredientes para demostrar el Teorema de diagonalización ortogonal de matrices simétricas.

Sea  $\mathbf{A}$  una matriz simétrica  $3 \times 3$ . Por el corolario 7.7,  $\mathbf{A}$  tiene un valor propio  $\lambda_3$ . Sea  $\mathbf{u}_3$  un vector propio unitario correspondiente a  $\lambda_3$  (cualquier vector propio multiplicado por el inverso de su magnitud lo hace unitario). Sean  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  cualquier par de vectores tales que  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3$  forman una base ortonormal. Puesto que  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  son ortogonales a  $\mathbf{u}_3$ , el Lema 7.9 nos dice que  $\mathbf{Av}_1$  y  $\mathbf{Av}_2$  también lo son, de tal manera que  $\mathbf{A}$  escrita en la base  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3$  tiene la forma

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & 0 \\ \mathbf{b} & \mathbf{c} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

pues  $\mathbf{b} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{Av}_2 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{Av}_1$ . Como lo demostramos en el Capítulo 4, se puede ver directamente que el polinomio característico de esta matriz tiene sus otras dos raíces reales (ya nada más falta resolver un polinomio cuadrático). Que, como no cambia el polinomio característico, son valores propios de la matriz original. Sean  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  estas raíces y sean  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$  sus vectores propios unitarios correspondientes. Nos falta ver que son ortogonales.

Por ser  $A$  simétrica,

$$\lambda_i (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j) = (\lambda_i \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{u}_j = (A\mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{u}_j = \mathbf{u}_i \cdot (A\mathbf{u}_j) = \mathbf{u}_i \cdot (\lambda_j \mathbf{u}_j) = \lambda_j (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j),$$

lo que implica que  $(\lambda_i - \lambda_j) (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j) = 0$ . Por tanto, tenemos que *si*  $\lambda_i \neq \lambda_j$  *entonces*  $\mathbf{u}_i$  *es ortogonal a*  $\mathbf{u}_j$ . Si dos valores propios coincidieran, podemos suponer que son  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , pero entonces la matriz  $A'$  ya sería diagonal pues  $A$  en el plano invariante es una homotecia. Y si los tres valores propios coinciden, entonces  $A$  es una homotecia en  $\mathbb{R}^3$  y desde el principio es diagonal.

Con esto se concluye la demostración del Teorema de diagonalización 7.5.

## 7.4 Geometría de las formas cuadráticas

Resumiendo las dos secciones anteriores, a una forma cuadrática en tres variables le asociamos una matriz simétrica  $A$  y hemos demostrado que en una base ortonormal adecuada  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ , ésta se escribe como una matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Lo cual dice que, en la nueva base, la forma cuadrática se expresa de manera muy simple:

$$P(\mathbf{x}) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2,$$

Dibujo...

donde  $(x, y, z)$  son ahora las coordenadas de  $\mathbf{x}$  respecto a la base  $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ . Se tiene además que el determinante de la matriz original es el producto de sus valores propios ( $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ ). Entonces se puede saber desde el principio si alguno de los valores propios es cero, simplemente corroborando si  $\det(A)$  es cero. A este caso se le llama *degenerado* pues, en la base adecuada, no depende de alguna de las coordenadas; viene, por decirlo así, de algo en una dimensión más baja y hay al menos una variable de pacotilla; es un “cilindro” sobre los ceros de una forma cuadrática de dimensión menor.

El caso interesante es el *no degenerado*, cuando  $\det(A) \neq 0$ . Y éste se divide en dos subcasos. Primero, cuando los tres valores propios tienen el mismo signo es llamada forma cuadrática *definida*, pues el valor de la forma cuadrática siempre tendrá el mismo signo (excepto en el  $0$  que vale  $0$ ). Si fueran positivos, por ejemplo, no importa qué valor le demos a las variables, al elevarlas al cuadrado se harán positivas y estaremos sumando tres números positivos; se le llama entonces *positiva definida*. Cuando los tres son negativos se le llama *negativa definida*. Puesto que el único cero de las formas cuadráticas definidas es el origen, su curva proyectiva asociada es vacía.

...Dibujo

La otra posibilidad para una forma cuadrática no degenerada es que entre los valores propios aparezcan los dos signos, y se le llamará *indefinida*. Dos de los valores

propios son de un signo y el restante del contrario; podemos suponer (cambiando el orden de la base si fuera necesario) que los dos primeros  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son del mismo signo, y además, para fijar ideas, que son positivos (el otro caso será equivalente si se intercambian las palabras “positivo” y “negativo”). Éstas son las formas cuadráticas que definen a las *cónicas proyectivas*. En  $\mathbb{R}^3$  sus ceros son un cono sobre una elipse. Demostremoslo. Su intersección con el plano  $z = 1$  (recordemos que estamos en la base  $\mathbf{B}$  y no necesariamente en la canónica) está determinada por la ecuación

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = (-\lambda_3),$$

donde las tres constantes son positivas, y por lo tanto es una elipse. Entonces  $\mathbf{C}(\mathbf{P})$  Dibujo... consiste de todas las rectas por el origen y puntos de esta elipse.

### 7.4.1 Su simetría

Los tres ejes  $[\mathbf{u}_1], [\mathbf{u}_2], [\mathbf{u}_3]$  de la forma cuadrática rigen su simetría (y al revés). Como hemos visto, se puede definir un subgrupo de  $\mathbf{O}(3)$  para cualquier figura que son sus simetrías. También se puede definir para funciones en general, pero en nuestro caso particular definámoslo para la forma cuadrática que estamos estudiando:

$$\mathbf{Sim}(\mathbf{P}) = \{f \in \mathbf{O}(3) \mid \mathbf{P} = \mathbf{P} \circ f\}.$$

Aquí consideramos a los elementos de  $\mathbf{O}(3)$  como funciones, y estamos tomando aquellas que, al precomponerlas con la forma cuadrática, ésta ni se entera. Cualquier cosa que definamos con base en  $\mathbf{P}$ , por ejemplo sus ceros o sus superficies de nivel que estudiaremos más adelante, heredarán esta simetría.

Si llamamos  $f_i$  a la reflexión en el plano generado por  $\mathbf{u}_j$  y  $\mathbf{u}_k$  donde  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ , entonces se escribe en coordenadas (respecto a  $\mathbf{B}$ , insistimos) cambiando el signo a la coordenada  $i$ . Por ejemplo  $f_1(x, y, z) = (-x, y, z)$ . Está claro entonces que  $f_i \in \mathbf{Sim}(\mathbf{P})$  pues como la coordenada en cuestión se eleva al cuadrado al evaluar  $\mathbf{P}$ , el cambio de signo no altera el resultado. Cuando los tres valores propios  $\lambda_1, \lambda_2$  y  $\lambda_3$  son diferentes, entonces  $f_1, f_2$  y  $f_3$  generan a  $\mathbf{Sim}(\mathbf{P})$  y este tiene ocho elementos. Las rectas  $[\mathbf{u}_1], [\mathbf{u}_2]$  y  $[\mathbf{u}_3]$  están entonces determinadas por la geometría —por la simetría— y por ello se les llama *ejes de simetría*.

Cuando dos de los valores propios coinciden, digamos que  $\lambda_1 = \lambda_2$ , entonces el grupo de simetrías crece. El plano generado por  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$  es un espacio propio; cualquier vector ahí es vector propio para el valor propio  $\lambda_1$ . Entonces  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$  pueden escogerse como cualquier base ortonormal ahí y habrá un subgrupo  $\mathbf{O}(2)$  de  $\mathbf{Sim}(\mathbf{P})$ . En el caso de una forma cuadrática no degenerada indefinida ésta es la simetría máxima a la que puede aspirar (como en la forma cuadrática de Lorentz). De cualquier manera el *plano de simetría* queda determinado.

Cuando los tres valores propios coinciden (y por lo tanto es definida la forma cuadrática, de hecho una constante por la forma cuadrática euclidiana) la simetría es todo  $\mathbf{O}(3)$ .

---

**EJERCICIO 7.11** Sean  $A$  una matriz simétrica  $3 \times 3$  y  $B \in \mathbf{O}(3)$  una matriz ortogonal. Si  $P$  es la forma cuadrática asociada a  $A$  y  $f$  la transformación lineal asociada a  $B$  ( $f(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ ), demuestra que  $P = P \circ f$  si y sólo si  $A = B^{-1}AB$ .

**EJERCICIO 7.12** Sean  $A = (\lambda_1 \mathbf{e}_1, \lambda_2 \mathbf{e}_2, \lambda_3 \mathbf{e}_3)$  una matriz diagonal y  $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \in \mathbf{O}(3)$  una matriz ortogonal, tales que  $A = B^T A B$ . Demuestra que si  $\lambda_1, \lambda_2$  y  $\lambda_3$  son diferentes, entonces  $\mathbf{v}_i = \pm \mathbf{e}_i$  para  $i = 1, 2, 3$ .

---

### Ejemplo

Consideremos un círculo unitario desplazado una unidad en el eje  $y$ ; estudiaremos su cono por el origen al pensarlo en la carta coordenada canónica. El círculo está dado por el polinomio

$$P(x, y) = x^2 + (y - 1)^2 - 1 = x^2 + y^2 - 2y.$$

Dibujo...

Al homogeneizar, su matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyo polinomio característico resulta ser

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2(-\lambda) - (1 - \lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 1.$$

En general no supondremos que sabemos resolver polinomios de tercer grado, pero en este caso, de la expresión intermedia está claro que se puede factorizar el factor lineal  $(1 - \lambda)$  para obtener

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 1).$$

Tenemos entonces que una raíz del polinomio característico (o valor propio de  $A$ ) es 1. Su vector propio asociado es  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ , que corresponde al hecho de que al trasladar el círculo en el eje  $y$ , el plano de simetría del cono gira sobre el eje  $x$ . Las otras dos raíces son:

$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

El valor propio  $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$  es la *razón áurea* y el que falta es la no tan famosa solución negativa del polinomio áureo  $\lambda^2 - \lambda - 1$ , que resulta ser  $-\phi^{-1}$  pues

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1 - 5}{4} = -1.$$

...Dibujos

Para encontrar un vector propio para  $\phi$  debemos resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 1-\phi & 0 & 0 \\ 0 & 1-\phi & -1 \\ 0 & -1 & -\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que nos da, usando el truco del compadre ortogonal en el segundo renglón de la matriz, la solución

$$\mathbf{u} := (0, 1, 1 - \phi).$$

Efectivamente, del polinomio áureo obtenemos que  $\phi^{-1} = \phi - 1$ , y por lo tanto

$$A\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1-\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi \\ -1 \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\phi^{-1} \end{pmatrix} = \phi \mathbf{u}.$$

Así que el plano de simetría del cono tiene pendiente  $-\phi^{-1}$ . El tercer vector propio, asociado al valor propio  $-\phi^{-1}$ , se puede obtener de manera análoga, o bien por el producto cruz (pues sabemos que son ortogonales); es  $\mathbf{v} := \mathbf{e}_1 \times \mathbf{u} = (0, \phi^{-1}, 1)$ . Obsérvese que el eje de simetría del cono no pasa por el centro del círculo original que es  $(0, 1, 1)$ . Este ejemplo demuestra que el centro, aunque es un invariante afín de las cónicas, no es un invariante proyectivo, es decir, proyectivamente no está bien definido. Con una simple traslación, el eje de simetría del cono no se trasladó lo mismo, se “atrásó” en proporción áurea. Y lo que era un cono circular se vuelve un cono elíptico. Dibujo... Dibujo...

Por la teoría que desarrollamos, sabemos además que al cambiar coordenadas girando en el eje  $x$  para que el eje  $y$  caiga en  $[\mathbf{u}]$  (y, por tanto, el eje  $z$  cae en  $[\mathbf{v}]$ ), la forma cuadrática se expresa

$$x^2 + \phi y^2 - \phi^{-1} z^2.$$

Así que el origen “ve” al círculo (en el plano a distancia 1 de él y encuadrando la imagen) como la elipse

$$\phi x^2 + \phi^2 y^2 = 1.$$

---

**EJERCICIO 7.13** Considera el círculo unitario trasladado una distancia  $t \geq 0$  a lo largo del eje  $y$  (en el ejemplo desarrollamos el caso  $t = 1$ ). Encuentra los ejes de simetría del cono correspondiente y sus valores propios. Supón que el parámetro  $t$  representa el tiempo, ¿cómo se parametriza la familia de elipses que ve el origen si gira para seguir el movimiento del círculo? ¿Puedes demostrar que el único momento en que el centro del círculo se ve en el centro de la “elipse visual” es  $t = 0$ ?

---

### 7.4.2 Reducción final

Teniendo el Teorema de Diagonalización de Matrices Simétricas en nuestras manos, podemos dar una demostración alternativa del Teorema de Clasificación 7.3. Simplemente se reduce a convertir una matriz diagonal

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

en una de ceros, unos y menos unos. Esto ya no se puede hacer con transformaciones ortogonales, pero se logra fácilmente reescalando los ejes coordenados. Suponiendo que  $A$  es no degenerada (las tres  $\lambda$  distintas de cero), la matriz de cambio de escalas que lo logra es

$$B = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & |\lambda_2|^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & |\lambda_3|^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

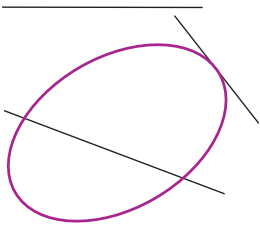
Pues es fácil ver que entonces  $B^T A B$  es, salvo permutación de las variables y signo, una de las dos matrices no degeneradas del Teorema 7.3.

## 7.5 Clasificación en $\mathbb{P}^3$ y en $\mathbb{R}^3$

### 7.5.1 Resumen de cónicas en $\mathbb{P}^2$ y en $\mathbb{R}^2$

En resumen, hemos demostrado que en el plano proyectivo hay una única cónica no degenerada y no vacía. Las tres cónicas clásicas en el plano afín aparecen porque hay tres tipos de líneas respecto a una cónica proyectiva dada: las que no la intersectan;

las que la tocan en un sólo punto, llamadas sus *tangentes*, y las que la intersectan en dos puntos. Ello corresponde al hecho de que los polinomios cuadráticos en una sola variable tienen dos raíces complejas (conjugadas), una real de multiplicidad dos o bien dos raíces reales. Cuando una recta se manda al infinito para obtener una carta afín, dependiendo de qué tipo de recta sea respecto a una cónica dada, ésta se convierte respectivamente en elipse, parábola o hipérbola.



### 7.5.2 Dimensión 3

Sin entrar en detalles, describiremos la clasificación de superficies cuadráticas en  $\mathbb{P}^3$  y en  $\mathbb{R}^3$  que, a su vez, delinea una generalización natural a todas las dimensiones.

En  $\mathbb{R}^3$ , una superficie cuadrática es el conjunto de ceros de un polinomio de grado dos en tres variables. A éste se le hace corresponder un polinomio homogéneo de grado dos en cuatro variables cuyos ceros definen una superficie cuadrática en  $\mathbb{P}^3$  que

es su cerradura proyectiva; agrega sólo puntos en el plano al infinito. A cualquier polinomio homogéneo de grado dos (o forma cuadrática) en cuatro variables se le asigna de manera única una matriz simétrica  $A$  de  $4 \times 4$ , de tal manera que se escribe

$$P(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x},$$

donde ahora  $\mathbf{x}^\top = (x, y, z, w)$ .

Clasificar proyectivamente las superficies cuadráticas equivale a encontrar formas canónicas a las cuales se puede reducir la matriz  $A$  utilizando la acción de  $\mathbf{GL}(4)$  dada por  $A \mapsto B^\top A B$  con  $B \in \mathbf{GL}(4)$ . Primero se estudia el caso particular de actuar por matrices ortogonales (en  $\mathbf{O}(4)$ ), que cumplen  $B^\top = B^{-1}$ , y entonces esta acción equivale a escribir  $A$  en otra base ortonormal. Diagonalizar  $A$  de nuevo es el problema de encontrar valores y vectores propios. Análogamente a como procedimos, este problema se reduce a encontrar un valor propio real de  $A$ , o bien, algún subespacio invariante para aplicar lo que ya sabemos ahí (usar inducción). En esta dimensión se complica pues el polinomio característico es de grado par y no da en forma tan automática un valor propio. Pero si suponemos que las matrices simétricas son diagonalizables por cambio de base ortonormal (lo que además es cierto en cualquier dimensión aunque en este libro no nos toca demostrarlo), entonces prosiguiendo con un simple cambio de escala, una posible permutación de variables y, si fuera necesario, multiplicando por  $-1$ , obtenemos que la matriz  $A$  es equivalente a alguna de las siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

o bien es degenerada; es decir, una de las del Teorema 7.3 con una columna y un renglón más de puros ceros.

La primera corresponde a una forma cuadrática *definida* (sólo se anula en el origen de  $\mathbb{R}^4$ ) que define al vacío en  $\mathbb{P}^3$ . La segunda define a la esfera unitaria en el  $\mathbb{R}^3$  canónico,  $w = 1$ . Este es el caso análogo de la cónica no degenerada en  $\mathbb{P}^2$ , que podríamos llamar *elipsoide*. Pero tenemos un caso nuevo, la tercera que define un *hiperboloide reglado* y que abajo estudiaremos con más detenimiento. Así que

*en  $\mathbb{P}^3$  hay dos tipos de superficies cuadráticas no degeneradas no vacías.*

La clasificación en  $\mathbb{R}^3$  surgirá entonces de cómo se relaciona un plano, que mandaremos al infinito, con la superficie.

Dibujos

Del elipsoide proyectivo surgen tres superficies en  $\mathbb{R}^3$ . Cuando el plano no la toca es un *elipsoide* común y corriente. Cuando el plano es tangente, se obtiene un *paraboloide* que se aproxima al infinito en una dirección dada, la *directriz*, y las secciones con planos ortogonales son elipses similares; en general, sus secciones por

planos son elipses excepto con los que contienen a la directriz que dan parábolas. Y finalmente, cuando el plano corta el elipsoide obtenemos el *hiperboloide de dos hojas*, cuyas secciones son hipérbolas o elipses.

Del hiperboloide reglado se obtienen dos superficies. Cuando el plano al infinito lo corta en una cónica no degenerada da el “equipal”, conocido técnicamente como *hiperboloide de una hoja*. Y cuando el plano al infinito es tangente a él, lo intersecta en dos rectas (una cónica degenerada) y, entonces, vemos en el espacio afín un *paraboloide hiperbólico*.

### 7.5.3 Superficies regladas

Considerando los elipsoides como la generalización natural de las elipses, en dimensión 3 aparecen nuevas superficies cuadráticas que son las “*regladas*”. Se llaman así porque tienen dos *reglados* que son conjuntos de rectas, o *reglas*, parametrizadas por una línea proyectiva. Consideremos primero el polinomio

Dibujo...

$$P(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$$

que, en  $\mathbb{R}^3$ , define al *hiperboloide canónico* (de una hoja) que denotaremos  $\mathcal{H}$ .

Observemos primero que  $\mathcal{H}$  es invariante bajo rotaciones en el eje  $z$  (es decir, que  $\mathbf{O}(2) \subset \mathbf{Sim}(\mathcal{H})$ ). Pues el propio polinomio  $P$  es invariante bajo ellas. Se puede ver sustituyendo directamente las fórmulas en las variables del polinomio, o bien matricialmente (viendo que  $\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{A}$ ):

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 & 0 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde la matriz de enmedio, llamémosle  $\mathbf{A}$ , es la matriz asociada a la homogeneización de  $P$  y las otras,  $\mathbf{B}^T$  y  $\mathbf{B}$  son las que representan las rotaciones en el eje  $z$ .

Observemos también que  $\mathcal{H}$  contiene a las rectas

$$\ell_1 = \{\mathbf{e}_1 + t(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \mid t \in \mathbb{R}\} \quad \text{y} \quad \ell_2 = \{\mathbf{e}_1 + s(\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2) \mid s \in \mathbb{R}\}, \quad \text{pues}$$

$$P(1, t, t) = 1 + t^2 - t^2 - 1 = 0 \quad \text{y} \quad P(1, -s, s) = 1 + s^2 - s^2 - 1 = 0.$$

Estas rectas,  $\ell_1$  y  $\ell_2$ , son las *reglas* de  $\mathcal{H}$  que pasan por  $\mathbf{e}_1$ .





De estas dos observaciones se sigue que todas las rotaciones alrededor del eje  $z$  de la línea  $\ell_1$  (y de  $\ell_2$ ) están en  $\mathcal{H}$ ; de hecho, “barren” a  $\mathcal{H}$ : al rotar  $\ell_1$  (o  $\ell_2$ ) se “genera” o se “pasa por” todo  $\mathcal{H}$ . Las rotaciones de  $\ell_1$  forman uno de los *reglados*,  $\mathcal{R}_1$  denotémoslo; y las rotaciones de  $\ell_2$  forman el otro reglado  $\mathcal{R}_2$ . Se tiene que, proyectivamente, las reglas de uno y otro reglado siempre se intersectan, mientras que las reglas de un mismo reglado son ajenas entre sí (no se intersectan). De hecho, por cada punto de  $\mathcal{H}$  pasan justo una regla de  $\mathcal{R}_1$  y una de  $\mathcal{R}_2$ , que juntas generan el plano tangente a  $\mathcal{H}$  en ese punto.

Para demostrar, más que simplemente enunciar, nuestras últimas aseveraciones conviene ver el hiperboloide  $\mathcal{H}$  en su otra manifestación afín. Para esto, consideremos a  $\mathcal{H}$  como el hiperboloide reglado proyectivo (es decir, en  $\mathbb{P}^3$ ), definido por el polinomio homogéneo

$$\tilde{P}(x, y, z, w) = x^2 + y^2 - z^2 - w^2,$$

cuya matriz asociada  $A$  es la que ya usamos. Un cambio proyectivo de coordenadas, que geoméricamente consiste, en  $\mathbb{R}^4$ , en rotar  $45^\circ$  en los planos  $xz$  y  $yw$  al mismo tiempo (y en  $\mathbb{P}^3$  de medios giros en las rectas correspondientes), nos cambia a la matriz en

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \\ & = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

que corresponde al polinomio homogéneo  $2\tilde{Q}$ , donde

$$\tilde{Q}(x, y, z, w) = xz + yw.$$

Este polinomio es la homogeneización de

$$Q(x, y, z) = xz + y,$$

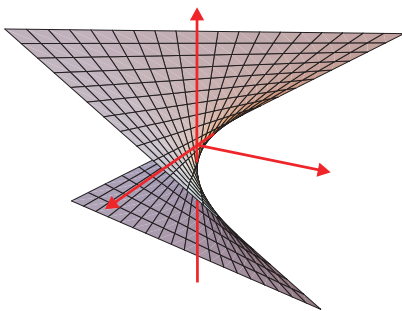
que define un *paraboloide hiperbólico*, o “silla de montar” pues parece tal al intercambiar las variables  $y$  con  $z$ . Sus

dos reglados están claramente determinados por sus intersecciones con los planos  $z = cte$  y  $x = cte$ ; y que tienden al par de rectas  $xz = 0$  en el plano al infinito.

**\*El hiperboloide por tres rectas**

...Dibujo

Una construcción elegante de superficies cuadráticas regladas con la que Hilbert y Chon-Vossen abren su libro clásico *Geometría e Imaginación* [9], es la siguiente.



Consideremos tres rectas  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$  en  $\mathbb{P}^3$  en *posición general*, i.e., que no se intersecten dos a dos (aquí formalmente es importante estar pensando en términos proyectivos para excluir la posibilidad euclidiana del paralelismo y definir de un solo golpe la construcción). Para cada punto  $p \in \ell_1$ , tomamos el plano que genera junto con  $\ell_2$  y lo intersectamos con  $\ell_3$  para obtener un punto  $q \in \ell_3$ ; la línea,  $\ell_p$ , que pasa por  $p$  y  $q$  también intersecta a  $\ell_2$  pues son coplanares, así que intersecta a las tres líneas. Al variar  $p \in \ell_1$  se obtiene un reglado de un hiperboloide  $\mathcal{H}$ , y  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$  pertenecen a su otro reglado. Nótese que cualquier recta que intersecte a las tres dadas aparece como la  $\ell_p$  de algún punto en  $\ell_1$ , así que los hiperboloides reglados constan de todas las rectas que tocan a tres rectas dadas.

Es claro que en la construcción anterior pudimos haber utilizado las tres rectas en cualquier orden y obtener el mismo  $\mathcal{H}$  con su reglado de “transversales” a ellas. Este reglado implica que, al tomar tres rectas en posición general en  $\mathbb{P}^3$ , se obtiene naturalmente una correspondencia entre ellas ( $p_i \in \ell_i$  corresponde a  $p_j \in \ell_j$  si están en una de las reglas de  $\mathcal{H}$ ). Resulta que estas correspondencias entre líneas proyectivas son proyectivas. Así que otra manera de obtener hiperboloides reglados es con dos rectas  $\ell_1$  y  $\ell_2$  en posición general y una correspondencia proyectiva  $f : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ , tomando todas las reglas por  $p \in \ell_1$  y  $f(p) \in \ell_2$ . En el Capítulo 9 veremos algo similar a esto en el plano.

---

**\*EJERCICIO 7.14** Demuestra, o indica un esbozo de demostración de, que la unión de las líneas  $\ell_p$  con  $p \in \ell_1$  (que llamamos  $\mathcal{H}$  arriba) es efectivamente una superficie cuadrática; es decir que está definido como los ceros de un polinomio homogéneo de grado 2.

**\*EJERCICIO 7.15** Delinea una demostración de que es proyectiva la correspondencia dada por el reglado entre las líneas  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$ .

**EJERCICIO 7.16** Suponiendo los dos ejercicios anteriores, demuestra que la construcción con dos líneas y una correspondencia proyectiva también es una superficie cuadrática.

---

#### 7.5.4 \*Idea de la clasificación general

Los métodos que hemos desarrollado se generalizan a todas las dimensiones y plantean naturalmente un programa para clasificar las “cuádricas”. Señalaremos brevemente los pasos principales de este programa.

Se pueden considerar polinomios con  $n$  variables,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , y a sus conjuntos de ceros se les llama *hipersuperficies algebraicas* en  $\mathbb{R}^n$ . Dentro de éstas, las definidas por polinomios de grado dos son las hipersuperficies cuadráticas, o simplemente *cuádricas*. La pregunta general es cuáles son las posibles cuádricas en  $\mathbb{R}^n$ , y, de nuevo, hay que especificar un grupo de transformaciones para definir la equivalencia. El grupo natural a considerar es la generalización natural del afín a la dimensión correspondiente.

Añadiendo una nueva variable  $x_0$ , es fácil definir la homogeneización de tales

polinomios, y como sus ceros en  $\mathbb{R}^{n+1}$  son unión de líneas por el origen estos definen las *hipersuperficies algebraicas proyectivas*, y su clasificación módulo el correspondiente grupo proyectivo es más sencilla y natural (sobre los complejos y otros campos, son objeto de estudio de la geometría algebraica). En particular, las *cuádricas proyectivas* están definidas por polinomios homogéneos de grado dos, o *formas cuadráticas*, y para ellos se tiene la misma expresión matricial, usando matrices simétricas, que hemos estudiado.

El punto clave vuelve a ser si las matrices simétricas se diagonalizan en una base ortonormal adecuada. Esto resulta ser cierto y es el teorema profundo o la parte técnica medular del programa, pues el resto de los lemas e ideas que usamos se generalizan fácilmente. Así que diagonalizando, cambiando escala, permutando variables y cambiando signo si es necesario, cualquier matriz es equivalente a una matriz diagonal con un bloque de 1 al principio, digamos que  $i$  de ellos, luego —si acaso— un bloque de  $-1$ , y finalmente —puede ser— un bloque de 0.

$$i \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & -1 & 0 \\ & & & & & & \ddots \\ 0 & & & \dots & & & 0 \end{pmatrix} \right\} n+1$$

Si tiene ceros se le llama *degenerada*, pues esencialmente viene de una dimensión anterior (el polinomio homogéneo se expresa, en la base adecuada, con menos de las  $n+1$  variables).

Las no degeneradas son las interesantes, y para éstas —como sólo nos interesan sus ceros— podemos suponer que hay a lo más tantos  $-1$  como 1, es decir que  $i \geq (n+1)/2$ . Al número de  $-1$ , *i.e.* a  $(n+1-i)$ , se le llama el *índice* de la forma cuadrática no degenerada. Las de índice 0 definen el conjunto vacío tanto proyectiva como afinmente. Las de índice 1, aunque son todas equivalentes proyectivamente, dan lugar a tres tipos de cuádricas afines: los elipsoides (cuyo representante canónico es la esfera de dimensión  $n$ ), los paraboloides que son tangentes al hiperplano al infinito y los hiperboloides de dos hojas que son cortados, separados, por el hiperplano al infinito que, a su vez, las intersecta en una cuádrica de índice 1 en una dimensión menos. Y para cada índice (que llega hasta  $(n+1)/2$  para  $n$  impar y hasta  $n/2$  para  $n$  par) la correspondiente cuádrica proyectiva tiene tantas manifestaciones afines como haya tipos de hiperplanos respecto a ella, que son los que se pueden mandar al infinito.



# Capítulo 8

## Geometría hiperbólica

Como ya hemos mencionado, la geometría hiperbólica se desarrolló de manera abstracta en el estudio del Quinto Postulado, pues surge al negarlo pluralizando: *son muchas las paralelas a una recta que pasan por un punto fuera de ella*. Haciendo esta suposición, a principios del siglo XIX unos cuantos matemáticos como Lobachevsky y Bolyai sentaron sus fundamentos. Estaban convencidos de su solidez lógica, y por tanto de su “existencia o posibilidad”, pero estaban también en franca minoría. Se les tachaba de extravagancia o vil locura entre la comunidad científica. Se cuenta incluso que matemáticos de renombre, como el “*Príncipe de las Matemáticas*” Gauss, tenían resultados en geometría hiperbólica pero que no los hicieron públicos por temor al descrédito. Y no fue sino hasta que se descubrieron los modelos analíticos del plano hiperbólico cuando la comunidad matemática acabó por reconocerla. En la segunda mitad de ese siglo surgieron modelos del plano hiperbólico basados en la geometría euclidiana (en dimensión mayor). Fue entonces evidente su existencia; si la geometría euclidiana era consistente, también lo sería la hiperbólica.

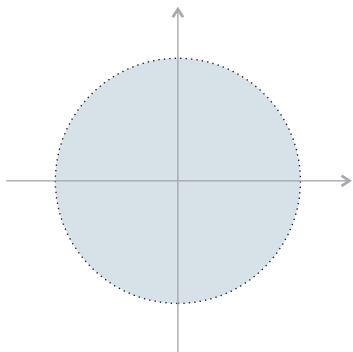
Nuestra presentación será analítica, y no axiomática, pero que quede este párrafo introductorio como homenaje a sus precursores que se dieron el lujo de tomarse la libertad de creer lo increíble, de crearlo y demostrarlo; sufrieron por ello, pero el tiempo les dio la razón.

### 8.1 El plano hiperbólico

Para definir la geometría hiperbólica (en dimensión 2), daremos muy fácilmente sus *puntos* (que forman el plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$ ); sus subconjuntos distinguidos llamados *líneas*, y su *grupo de transformaciones hiperbólicas*. Lo que nos costará mucho más trabajo es demostrar que se merece el rimbombante nombre de “*Geometría*”, que es homogéneo (igual en todos lados y en todas las direcciones) y que tiene nociones de distancia y ángulo de tal manera que el grupo sea justo el de isometrías.

### 8.1.1 Puntos

El *plano hiperbólico*,  $\mathbb{H}^2$ , consiste de los puntos interiores del círculo unitario, pero pensando  $\mathbb{R}^2$  como la carta coordenada canónica del plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$ , es decir,



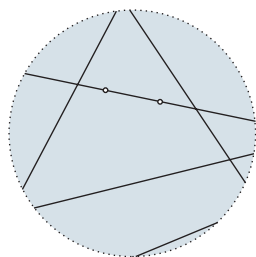
$$\begin{aligned}\mathbb{H}^2 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \\ &\cong \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \mid x^2 + y^2 - z^2 < 0\}.\end{aligned}$$

Obsérvese que el círculo unitario  $\mathbb{S}^1$  no es parte de  $\mathbb{H}^2$ , pero que está ligado a él, es su frontera, y a veces nos referiremos a  $\mathbb{S}^1$  como “*el círculo al infinito*” del plano hiperbólico, y a sus puntos, como *puntos al infinito*, aunque, insistimos, los puntos al infinito del plano hiperbólico **no** son parte del plano hiperbólico (no hay que confundirse con el caso proyectivo).

A esta manera de ver al plano hiperbólico se le conoce como el *modelo proyectivo* o *modelo de Klein* (hay otros modelos más que veremos adelante) y es importante pensarlo como subconjunto del plano proyectivo. Que además  $\mathbb{H}^2$  haya quedado dentro de la carta canónica,  $\mathbb{R}^2$ , y justo dentro de su círculo unitario, es una simple convención para hacer más sencillos los cálculos, pero no es una condición esencial como veremos en el capítulo siguiente; pudimos haber tomado el interior de cualquier cónica.

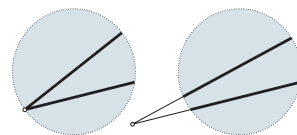
### 8.1.2 Líneas

Las *líneas*, o *rectas*, del plano hiperbólico son sus intersecciones con líneas proyectivas (o euclidianas, da lo mismo, pues  $\mathbb{H}^2$  está en una región acotada). Es decir, son segmentos abiertos cuyos *extremos* están en  $\mathbb{S}^1$  (son puntos al infinito hiperbólico), y corresponden a las *cuerdas* de  $\mathbb{S}^1$ .

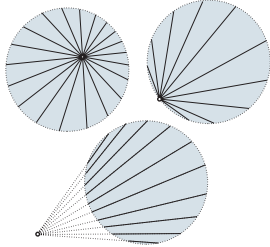


Es claro entonces que por cada par de puntos en  $\mathbb{H}^2$  hay una única línea que pasa por ellos: la intersección con la correspondiente proyectiva (y por tanto, que si dos líneas en el plano hiperbólico se intersectan, entonces se intersectan en un único punto). Pero además también es clarísimo que se cumple la negación plural del Quinto. Por un punto fuera de una línea pasan muchas líneas que no la intersectan; veremos que son “tantas como un segmento cerrado”.

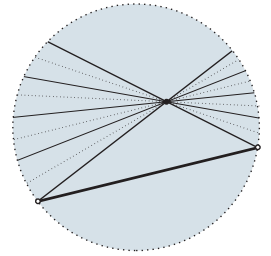
Para ser más precisos, se pueden distinguir dos tipos de no intersección. Se dice que dos líneas hiperbólicas que no se intersectan son *paralelas* si la intersección de sus correspondientes líneas proyectivas es un punto al infinito (hiperbólico), es decir, si está en  $\mathbb{S}^1$ ; y que son *ultraparalelas* si es un punto exterior. La otra posibilidad para dos líneas hiperbólicas es que sean *concurrentes* y se intersecten en  $\mathbb{H}^2$ .



Ahora sí, más precisamente, por un punto  $\mathbf{p}$  fuera de una línea  $\ell$  pasan dos paralelas que parten las rectas por  $\mathbf{p}$  en dos sectores (o segmentos), las concurrentes con  $\ell$  y las ultraparalelas con  $\ell$ .



Tenemos entonces tres tipos de *haces* de líneas en el plano hiperbólico: los *concurrentes*, los *paralelos* y los *ultraparalelos*, que consisten en tomar las rectas hiperbólicas de haces proyectivos concurrentes; lo que los distingue es en dónde queda el punto de concurrencia.



Vale la pena observar que en el plano proyectivo sólo hay un tipo de haz, el concurrente, y que en el plano euclidiano hay dos tipos, el concurrente y el paralelo.

### 8.1.3 Transformaciones

El *grupo de transformaciones hiperbólicas* consiste de todas las transformaciones proyectivas que dejan en su lugar al plano hiperbólico, y por lo tanto a su frontera,

$$\begin{aligned} \text{Hip}(2) : &= \{f \in \text{Pr}(2) \mid f(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2\} \\ &= \{f \in \text{Pr}(2) \mid f(\mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1\}; \end{aligned}$$

es, por así decirlo, el grupo de “simetrías proyectivas” del círculo unitario.

Por el momento no es relevante que la igualdad de estos dos conjuntos esté bien demostrada –aunque lo argumentaremos intuitivamente a continuación–, pues usaremos como caballito de batalla otra definición con un enfoque técnico más analítico. Lo importante por ahora es que las transformaciones hiperbólicas sean naturales y fáciles de definir. Son lo que las transformaciones proyectivas, que en principio ya conocemos, le hacen al plano hiperbólico.

Que da lo mismo fijar el círculo unitario que su interior (la igualdad previa de conjuntos), es consecuencia de que  $\mathbb{S}^1$  parte el plano proyectivo,  $\mathbb{P}^2$ , en dos pedazos topológicamente distintos: el interior que es un disco abierto (y que hemos llamado  $\mathbb{H}^2$ ), y el exterior que es una banda de Moebius abierta cuya ánima o corazón es la recta al infinito. Basta entonces pedir a una transformación proyectiva que mande al círculo unitario en sí mismo, pues entonces tiene que mandar al interior,  $\mathbb{H}^2$ , en sí mismo y también al exterior en sí mismo; no los puede intercambiar.<sup>1</sup>

Ejemplos de transformaciones hiperbólicas son las rotaciones en el origen, pues mandan a  $\mathbb{H}^2$  en él mismo. Pero podemos decir aún más, que

$$\text{O}(2) \subset \text{Hip}(2),$$

<sup>1</sup>Afirmaciones como ésta, que el disco es diferente de la banda de Moebius, aunque intuitivamente claras, sólo se pueden demostrar usando topología algebraica que se desarrolló en el siglo XX.

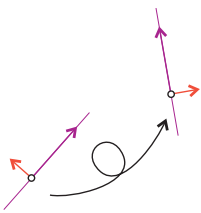
pues también las reflexiones en rectas por el origen dejan en su lugar al círculo unitario  $\mathbb{S}^1$  (y a su interior  $\mathbb{H}^2$ ). Demostraremos más adelante que las únicas transformaciones hiperbólicas que dejan fijo el origen son éstas, es decir que

$$O(2) = \{f \in \text{Hip}(2) \mid f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}\}. \quad (8.1)$$

Nótese que ésta es la misma propiedad que cumple el plano euclidiano  $\mathbb{E}^2$ :  $O(2)$  es el subgrupo de las isometrías que dejan fijo el origen. Y también es lo que cumplen el plano esférico (proyectivo rígido) o  $\mathbb{S}^2$ : las isometrías que dejan fijo un punto son rotaciones en él y reflexiones en una recta por él. Así que las tres geometrías son iguales local o infinitesimalmente.

La gran diferencia de enfoque es que en las geometrías anteriores (euclidiana y esférica) teníamos la métrica (nociones de distancia y ángulo) y de ahí dedujimos el grupo; ahora tenemos el grupo y queremos deducir que hay nociones de distancia y ángulo que lo hacen ser el grupo de isometrías.

Cuando logremos demostrar (8.1) y además que hay transformaciones hiperbólicas que mueven el origen (y por tanto que éste es un punto como cualquier otro), tendremos que  $\mathbb{H}^2$  se comporta como las otras geometrías; que una transformación está determinada por lo que le hace a un punto, a una línea orientada por él y a uno de los lados que ésta define (si preserva o no orientación); una vez determinados estos valores, la métrica, o rigidez del plano, obliga al resto de la transformación (obsérvese que si el punto se queda fijo, los otros dos datos parametrizan  $O(2)$ ). La *homogeneidad* consiste en que todas estas ternas son equivalentes, “que se ve igual desde cualquier punto y en cualquier dirección”. Primero estableceremos que éste es el caso de las transformaciones hiperbólicas, y entonces veremos que las nociones de distancia y ángulo están obligadas por el grupo de transformaciones. Pero para lograrlo necesitaremos más herramientas.



## 8.2 El espacio de Lorentz-Minkowski

Hemos definido al plano hiperbólico,  $\mathbb{H}^2$ , como el interior del círculo unitario,  $\mathbb{S}^1$ . Este último (en  $\mathbb{R}^2$ ) está determinado por el polinomio  $x^2 + y^2 - 1$ , y al considerarlo dentro del plano proyectivo,  $\mathbb{P}^2$ , su forma cuadrática asociada es el polinomio homogéneo en tres variables:

$$x^2 + y^2 - z^2,$$

que hemos llamado la *forma cuadrática de Lorentz*. Su matriz simétrica asociada es la *matriz de Lorentz*

$$L := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$



y entonces podemos escribir

$$\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 - \mathbf{z}^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \mathbf{x}^\top \mathbf{L} \mathbf{x}. \quad (8.2)$$

Una observación muy simple sobre esta última expresión ( $\mathbf{x}^\top \mathbf{L} \mathbf{x}$ ) nos brindará nuestra herramienta técnica fundamental. La observación es que el vector variable  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  aparece en dos lugares aislados de la expresión, y por tanto se puede extender a una expresión con dos variables vectoriales.

Para  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$  en  $\mathbb{R}^3$ , definimos su *producto interno de Minkowski* como el número real

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \bullet_L \mathbf{y} &:= \mathbf{x}^\top \mathbf{L} \mathbf{y} \\ &= \mathbf{x} \cdot (\mathbf{L} \mathbf{y}) = (\mathbf{L} \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Recordemos que tanto en la geometría euclidiana (capítulo ??) como en la esférica (capítulo ??), las nociones métricas básicas de distancia y ángulo se definieron usando como herramienta el producto interior. Lo que el producto interior es a la forma cuadrática euclidiana ( $\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2$ ) —algo más general que, en particular, la define—, lo será ahora el producto interno de Minkowski respecto a la forma cuadrática de Lorentz (8.2); y de manera análoga a como se usó el producto interior euclidiano en las otras geometrías, el de Minkowski será fundamental para definir las nociones geométricas básicas en el plano hiperbólico y entender sus transformaciones.

En coordenadas, si  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$  y  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^\top$ , el producto interno de Minkowski toma la expresión

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \bullet_L \mathbf{y} &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3, \end{aligned}$$

y es una función de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}$ , que claramente cumple (ver siguiente ejercicio):

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \bullet_L \mathbf{y} &= \mathbf{y} \bullet_L \mathbf{x} && \text{(es simétrica),} \\ (\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) \bullet_L \mathbf{z} &= \alpha (\mathbf{x} \bullet_L \mathbf{z}) + \beta (\mathbf{y} \bullet_L \mathbf{z}) && \text{(es lineal).} \end{aligned} \quad (8.4)$$

La segunda propiedad es que la función es lineal en la primera variable al fijar la segunda. Junto con la simetría, implica que así mismo es lineal en la segunda variable y entonces se dice que es *bilineal*. Entonces también se le llama *la forma bilineal de Minkowski* o de *Lorentz* o de *Lorentz-Minkowski*; en breve, comentaremos sobre el porqué de estos personajes asociados.

---

**EJERCICIO 8.1** Demuestra las ecuaciones (8.4) para cualquier  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

---

### 8.2.1 L-norma

Así como la norma (euclidiana, vamos a especificar) se obtiene del producto interior, podemos pensar la forma cuadrática de Lorentz como una “norma”. De la fórmula clásica  $|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ , vamos a piratear la notación para la *norma de Lorentz-Minkowski*, o *L-norma*, de un vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ :

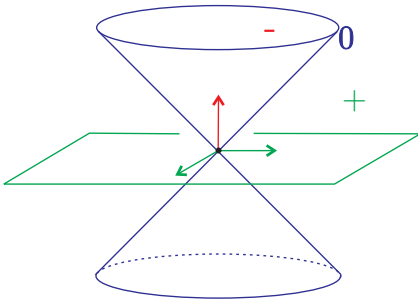
$$|\mathbf{x}|_L^2 := \mathbf{x} \bullet_L \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{L} \mathbf{x}$$

(que en coordenadas se escribe  $x^2 + y^2 - z^2$  (8.2)), donde hay que pensar el “cuadrado”, *i.e.*, el exponente 2, simplemente como notación. Pero notación afortunada pues claramente se cumple que

$$|t\mathbf{x}|_L^2 = t^2 |\mathbf{x}|_L^2,$$

de tal manera que, como ya lo habíamos remarcado para cualquier forma cuadrática, el signo se preserva en las rectas por el origen.

La gran diferencia con el caso clásico es que ahora tenemos vectores de norma negativa o cero. Démosles nombres:



Un vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  o su recta  $[\mathbf{x}]$  es  $\begin{cases} \text{espacial,} & \text{si } |\mathbf{x}|_L^2 > 0; \\ \text{temporal,} & \text{si } |\mathbf{x}|_L^2 < 0; \\ \text{luz,} & \text{si } |\mathbf{x}|_L^2 = 0. \end{cases}$

Geoméricamente, los vectores luz forman el cono sobre  $\mathbb{S}^1$  (en el plano  $z = 1$ ); los temporales están dentro del cono, y los espaciales fuera de él. Así, por ejemplo, los vectores canónicos  $\mathbf{e}_1$  y  $\mathbf{e}_2$  son espaciales, como cualquier otro vector en el plano  $xy$ ; mientras que el eje  $z$  es temporal y las líneas luz son las que tienen un ángulo de  $45^\circ$  respecto al plano  $xy$  (y con el eje  $z$ ).

#### Nota histórica

La nomenclatura que estamos usando viene de la Teoría de la Relatividad Especial que se desarrolló a principios del siglo XX. Albert Einstein es el personaje principal con quien se asocia su concepción, pero muchos otros científicos contribuyeron. Entre estos destacan como precursores el físico holandés Hendrik A. Lorentz y el matemático francés Henri Poincaré. Unos años después del famoso trabajo de Einstein de 1905, el matemático alemán Hermann Minkowski reformuló en términos geométricos la Teoría de la Relatividad Especial.<sup>2</sup> Puesto que nuestra motivación y línea de razonamiento no es la que originalmente tenían ellos, es difícil establecer aquí con precisión qué es lo que históricamente se debe a cada cuál. Nuestra asociación de nombres (Lorentz y/o

<sup>2</sup>Un buen recuento de esta historia puede verse en [1].

Minkowski) a los objetos matemáticos que han aparecido no debe entonces tomarse en forma muy literal; más bien es un homenaje y un intento de apegarse a la terminología usada en la literatura (que no es única). Sin embargo, vale la pena tratar de precisar algo sobre el uso de los términos “espacial”, “temporal” y “luz” (o quizá debía ser “lumínica”).

El problema físico básico que da lugar a la Relatividad Especial tiene que ver con cómo se relacionan distintos sistemas de referencia. Para distintos observadores, un mismo evento o sucesión de eventos físicos pueden parecer diferentes; pero debería haber una “realidad física única”. Se resuelve el dilema incluyendo el parámetro “tiempo” dentro de un continuo espacio-tiempo que permita hacer mediciones a observadores con respecto a “sus” coordenadas de tiempo y espacio, abandonando la idea de que éstas son absolutas: se relativizan. En nuestro caso ( $\mathbb{R}^3$  con el producto interno de Minkowski), las dos primeras coordenadas,  $x$  y  $y$ , son las coordenadas espaciales y la tercera,  $z$ , es la coordenada temporal (en los textos con motivación estrictamente física se usaría una  $t$  en vez de nuestra  $z$ ). Es un modelo de un universo de dos dimensiones espaciales (uno más parecido al que habitamos usaría una tercera coordenada espacial,  $z$  digamos, y una cuarta, ahora sí  $t$ , considerando entonces la forma cuadrática  $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ ). A un punto en él se le llama un *evento* (un lugar en el espacio en un tiempo dado), y una partícula, o un observador, es una curva continua estrictamente ascendente, una *curva de vida*, digamos.

Parece una contradicción pues estamos dando coordenadas absolutas, pero sólo lo son para el evento  $\mathbf{0}$ , en el origen, y suponerlo como observador estacionario es determinar que su curva de vida es el eje  $z$ . Un observador inercial (en movimiento inercial uniforme) que coincida con el evento  $\mathbf{0}$  es justo una recta por el origen. Que nada, excepto los fotones, pueda viajar a la velocidad de la luz (normalizada para que sea 1), significa que las líneas que hemos llamado luz (las del cono) son las trayectorias de los fotones que emanan de  $\mathbf{0}$  y que las posibles líneas de vida inerciales del evento  $\mathbf{0}$  son lo que hemos llamado líneas temporales (dentro del cono). Un evento espacial es, entonces, un evento sin relación posible con el  $\mathbf{0}$ , pero para un evento temporal hay la posibilidad de comunicación (por mensajes de luz, digamos).

Hasta aquí, y así de vago, medio se explican los términos o vocablos que estamos usando. Lo maravilloso es que las mismas herramientas matemáticas, y por tanto terminologías muy similares, sirvan para explicar y estudiar fenómenos aparentemente tan lejanos. Por un lado, que la velocidad de la luz es una constante irrebasable (el famoso experimento de Michelson y Morley) y su devenir en la Teoría Especial de la Relatividad, y por el otro la existencia de la geometría hiperbólica. En ambas, el producto interno de Minkowski es importante; por ejemplo, la noción de ortogonalidad que se desprende de él da, por un lado, el *plano de simultaneidad* para un observador inercial y para nosotros dará el concepto fundamental de polaridad.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>Para un enfoque más físico de la geometría en el espacio de Minkowski ver [16] y [17].

### 8.2.2 L-ortogonalidad y polaridad

Lo primero que surge naturalmente del producto interior, o que por ahí se va con la norma, es la noción euclidiana de ortogonalidad. De igual manera, de la forma bilineal de Lorentz-Minkowski podemos sacar un análogo que tendrá un importante significado geométrico.

Dos vectores  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{u}$  en  $\mathbb{R}^3$  son *L-ortogonales* si

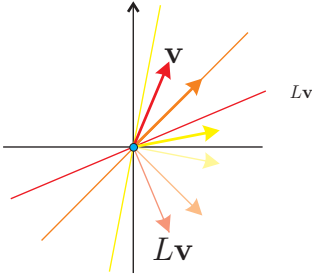
$$\mathbf{v} \bullet_L \mathbf{u} = 0.$$

Y podemos definir el *plano L-ortogonal* a  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ , como

$$\Pi_{L\mathbf{v}} := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{v} \bullet_L \mathbf{x} = 0 \}.$$

Veamos que nuestra definición de “plano L-ortogonal” es efectivamente un plano en  $\mathbb{R}^3$ , es decir, que estamos usando el vocablo “plano” de manera adecuada. Puesto que  $L$  como matriz es no singular -de hecho  $L^{-1} = L$  pues  $L$  como transformación lineal es la reflexión en el plano  $xy$ -, se tiene que

$$\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \iff L\mathbf{v} \neq \mathbf{0}.$$



Entonces, como  $\mathbf{v} \bullet_L \mathbf{x} = (L\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}$ , donde “ $\cdot$ ” sigue siendo el producto interior euclidiano, tenemos que  $\Pi_{L\mathbf{v}}$  es el plano (euclidianamente) ortogonal a  $L\mathbf{v}$  que es, efectivamente, un plano pues  $L\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ . De esta demostración podemos extraer, además del lema que viene, que si  $\mathbf{v}$  gira de la vertical hacia el plano horizontal

$xy$ , su plano L-ortogonal gira del horizontal al vertical pero en sentido contrario, pues es el euclidianamente ortogonal a su reflejado en el plano  $xy$ .

**Lema 8.1** *Cualquier plano por el origen en  $\mathbb{R}^3$  es el plano L-ortogonal de algún  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ . Además,  $\Pi_{L\mathbf{v}} = \Pi_{L\mathbf{u}}$  si y sólo si  $[\mathbf{v}] = [\mathbf{u}]$ .*

**Demostración.** Sabemos que cualquier plano por el origen  $\Pi$  es euclidianamente ortogonal a algún  $\mathbf{v}' \in \mathbb{R}^3$ . Sea  $\mathbf{v} = L^{-1}\mathbf{v}' = L\mathbf{v}'$ , entonces  $\Pi = \Pi_{L\mathbf{v}}$ . Además,  $\Pi_{L\mathbf{v}} = \Pi_{L\mathbf{u}}$  si y sólo si  $[L\mathbf{v}] = [L\mathbf{u}]$  y, como  $L$  es no singular, esto sucede si y sólo si  $[\mathbf{v}] = [\mathbf{u}]$ . □

Con este lema, podemos regresar al plano proyectivo,  $\mathbb{P}^2$ , pues para un punto  $\mathbf{p} = [\mathbf{v}]$  en él, tenemos definida una línea (la correspondiente al plano  $\Pi_{L\mathbf{v}}$ ) que llamaremos la *línea polar* de  $\mathbf{p}$ , y denotaremos  $\mathbf{p}^\perp$  (léase “p-polar”); es decir,

$$\mathbf{p}^\perp = [\mathbf{v}]^\perp := \ell_{[L\mathbf{v}]} = \{ [\mathbf{x}] \in \mathbb{P}^2 \mid \mathbf{v} \bullet_L \mathbf{x} = 0 \},$$

que, como veremos a continuación, es la línea polar respecto al círculo unitario que habíamos definido en el capítulo 2 y que entonces habíamos denotado  $\ell_{\mathbf{p}}$ . Pero además,

el lema implica que para cualquier línea proyectiva  $\ell$  existe un punto bien definido, que llamaremos su *punto polar*, denotado  $\ell^\perp$ , del cual  $\ell$  es su línea polar ( $(\ell^\perp)^\perp = \ell$ ). Veamos cómo es esta correspondencia en términos geométricos

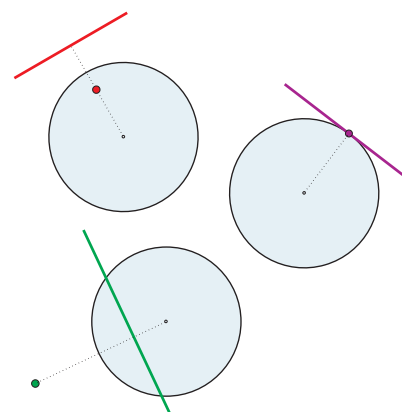
Si tomamos un punto  $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{P}^2$ , entonces su vector asociado en  $\mathbb{R}^3$  es  $\mathbf{v} = (a, b, 1)$ , cuya línea polar, por definición, tiene como polinomio homogéneo asociado a

$$\mathbf{v} \bullet_L \mathbf{x} = (a, b, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax + by - z.$$

Que nos da, de regreso en  $\mathbb{R}^2$ , haciendo  $z = 1$ , que la línea polar de  $p = (a, b)$  es

$$p^\perp : ax + by = 1$$

que, para  $(a, b) \neq (0, 0)$ , es la línea ortogonal al vector  $(a, b)$  y cuya distancia al origen es el inverso de la norma de  $(a, b)$ ; por ejemplo, para el punto  $(a, 0)$  es la recta  $x = 1/a$ . Tenemos entonces tres casos: si  $p \in \mathbb{H}^2$  (si  $p$  es *temporal*, podríamos decir) entonces  $p^\perp$  es una línea afuera del círculo unitario (es una línea *espacial*); si  $p \in \mathbb{S}^1$  (es *luz*) entonces su polar  $p^\perp$  es la tangente a  $\mathbb{S}^1$  en él (y se tiene que  $p \in p^\perp$  pues  $a^2 + b^2 = 1$ ), y si  $p$  es *espacial* (es exterior al círculo) entonces  $p^\perp$  es una línea hiperbólica (pasa por  $\mathbb{H}^2$ ).



En el párrafo anterior (que corresponde a lo hecho en el capítulo 2) nos faltaron ciertos casos proyectivos que analizar. Primero, la línea polar del origen (el centro del círculo,  $(0, 0)$ ) es precisamente la línea al infinito, definida por el polinomio homogéneo  $-z$ . Y por último, para los puntos al infinito, con vector asociado  $(a, b, 0)$ , se tiene que sus líneas polares son las líneas por el origen perpendiculares a la dirección correspondiente, con ecuación  $ax + by = 0$ .

Tenemos entonces, y en correspondencia al lema anterior, que la polaridad es una biyección entre puntos y líneas proyectivas. Además cumple el *principio de dualidad*:

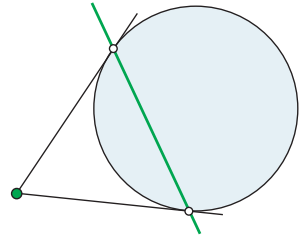
$$p \in q^\perp \Leftrightarrow q \in p^\perp, \quad (8.5)$$

pues si  $p = [\mathbf{v}]$  y  $q = [\mathbf{u}]$ , ambas condiciones son, por definición, que  $\mathbf{v} \bullet_L \mathbf{u} = 0$ ; y en este caso podemos decir entonces que los puntos  $p$  y  $q$  son (L-) *ortogonales*. Y más aún, podemos definir que dos rectas  $\eta$  y  $\xi$  (usaremos las letras griegas  $\eta$  “eta”,  $\xi$  “xi” y  $\zeta$  “dseta” para designar líneas proyectivas) son *ortogonales* si sus puntos polares lo son, es decir, si  $\eta^\perp \in \xi$  (que es equivalente a  $\xi^\perp \in \eta$ ). El caso más importante es cuando  $\eta$  y  $\xi$  son líneas hiperbólicas concurrentes, *i.e.*, cuando  $\eta \cap \xi \in \mathbb{H}^2$ , pues que sean ortogonales va a querer decir que su ángulo hiperbólico es de  $90^\circ$ ; ya es una noción métrica.

Hemos definido la polaridad de manera algebraica, pero tiene un fuerte contenido geométrico puesto que la línea polar de un punto en  $\mathbb{S}^1$  es su línea tangente y se cumple el principio de dualidad (8.5). Así, si  $\eta$  es una línea hiperbólica y  $q_1$  y  $q_2$  son sus puntos al infinito, es decir, si  $\{q_1, q_2\} = \eta \cap \mathbb{S}^1$ , entonces la intersección de las tangentes a  $\mathbb{S}^1$  en  $q_1$  y  $q_2$  es el punto polar de  $\eta$ , es decir,

$$\eta^\perp = q_1^\perp \cap q_2^\perp.$$

Pues si declaramos  $p = q_1^\perp \cap q_2^\perp$  entonces  $q_1 \in p^\perp$  y  $q_2 \in p^\perp$  por (8.5), entonces  $p^\perp$  tiene que ser la recta por  $q_1$  y  $q_2$  que es  $\eta$ , y por tanto  $\eta^\perp = (p^\perp)^\perp = p$ . E inversamente, tenemos que si  $p$  es un punto espacial, su polar es la línea hiperbólica que pasa por sus *pies* en  $\mathbb{S}^1$ , es decir, los dos puntos en  $\mathbb{S}^1$  cuyas tangentes pasan por  $p$ .




---

**EJERCICIO 8.2** Calcula los pies del punto  $(2, 0)$  en el círculo unitario encontrando la ecuación de su línea polar y sus intersecciones con  $\mathbb{S}^1$ . ¿Puedes dar una fórmula para los pies del punto  $(a, b)$  (con  $a^2 + b^2 > 1$ , por supuesto)?

**EJERCICIO 8.3** ¿Cómo construyes con regla y compás la línea polar de un punto hiperbólico? (Supón que el compás te sirve para trazar tangentes a un círculo.)

**EJERCICIO 8.4** Demuestra que dos rectas hiperbólicas son concurrentes (se intersectan dentro de  $\mathbb{H}^2$ ) si y sólo si la recta que pasa por sus polares es espacial.

**EJERCICIO 8.5** Demuestra que las líneas polares de puntos colineales son concurrentes.

**EJERCICIO 8.6** Demuestra que, dado un punto  $p \in \mathbb{H}^2$  y una recta hiperbólica  $\eta$ , existe una única recta hiperbólica  $\xi$  ortogonal a  $\eta$  y que pasa por  $p$ . (Primero olvídate de las condiciones sobre dónde están los puntos y las líneas.)

**EJERCICIO 8.7** En  $\mathbb{H}^2$ , demuestra que dos rectas ultraparalelas tienen una única recta ortogonal común.

**EJERCICIO 8.8** Demuestra que los haces ultraparalelos están formados por todas las ortogonales a una recta dada.

**EJERCICIO 8.9** ¿Cuáles son las rectas ortogonales a una recta *luz*, es decir, polar de un punto luz?

---

### 8.2.3 Ternas ortogonales

Tres puntos  $a, b, c$  en  $\mathbb{P}^2$  forman una *terna ortogonal* si dos a dos son ortogonales. Como ejemplo obvio, tenemos la *terna canónica*,  $[e_1], [e_2], [e_3]$  pues  $e_i \bullet_L e_j = 0$  para  $i \neq j$ . Obsérvese que si bien el producto interior de Minkowski no está bien definido (ni en signo) para puntos en  $\mathbb{P}^2$ , pues  $(t\mathbf{u}) \bullet_L (s\mathbf{v}) = (ts)(\mathbf{u} \bullet_L \mathbf{v})$ , y entonces depende de los representantes; la L-ortogonalidad sí lo está, pues si este producto es 0 para algún par de representantes, lo es para cualquiera.

Veremos ahora que existen muchas ternas ortogonales; tantas como líneas con un punto distinguido en el plano hiperbólico. Consideremos cualquier punto  $c \in \mathbb{H}^2$ ; empezamos con el tercer punto por analogía con la terna canónica donde  $[e_3]$  es el punto hiperbólico. Tomemos ahora cualquier punto  $b \in c^\perp$  (o, lo que es lo mismo, cualquier recta hiperbólica  $b^\perp$  que pase por  $c$ ). Y ahora sí,  $a$  queda determinado por

$$a = b^\perp \cap c^\perp. \tag{8.6}$$

Está bien definido pues  $b^\perp \neq c^\perp$  ya que la primera recta es hiperbólica (contiene a  $c$  pues  $c \in b^\perp$ ) y la segunda espacial, y además, por definición,  $a$  es ortogonal a  $b$  y a  $c$ .

Nótese que en una terna ortogonal, el punto polar a la línea por dos de ellos es el tercero; pues, *e.g.*,  $b \in a^\perp$  y  $c \in a^\perp$  implican que  $\langle bc \rangle = a^\perp$ , que es la ecuación dual de (8.6).

No es casualidad que en el ejemplo nos hayan salido dos puntos espaciales y uno temporal.

**Lema 8.2** *Sea  $a, b, c$  una terna ortogonal; entonces dos de los puntos son espaciales y uno es temporal.*

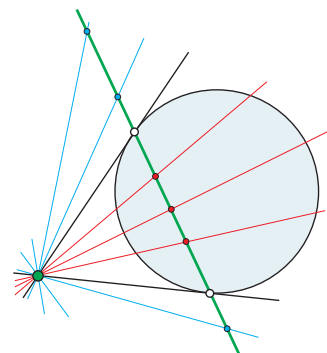
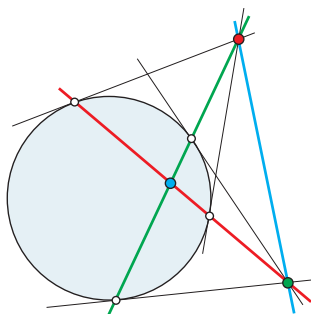
**Demostración.** Observemos primero que si uno de los puntos es hiperbólico entonces, como su línea polar es espacial y en ella están los otros dos puntos, el lema se cumple; la construcción es como arriba.

Supongamos que alguno de los puntos, digamos  $a$ , es espacial. Pongamos las rectas por  $a$  en biyección natural —por intersección— con los puntos de su línea polar  $a^\perp$ . Los dos pies de  $a$  parten los puntos de  $a^\perp$  en dos segmentos abiertos: puntos (y correspondientemente, líneas por  $a$ ) hiperbólicos, y puntos (y líneas por  $a$ ) espaciales. Sabemos que  $b$  está en  $a^\perp$  y que

$$c = a^\perp \cap b^\perp.$$

Si  $b$  es espacial, entonces la línea  $b^\perp$  es hiperbólica y por tanto también lo es  $c$ . Si  $b$  es luz ( $b \in b^\perp$ ), entonces  $c = a^\perp \cap b^\perp = b$  y no tendríamos una terna. Nótese que esto implica que no hay puntos luz en la terna pues todos sus ortogonales (y distintos) son espaciales. Y hemos terminado.  $\square$

Podemos convenir entonces que una terna ortogonal  $a, b, c$  está ordenada y tiene como punto temporal al tercero,  $c$ . Y concluir que las **ternas ortogonales están en biyección natural con las parejas incidentes punto-recta** en el plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$ , pues una terna se define al escoger un punto  $c \in \mathbb{H}^2$  junto con una recta  $b^\perp$  que pasa por él; ya que entonces  $a^\perp$  es la única ortogonal a  $b^\perp$  por  $c$  (ver Ejercicio 8.6), o bien se tiene que  $a = b^\perp \cap c^\perp$ .



**EJERCICIO 8.10** Describe todas las ternas ortogonales que tienen el origen como punto temporal.

**EJERCICIO 8.11** Encuentra una terna ortogonal que tenga al punto  $c = [1 : 1 : 2]$  como punto temporal; haz un dibujo.

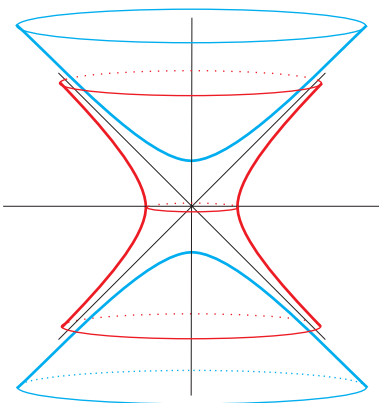
**EJERCICIO 8.12** Describe geoméricamente cómo construir con regla y compás la terna ortogonal que corresponde a un punto en el disco unitario y un segmento que pasa por él (el compás lo necesitas para trazar ortogonales euclidianas).

**EJERCICIO 8.13** Sean  $a$  y  $b$  dos puntos espaciales. Demuestra que las líneas hiperbólicas  $a^\perp$  y  $b^\perp$  son concurrentes, paralelas o ultraparalelas correspondientemente a que la línea proyectiva por  $a$  y  $b$ ,  $\langle ab \rangle$ , es espacial, lumínica (tangente a  $S^1$ ) o hiperbólica.

## 8.3 El grupo de transformaciones

Teniendo ya una multitud de ternas ortogonales en el plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$ , las subiremos a  $\mathbb{R}^3$  para construir ternas *L-ortonormales* y a partir de ellas entenderemos el grupo de transformaciones hiperbólicas. La analogía que hay que mantener en mente es que las matrices ortogonales (en el sentido euclidiano clásico) tienen como columnas a vectores que forman una base ortonormal y son justo las que preservan el producto interior.

### 8.3.1 Vectores L-unitarios y la cazuela hiperbólica



Decimos que un vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  es *L-unitario* si su *L-norma* es 1 o  $-1$ , es decir, si en valor absoluto

$$|\mathbf{x}|_L^2 = 1.$$

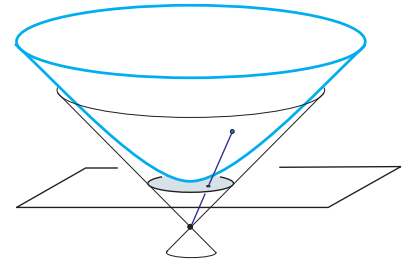
Tenemos entonces dos tipos de vectores unitarios: los temporales que forman un hiperboloide de dos hojas (el dado por la ecuación  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ ), y los espaciales que forman un hiperboloide reglado de una hoja (dado por  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ ). Esto se ve pues se obtienen, respectivamente, rotando en el eje  $z$  a las hipérbolas  $y^2 - z^2 = -1$  y

$y^2 - z^2 = 1$  que viven en el plano  $yz$ .

El cono de luz es el cono asintótico de ambos hiperboloides; por dentro se le unta el temporal de dos hojas y por fuera el espacial.



Notemos que el plano hiperbólico está en biyección natural con la hoja superior de los L-unitarios temporales, a la que llamaremos la *cazuela hiperbólica*. Pues si pensamos a  $\mathbb{H}^2$  dentro del plano  $z = 1$ , en la carta coordenada canónica como habíamos quedado, la línea por el origen correspondiente a un punto en  $\mathbb{H}^2$  es temporal e intersecta a ambas hojas de los vectores temporales unitarios, entonces le podemos asignar el punto que está en la cazuela hiperbólica y que tiene su tercera coordenada positiva. E inversamente, un punto en la cazuela hiperbólica representa un punto en el proyectivo que está en  $\mathbb{H}^2$ . Geométricamente es la proyección desde el origen.



A este modelo del plano hiperbólico (la cazuela) se le conoce a veces como “la esfera de radio imaginario”, pues son soluciones para la ecuación  $|\mathbf{x}|_{\mathbb{L}}^2 = -1$ ; pero nosotros le seguiremos llamando “la cazuela”. Representa algo más realista respecto a la geometría hiperbólica en cuanto a distancias y ángulos se refiere, que el modelo proyectivo ( $\mathbb{H}^2$  como subconjunto de  $\mathbb{P}^2$ ) que hemos venido usando; pues, por lo menos, el infinito ya se ve bien lejos: no dan ganas de pegárselo. Además, las rectas hiperbólicas se ven en la cazuela como intersecciones con planos por el origen, que son una rama de una hipérbola.

Nuestros dos modelos de  $\mathbb{H}^2$  seguirán siendo compatibles, pues la manera en que definiremos el grupo de transformaciones, a continuación, dejará fija, y actuará, también en la cazuela hiperbólica. Para no excedernos en notación, introduciendo un nuevo símbolo, abusaremos de ella **denotando a la cazuela hiperbólica también con  $\mathbb{H}^2$** ; el contexto nos dirá si nos referimos al modelo proyectivo (por ejemplo, si los puntos en  $\mathbb{H}^2$  considerados son proyectivos), o bien si es la cazuela, cuando sus elementos son vectores en  $\mathbb{R}^3$ .

### 8.3.2 Bases L-ortonormales

Una terna ordenada de vectores  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  en  $\mathbb{R}^3$  es una base L-ortonormal si los tres vectores son L-unitarios y dos a dos son L-ortogonales. Es claro que entonces la terna  $[\mathbf{u}], [\mathbf{v}], [\mathbf{w}]$  en  $\mathbb{P}^2$  es ortogonal, y por el Lema 8.2 uno de los vectores es temporal y los otros dos son espaciales. Supondremos siempre que el tercer vector,  $\mathbf{w}$ , es el que es temporal. A la matriz  $\mathbf{B} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  la llamaremos L-ortogonal, de tal manera que ternas L-ortonormales y matrices L-ortogonales se corresponden. (Como las bases ortonormales euclidianas y las matrices ortogonales.)

Obsérvese que la base canónica  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  es L-ortonormal (y la matriz identidad  $\mathbf{I}$  es L-ortogonal).

La maravilla que cumplen las matrices L-ortogonales, como en el caso de las matrices ortogonales respecto al producto interior, es que al pensarlas como transformación lineal, dejan invariante la forma bilineal de Lorentz.

**Teorema 8.3** Sea  $B$  una matriz de  $3 \times 3$ ; entonces son equivalentes:

- i)  $B$  es  $L$ -ortogonal;
- ii)  $\mathbf{x} \bullet_L \mathbf{y} = (B\mathbf{x}) \bullet_L (B\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ ;
- iii)  $B^\top LB = L$ .

**Demostración.** Casi por  $n$ -ésima vez pero ahora con dos variables, hagamos el cálculo de

$$(B\mathbf{x}) \bullet_L (B\mathbf{y}) = (B\mathbf{x})^\top L (B\mathbf{y}) = (\mathbf{x}^\top B^\top) (LB) \mathbf{y} = \mathbf{x}^\top (B^\top LB) \mathbf{y}.$$

Es claro entonces que (iii)  $\Rightarrow$  (ii).

Expresemos la matriz  $B^\top LB$  en términos de las columnas de  $B = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ ,

$$\begin{aligned} B^\top LB &= B^\top L(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = B^\top (L\mathbf{u}, L\mathbf{v}, L\mathbf{w}) \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{u}^\top \\ \mathbf{v}^\top \\ \mathbf{w}^\top \end{pmatrix} (L\mathbf{u}, L\mathbf{v}, L\mathbf{w}) \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{u}^\top L\mathbf{u} & \mathbf{u}^\top L\mathbf{v} & \mathbf{u}^\top L\mathbf{w} \\ \mathbf{v}^\top L\mathbf{u} & \mathbf{v}^\top L\mathbf{v} & \mathbf{v}^\top L\mathbf{w} \\ \mathbf{w}^\top L\mathbf{u} & \mathbf{w}^\top L\mathbf{v} & \mathbf{w}^\top L\mathbf{w} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{u} \bullet_L \mathbf{u} & \mathbf{u} \bullet_L \mathbf{v} & \mathbf{u} \bullet_L \mathbf{w} \\ \mathbf{v} \bullet_L \mathbf{u} & \mathbf{v} \bullet_L \mathbf{v} & \mathbf{v} \bullet_L \mathbf{w} \\ \mathbf{w} \bullet_L \mathbf{u} & \mathbf{w} \bullet_L \mathbf{v} & \mathbf{w} \bullet_L \mathbf{w} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nótese que las seis condiciones para que  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  sean una base  $L$ -ortonormal (tres de normalidad y tres de ortogonalidad) son precisamente que las entradas de esta matriz simétrica sean justo las de la matriz de Lorentz,  $L$  (donde es importante nuestra convención de que  $\mathbf{w}$  sea el temporal). Así que (iii)  $\Leftrightarrow$  (i).

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). Puesto que  $\mathbf{u} = B\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{v} = B\mathbf{e}_2$  y  $\mathbf{w} = B\mathbf{e}_3$ , entonces si se cumple (ii) se tiene que esta última matriz es  $L$ , pues la base canónica es  $L$ -ortonormal.  $\square$

Más que por su demostración, que es muy simple, este teorema es tal por su fuerza. Nos da un subgrupo de  $GL(3)$  asociado a la forma bilineal de Lorentz (ver Ejercicio 8.14), que se denota  $O(2, 1)$  pues se dice que la forma bilineal de Lorentz tiene *índice*  $2, 1$  (por el número de “más” y “menos”). Generalizan estos grupos a los grupos ortogonales. Al preservar la forma bilineal de Lorentz, estas matrices preservan los “estratos” de su forma cuadrática. En particular manda vectores luz en vectores luz, temporales en temporales y a los espaciales en ellos mismos. Pero aún más, preservan las *superficies de nivel*, definidas por  $|\mathbf{x}|_L^2 = \text{cte}$ . Nuestro interés está en el subgrupo de las que preservan la cazuela hiperbólica, y esto es fácil de detectar pues la tercera columna, como vector, debe apuntar hacia arriba.

Sea

$$\mathcal{H}(2) := \{B \in GL(3) \mid B^T L B = L; B \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 > 0\}.$$

Estas matrices son las L-ortogonales que tienen su vector temporal unitario precisamente en la cazuela  $\mathbb{H}^2$ ; las llamaremos *matrices hiperbólicas*. Forman un grupo (Ejercicio 8.15) de transformaciones lineales de  $\mathbb{R}^3$  que mandan a  $\mathbb{H}^2$  en sí mismo pues para  $B \in \mathcal{H}(2)$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{H}^2 \Rightarrow |\mathbf{x}|_L^2 = -1 \Rightarrow |B\mathbf{x}|_L^2 = B\mathbf{x} \bullet_L B\mathbf{x} = \mathbf{x} \bullet_L \mathbf{x} = |\mathbf{x}|_L^2 = -1;$$

y además  $B\mathbf{x}$  tiene tercera coordenada positiva como  $B\mathbf{e}_3$ , pues el segmento de  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{e}_3$  es mandado al segmento de  $B\mathbf{x}$  a  $B\mathbf{e}_3$  y en éste la forma cuadrática de Lorentz es estrictamente negativa y por lo tanto no cruza el cono de luz.

Veremos que este grupo  $\mathcal{H}(2)$  de *matrices hiperbólicas* se identifica naturalmente con el grupo Hip(2) de transformaciones hiperbólicas que definimos geoméricamente en 8.1.3 (las transformaciones proyectivas que preservan el círculo unitario). Como una matriz en  $GL(3)$  define una transformación proyectiva, tenemos una función natural  $\mathcal{H}(2) \rightarrow \text{Hip}(2)$ , pues, como ya hemos dicho, las matrices L-ortogonales mandan al cono de luz ( $\mathbb{S}^1$ ) y al conjunto de las líneas temporales ( $\mathbb{H}^2$ ) en sí mismos. Esta función es una inclusión (inyectiva) pues dos matrices definen la misma transformación proyectiva sólo cuando son múltiplos; si dos matrices distintas L-ortogonales fueran múltiplos, la constante que las relaciona tendría que ser  $-1$  pues sus vectores son L-unitarios, y entonces sólo una está en  $\mathcal{H}(2)$ , la que tiene entrada  $3,3$  positiva. Así que (podemos pensar que)

$$\mathcal{H}(2) \subset \text{Hip}(2). \quad (8.7)$$

Antes de entrar de lleno a la prueba de la igualdad conviene ver algunas de las propiedades de las matrices hiperbólicas y algunos ejemplos.

**EJERCICIO 8.14** Demuestra que para cualquier matriz  $A \in GL(3)$  se tiene que  $G_A := \{B \mid B^T A B = A\}$  es un subgrupo de  $GL(3)$ ; obsérvese que también hay que demostrar que los elementos de  $G_A$  son matrices invertibles. ¿Cuánto vale el determinante de estas matrices?

**EJERCICIO 8.15** Demuestra que  $\mathcal{H}(2)$  es un grupo.

**EJERCICIO 8.16** Dada una matriz

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix},$$

demuestra que  $B^T L B = L$  si y sólo si

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & -\gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & -\gamma_2 \\ -\alpha_3 & -\beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

**EJERCICIO 8.17** Exhibe una transformación hiperbólica que mande al punto  $[1/2, 1/2, 1]$  en el origen. (Usa el Ejercicio 8.11 y el anterior.)

### 8.3.3 Homogeneidad e isotropía

Veremos que todos los puntos de  $\mathbb{H}^2$  son iguales (equivalentes según el grupo) — propiedad conocida como *homogeneidad*— y que, al fijar un punto, también son equivalentes todas las direcciones por él —*isotropía*—.

Consideremos una terna ortogonal  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  en  $\mathbb{P}^2$ . La podemos levantar a una base L-ortonormal como sigue. A  $\mathbf{c}$  le corresponde un único vector  $\mathbf{w}$  en la cazuela hiperbólica. A  $\mathbf{b}$  (y respectivamente a  $\mathbf{a}$ ) le corresponde una recta por el origen en  $\mathbb{R}^3$  que, por ser espacial (“acostadita”), intersecta al hiperboloide de L-unitarios espaciales justamente en dos puntos. A saber, si  $\mathbf{b} = [\mathbf{b}]$  estos son

$$\pm \left( \sqrt{|\mathbf{b}|_{\mathbb{L}}^2} \right)^{-1} \mathbf{b},$$

que tiene sentido pues  $|\mathbf{b}|_{\mathbb{L}}^2 > 0$ . Llamemos  $\mathbf{v}$  a cualquiera de ellos de tal manera que nuestras dos opciones son  $\pm \mathbf{v}$ . Y, respectivamente, sea  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$  tal que  $|\mathbf{u}|_{\mathbb{L}}^2 = 1$  y  $\mathbf{a} = [\mathbf{u}]$ . Tenemos entonces que las cuatro matrices

$$(\pm \mathbf{u}, \pm \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

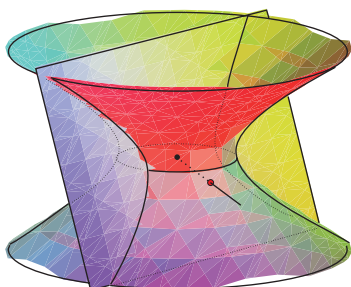
están en  $\mathcal{H}(2)$  y mandan a la terna canónica  $[\mathbf{e}_1], [\mathbf{e}_2], [\mathbf{e}_3]$  en la terna ortogonal  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  con que empezamos.

Consideremos el ejemplo más sencillo que es la terna canónica. Si tenemos que  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = ([\mathbf{e}_1], [\mathbf{e}_2], [\mathbf{e}_3])$ , las cuatro matrices a las que llegamos en el párrafo anterior son

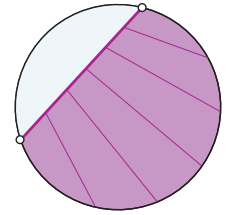
$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que, efectivamente, dejan fijo al origen y a cada uno de los dos ejes (estamos pensando en la carta canónica, por supuesto), pero permutan los cuatro cuadrantes, les cambian orientación a los ejes. Forman además un grupito (el diédrico de orden dos,  $\mathbf{D}_2$ ). Escoger entonces a alguna de las cuatro matrices tiene que ver con cómo se orientan las rectas  $\mathbf{b}^\perp$  y  $\mathbf{a}^\perp$ . Veámoslo.

El vector  $\mathbf{v}$  (seguimos pensando en el de arriba) no sólo define a la recta proyectiva  $[\mathbf{v}]^\perp = \mathbf{b}^\perp$  sino también al plano en  $\mathbb{R}^3$  que habíamos denotado con  $\Pi_{\mathbf{L}\mathbf{v}} (: \mathbf{v} \bullet_{\mathbb{L}} \mathbf{x} = 0)$ , pero además le escoge un lado: en el que él está (bien definido, pues  $\mathbf{v} \notin \Pi_{\mathbf{L}\mathbf{v}}$  por ser espacial). De tal manera que la otra opción,  $-\mathbf{v}$ , escoge el lado opuesto de  $\Pi_{\mathbf{L}\mathbf{v}}$ .



Definamos entonces una *línea hiperbólica orientada* como una línea hiperbólica junto con uno de sus dos lados en  $\mathbb{H}^2$  distinguido. Y ahora sí, a una línea hiperbólica orientada podemos asociarle de manera continua y única un vector unitario espacial: el que está del mismo lado de su correspondiente plano por el origen que el lado distinguido de la recta (pensando que  $\mathbb{H}^2$  está en la carta coordenada canónica contenida en  $\mathbb{R}^3$ ).

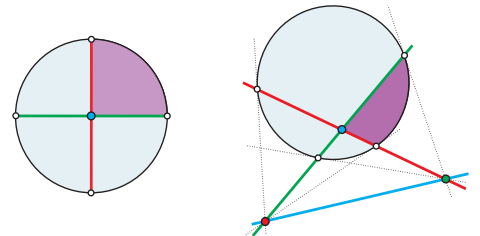
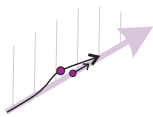


Las dos observaciones son pertinentes antes de seguir adelante. Primera, que nuestra nueva definición de orientación para rectas es equivalente a la —quizá más natural por ser intrínseca— de distinguir una dirección preferida de circulación para sus puntos. La equivalencia depende de adoptar una convención. *La regla de la autopista*, que —con perdón de los ingleses— reza: “siempre se rebasa por la izquierda”. Así, si dos puntos viajan por una recta en su dirección intrínseca distinguida pero el que va atrás va más rápido, puede rebasar al lento por la izquierda distinguiendo entonces un lado; e inversamente, con un lado distinguido hay sólo una dirección intrínseca que lo usa para rebases civilizados. Sin embargo, esto no funciona para el plano proyectivo donde una recta no corta en dos “lados” pero sí se puede orientar intrínsecamente (el segundo rebase sería por el lado contrario), poniendo en duda nuestra nueva definición que involucra rectas proyectivas. Ésta es la segunda observación, junto que no hay problema. Pues sólo estamos hablando de líneas hiperbólicas que sí cortan al disco  $\mathbb{H}^2$  en dos pedazos.

Por ejemplo, el eje de las  $x$  ( $[\mathbf{e}_2]^\perp$ ) con su orientación positiva tiene como vector asociado a  $\mathbf{e}_2$ ; y  $\mathbf{e}_1$  tiene como recta hiperbólica orientada al lado derecho del eje  $y$ , dándole orientación intrínseca hacia abajo, ¡la negativa! Pero queda bien, pues si intersectamos los dos lados distinguidos, obtenemos el *primer cuadrante*. En general, a una base L-ortogonal  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  le podemos asociar un *cuadrante hiperbólico*: la intersección de los lados distinguidos de las dos rectas hiperbólicas ortogonales orientadas que determinan  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ ; su esquina es  $[\mathbf{w}]$ . (Obsérvese que es la imagen del primer cuadrante bajo la matriz L-ortonormal  $\mathbf{B} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ .) Así que un cuadrante hiperbólico es una terna ortogonal con la información adicional de uno de sus cuatro cuadrantes distinguido; y la base canónica tiene asociado el primer cuadrante. Hemos demostrado, junto con el consabido argumento de “contagio grupal” —eso de que con una que vaya a todas entonces ya todas van contra todas—, el siguiente teorema.

**Teorema 8.4** *Las matrices hiperbólicas,  $\mathcal{H}(2)$ , están en correspondencia biyectiva natural —asociándoles su imagen del primer cuadrante— con los cuadrantes hiperbólicos. En particular, dados dos cuadrantes hiperbólicos existe una única transformación hiperbólica que manda a uno en el otro.*  $\square$

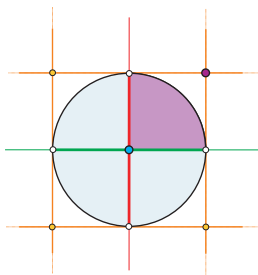
Formalmente, nos adelantamos al usar indistintamente los términos matriz y trans-



formación en las dos frases del teorema. Pero ya estamos en posición de concluir con soltura su equivalencia.

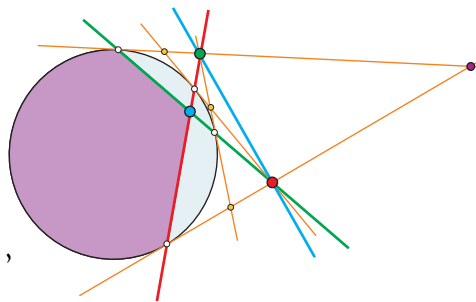
**Proposición 8.5**  $\text{Hip}(2) = \mathcal{H}(2)$ . Es decir, cualquier transformación  $g \in \text{Pr}(2)$  que preserva el círculo (tal que  $g(\mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1$ ) está determinada por una matriz  $B \in \mathcal{H}(2)$ .

**Demostración.** Ya vimos que  $\mathcal{H}(2) \subset \text{Hip}(2)$  en (8.7), demostremos ahora la otra contención. Consideremos la terna ortogonal canónica  $[e_1], [e_2], [e_3]$ ; añadámosle las líneas hiperbólicas  $[e_1]^\perp$  y  $[e_2]^\perp$  así como las cuatro *tangentes* (i.e., líneas polares) a sus puntos al infinito (hiperbólico, por supuesto). En esta configuración aparecen sólo cuatro nuevos puntos de las intersecciones de las tangentes (pues la definición de terna ortogonal obliga a que las seis líneas consideradas se partan en dos tercias concurrentes en los puntos espaciales de la terna). En nuestro caso, estos cuatro nuevos puntos son  $(\pm 1, \pm 1)$ , que podemos identificar naturalmente con los cuatro cuadrantes, de tal manera que al primero le corresponde el  $(1, 1)$ . Así que al primer cuadrante lo podemos identificar con la cuarteta de puntos en  $\mathbb{P}^2$ :  $[e_0], [e_1], [e_2], [e_3]$



(donde  $e_0 = e_1 + e_2 + e_3$ ), que fue nuestra cuarteta de batalla en las lides proyectivas y que llamábamos la cuarteta canónica.

Si  $g \in \text{Pr}(2)$  preserva el círculo unitario, manda a sus tangentes en tangentes. Manda entonces las cuatro tangentes consideradas en cuatro equivalentes que dan información más que suficiente para demostrar que  $g([e_1]), g([e_2]), g([e_3])$  es una terna ortogonal y que  $g([e_0])$  identifica a uno de sus cuadrantes. Por el teorema anterior (la primera aseveración), existe  $B \in \mathcal{H}(2)$  que le hace lo mismo a la cuarteta canónica. Por el Teorema de 4 en 4,  $g$  y (la que define)  $B$  son la misma transformación. □



Tenemos también el subgrupo de transformaciones hiperbólicas que preservan orientación, que denotaremos  $\mathcal{H}^+(2)$ . Es fácil ver que es el de matrices con determinante positivo y más precisamente, que

$$\mathcal{H}^+(2) = \{B \in \mathcal{H}(2) \mid \det B = 1\}.$$

Para este grupo hiperbólico *orientado*, el teorema equivalente al 8.4 es que  $\mathcal{H}^+(2)$  está en correspondencia con las parejas “punto en línea orientada” y que actúa simple y transitivamente en ellas.

**EJERCICIO 8.18** Encuentra la matriz de la transformación hiperbólica orientada que deja invariante al eje  $x$ , con todo y su orientación, y “traslada” el  $(0, 0)$  al  $(1/2, 0)$ .

**EJERCICIO 8.19** Encuentra una matriz hiperbólica que manda al origen,  $[\mathbf{e}_3]$ , en el punto  $(1/2, 1/2)$  y a la recta  $[\mathbf{e}_2]^\perp$  en la recta  $x = y$ .

**EJERCICIO 8.20** Observa que las rectas hiperbólicas  $(\eta : 2x + y = 1)$  y  $(\xi : x + y = 1)$  son ortogonales. Identifica las cuatro matrices que mandan al eje  $x$  y al eje  $y$  respectivamente en ellas.

### 8.3.4 Rotaciones y ángulos

Veamos ahora ejemplos concretos, empezando por las transformaciones hiperbólicas orientadas que fijan el origen.

Como se debió concluir en el Ejercicio 8.10, las extensiones del origen  $[\mathbf{e}_3]$  a una terna ortogonal tienen como puntos espaciales dos ortogonales en la recta al infinito, es decir, de la forma  $\mathbf{b} = [s : t : 0]$  y  $\mathbf{a} = [-t : s : 0]$ . Al levantarlos a unitarios (dividir entre la raíz de su L-norma, que en este caso coincide con la euclidiana) de tal manera que, juntos, preserven la orientación, obtenemos una matriz

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}^+(2).$$

Representa a la *rotación por un ángulo  $\theta$  alrededor del origen* (pensando en  $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{P}^2$ , de la manera canónica). Éstas son todas las transformaciones hiperbólicas orientadas que dejan fijo el origen, y hemos demostrado la ecuación (8.1), que  $O(2) \subset \mathcal{H}^+(2)$  son las transformaciones que fijan al origen.

Para obtener las rotaciones en cualquier otro punto  $\mathbf{c} \in \mathbb{H}^2$ , usamos el viejo truco de conjugar. Existe alguna matriz  $\mathbf{B} \in \mathcal{H}^+(2)$  que manda a  $\mathbf{c}$  en  $[\mathbf{e}_3]$ ; entonces la *rotación de un ángulo  $\theta$  alrededor de  $\mathbf{c}$*  debe ser

$$R_{\mathbf{c},\theta} := \mathbf{B}^{-1} R_\theta \mathbf{B},$$

pues manda a  $\mathbf{c}$  en  $[\mathbf{e}_3]$ ; rota ahí, y luego regresa a  $\mathbf{c}$  a su lugar original. Ya podemos definir ángulos en el plano hiperbólico usando a las rotaciones.

Sean  $\eta$  y  $\xi$  dos rectas hiperbólicas orientadas que se intersectan en  $\mathbf{c} \in \mathbb{H}^2$ . Definimos el *ángulo de  $\eta$  a  $\xi$*  como la única  $\theta \in [0, 2\pi)$  tal que  $R_{\mathbf{c},\theta}$  manda a  $\eta$  en  $\xi$  con las orientaciones correspondientes. Ésta no es una definición muy útil, pues para medir hay que encontrar alguna matriz de  $\mathcal{H}^+(2)$  que mande a  $\mathbf{c}$  en el origen y ahí calcular. Sin embargo, veremos en la siguiente sección que hay una manera mucho más fácil de encontrar el *ángulo*.

**EJERCICIO 8.21** Demuestra que el ángulo es invariante bajo transformaciones hiperbólicas.

**EJERCICIO 8.22** Demuestra que  $f \in \mathcal{H}^+(2)$  tiene un punto fijo en  $\mathbb{H}^2$  si y sólo si  $f$  es una rotación.

**EJERCICIO 8.23** Sea  $f \in \mathcal{H}^+(2)$  la rotación de un ángulo  $\pi/2$  en el punto  $(1/\sqrt{2}, 0)$ . Sin usar matrices, demuestra que permuta cíclicamente a los puntos  $(1, 0)$ ,  $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ ,  $(-1, 0)$  y  $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ . Recuerda que una transformación proyectiva está determinada por su valor en cuatro puntos, así que  $f$  ya lo está. Calculando dónde se intersectan los lados opuestos de este cuadrilátero, observa que se pueden encontrar los valores precisos de  $f(0, 1)$  y  $f(0, -1)$ . ¿Cuáles son?

**EJERCICIO 8.24** Usando el Teorema de 4 en 4 (ver ejercicio anterior), demuestra que dado un punto  $c \in \mathbb{H}^2$  y dos rectas orientadas que pasan por él, hay una única  $f \in \mathcal{H}^+(2)$  que deja fijo a  $c$  y manda una recta en la otra. (Ojo, si las rectas no son ortogonales no hay una permutación cíclica como en el ejercicio anterior; pero puedes echar mano de que por un punto pasa una única ortogonal a una recta dada).

### 8.3.5 Traslaciones

Una *traslación* (a semejanza de las otras dos geometrías) deja fija una recta orientada y preserva orientación; queda entonces determinada por a dónde manda un punto en ella (pues es la información suficiente para determinar un elemento de  $\mathcal{H}^+(2)$ ). Como dos puntos en el plano hiperbólico,  $p_0$  y  $p_1$  digamos, determinan una recta  $\eta = \langle p_0, p_1 \rangle$ , entonces definen una traslación.

Veamos un caso particular: trasladar al origen  $(0, 0)$  el punto  $c = (c, 0)$  con  $-1 < c < 1$  (donde estamos abusando de la notación  $c$  como punto o como número). La recta  $[\mathbf{e}_2]^\perp$  con su orientación se queda fija y, por tanto,  $\mathbf{e}_2$  debe ser la segunda columna. El punto espacial que nos falta es

$$\mathbf{a} = c^\perp \cap [\mathbf{e}_2]^\perp = \left( \frac{1}{c}, 0 \right) = [1 : 0 : c].$$

Debemos ahora levantar y normalizar nuestra terna y obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &: = \frac{1}{\sqrt{|(1, 0, c)|_{\mathbb{L}}^2}} (1, 0, c) = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} (1, 0, c) \\ \mathbf{v} &: = \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{w} &: = \frac{1}{\sqrt{|(c, 0, 1)|_{\mathbb{L}}^2}} (c, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} (c, 0, 1). \end{aligned}$$

Debemos entonces definir la traslación hiperbólica de  $(0, 0)$  a  $(c, 0)$  como:

$$T_c := \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & \sqrt{1-c^2} & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

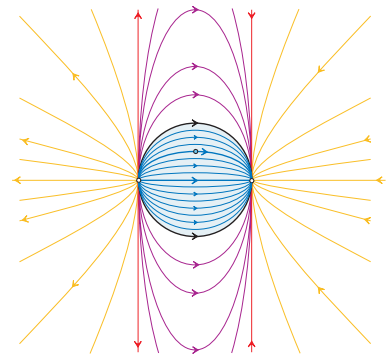


que está bien (no hay que cambiar signos de  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ ), pues su determinante es 1.

Todas las matrices  $T_c$ , con  $-1 < c < 1$ , forman un subgrupo de  $\mathcal{H}^+(2)$  que llamaremos  $\mathcal{T}_{e_2}$ , como acrónimo de *traslaciones en la recta*  $[e_2]^\perp$ . Para ver que es un grupo basta observar que todos sus elementos tienen como puntos fijos a  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$  y  $[e_2]$  (y por tanto preserva líneas verticales); en particular, la identidad es  $T_0$ . Podemos además orientar a  $\mathcal{T}_{e_2}$  en el sentido creciente de su parametro  $c$ . Si tomamos cualquier punto en la recta hiperbólica  $[e_2]^\perp$ , es decir, de la forma  $(s, 0)$  con  $-1 < s < 1$ , sus imágenes bajo este grupo, *i.e.*, su *órbita*, es de nuevo la recta hiperbólica  $[e_2]^\perp$ ; pero podemos extender nuestro análisis de cómo actúa  $\mathcal{T}_{e_2}$  al resto de  $\mathbb{P}^2$ .

Si tomamos otro punto en  $\mathbb{H}^2$  (el  $(0, 1/2)$  por ejemplo), su órbita es la mitad de una elipse con eje mayor el segmento del  $(-1, 0)$  al  $(1, 0)$ . Para verlo, notemos que la ecuación de estas elipses es  $x^2 + by^2 = 1$  para alguna  $b > 1$  (en el ejemplo es  $x^2 + 4y^2 = 1$ ); que, como elipse, se queda invariante bajo  $T_c$ , pues no es difícil ver que se tiene

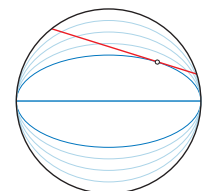
$$T_c^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} T_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

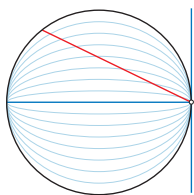


que, recordemos, es cómo cambia la matriz asociada al polinomio bajo la transformación proyectiva  $T_c$ . Así que si un punto cumple la ecuación, también lo hace su imagen bajo cualquier  $T_c$ . Notemos que lo anterior también funciona para  $b \leq 1$ , extendiéndose nuestro análisis a todo el plano proyectivo, dándonos elipses altas e hipérbolas que se parten en dos órbitas. Éstas también se orientan del  $(-1, 0)$  al  $(1, 0)$ ; excepto sus dos tangentes a  $\mathbb{S}^1$ , cuando  $b = 0$ , donde aparece  $[e_2]$  como punto singular. ¿Puedes hacer un dibujo de lo que pasa alrededor de  $[e_2]$ ?

Este grupo de traslaciones  $\mathcal{T}_{e_2} = \{T_c \mid -1 < c < 1\}$  nos servirá más adelante para medir distancias, pues las traslaciones deberían depender nada más de una recta orientada y una distancia. Pero por el momento podemos sacar dos conclusiones sobre distancias, aún sin haberla definido.

Las elipses interiores ( $x^2 + by^2 = 1$  con  $b > 1$ ) deben ser los conjuntos de puntos a una distancia fija de la recta  $[e_2]^\perp$ , pues queremos que las transformaciones de  $\mathcal{H}(2)$  preserven distancias. Así que una recta ultraparalela a  $[e_2]^\perp$  alcanza su distancia mínima a  $[e_2]^\perp$  en el punto en que es tangente a una de estas elipses y en ambas direcciones la distancia crece indefinidamente pues corta a todas las elipses exteriores.





Y como una recta paralela a  $[\mathbf{e}_2]^\perp$  (que tiene punto al infinito  $(1,0)$ , digamos) cruza a todas las elipses, pues su tangente ahí es vertical, entonces tiene puntos tan cercanos a  $[\mathbf{e}_2]^\perp$  como queramos. La distancia a  $[\mathbf{e}_2]^\perp$  tiende a cero por un lado y a  $\infty$  por el otro. Por supuesto, esto mismo pasa para cualquier par de rectas ultraparalelas, y paralelas, pues con el grupo podemos llevar a  $[\mathbf{e}_2]^\perp$  en alguna de ellas.

**EJERCICIO 8.25** Demuestra que para cualquier  $B \in \mathcal{H}^+(2)$  existen  $T_c \in \mathcal{T}_{\mathbf{e}_2}$  y rotaciones en el origen  $R_\alpha, R_\theta$  tales que  $B = R_\theta T_c R_\alpha$ . (Piensa geoméricamente, y las coordenadas polares son útiles.)

**EJERCICIO 8.26** Sean  $\mathbf{a} = (0,0)$ ,  $\mathbf{b} = (1/2,0)$  y  $\mathbf{c} = (0,1/2)$ . Demuestra que

$$T_{\mathbf{a} \leftarrow \mathbf{b}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T_{\mathbf{c} \leftarrow \mathbf{a}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

donde, en general, denotamos por  $T_{\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{p}}$  la traslación que manda a  $\mathbf{p}$  en  $\mathbf{q}$  (ambos en  $\mathbb{H}^2$ ).

**EJERCICIO 8.27** Con la notación del ejercicio anterior, demuestra que  $T_{\mathbf{c} \leftarrow \mathbf{a}} T_{\mathbf{a} \leftarrow \mathbf{b}} \neq T_{\mathbf{c} \leftarrow \mathbf{b}}$  calculando qué le pasa al punto polar de la recta  $\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ .

**EJERCICIO 8.28** Siguiendo con la notación anterior, sea  $\alpha$  el ángulo de la recta  $\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$  (con dirección de  $\mathbf{b}$  a  $\mathbf{c}$ ) con la recta  $\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$  (hacia  $\mathbf{a}$ ). Demuestra que  $\alpha < \pi/4$  (calculando que  $\cos \alpha = 2/\sqrt{7}$ ) y por tanto que la suma de los ángulos internos del triángulo  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  suman menos que  $\pi$ .

**EJERCICIO 8.29** Demuestra que  $T_{\mathbf{c} \leftarrow \mathbf{a}} T_{\mathbf{b} \leftarrow \mathbf{a}} \neq T_{\mathbf{b} \leftarrow \mathbf{a}} T_{\mathbf{c} \leftarrow \mathbf{a}}$  calculando a dónde mandan al origen  $\mathbf{a}$ ; haz un dibujo.

**EJERCICIO 8.30** Demuestra que

$$T_{\mathbf{c} \leftarrow \mathbf{b}} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 24 & 3 & -12 \\ -11 & 24 & 16 \\ -16 & 12 & 29 \end{pmatrix}.$$

**EJERCICIO 8.31** Demuestra que  $T_{\mathbf{a} \leftarrow \mathbf{c}} T_{\mathbf{c} \leftarrow \mathbf{b}} T_{\mathbf{b} \leftarrow \mathbf{a}}$  es una rotación  $R_\theta$  en  $\mathbf{a}$ , donde  $\theta = 2\alpha - \pi/2$ . Concluye que las traslaciones hiperbólicas **no** son un grupo.

**EJERCICIO 8.32** Vamos a cambiar de notación y  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  y  $\mathbf{d}$  serán reales. Sea  $\mathbf{p} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{H}^2$ ; sean  $c = \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}$  y  $d = \sqrt{1 - c^2}$ . ¿Cuál es la interpretación geométrica de  $c$  y  $d$ ? Demuestra que la matriz de la traslación del origen  $(0,0)$  a  $\mathbf{p}$  es

$$\frac{1}{dc^2} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^2 + d\mathbf{b}^2 & \mathbf{a}\mathbf{b}(1-d) & \mathbf{a}c^2 \\ \mathbf{a}\mathbf{b}(1-d) & d\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 & \mathbf{b}c^2 \\ \mathbf{a}c^2 & \mathbf{b}c^2 & c^2 \end{pmatrix}.$$

(Te conviene escribir las rotaciones en términos de  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  y  $c$ .)

**EJERCICIO 8.33** Da un ejemplo de dos rotaciones cuya composición es una rotación. Piensa geoméricamente.

**EJERCICIO 8.34** Demuestra que  $R_{q,\pi}R_{p,\pi} = T_{q \leftarrow p}^2$ .

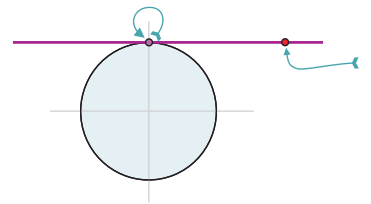
**EJERCICIO 8.35** Demuestra que si  $f \in \mathcal{H}^+(2)$  deja fijo un punto espacial  $\eta$  (i.e.,  $f(\eta) = \eta$ ), entonces  $f$  es una traslación en  $\eta^\perp$  o una rotación de  $\pi$  en un punto de  $\eta^\perp$ .

### 8.3.6 Traslaciones horocíclicas

Las rotaciones dejan fijos puntos temporales y las traslaciones puntos espaciales. A las transformaciones hiperbólicas orientadas que dejan fijo un único punto luz las llamaremos *traslaciones horocíclicas*; queremos ver que existen.

Las traslaciones dejan fijos dos puntos luz, pues al dejar fija una línea hiperbólica orientada dejan fijos sus puntos al infinito. Las traslaciones horocíclicas sólo dejan fijo un punto luz y al haz de paralelas por él lo “traslada”, lo mueve en su dirección ortogonal sin dejar fijo ningún punto hiperbólico.

Para fijar ideas, consideremos al punto luz  $p_0 = (0, 1)$  (o, proyectivamente,  $p_0 = [0 : 1 : 1]$ ). Queremos construir una *traslación horocíclica*  $f$  centrada en  $p_0$ , es decir, que sólo fija  $p_0$ . Entonces debe mandar a su recta polar ( $p_0^\perp : y = 1$ ) en sí misma, y por tanto debe mandar a  $[e_1] \in p_0^\perp$  (que de hecho es su punto al infinito en la carta coordenada canónica) en un punto de la forma  $x = (x, 1)$  para alguna  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 0$  (abusaremos de la notación, usando igualdades para las inclusiones de las cartas coordenadas canónicas  $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{P}^2$ , así que escribiremos  $x = (x, 1) = [x : 1 : 1]$  y nos facilitará la escritura). Para fijar ideas, veamos el caso particular en que  $[e_1] (= \infty)$  va al punto  $2 = (2, 1)$ ; el caso general se deja como ejercicio.



La transformación  $f$  restringida a la recta proyectiva  $p_0^\perp$  es una función de Moebius que deja fijo a  $p_0 (= 0)$ . Si dejara fijo algún otro punto, éste sería espacial y tendríamos entonces una traslación hiperbólica común y corriente, pero queremos construir una traslación horocíclica. Entonces  $f$  restringida a  $p_0^\perp$  es una traslación (de Moebius, con un solo punto fijo, recuérdese) que, junto con  $f(\infty) = 2$ , implica (véase Ejercicio 8.36) que

$$f(x) = \frac{2x}{x+2}. \tag{8.8}$$

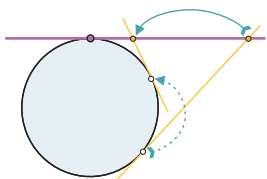
Ya tenemos un punto de la terna ortogonal que definirá a  $f$ . Sea

$$a = f([e_1]) = (2, 1).$$

Queremos ahora encontrar  $b = f([e_2])$ . Sabemos que  $b$  tiene que estar en la línea polar de  $a$ , que tiene como ecuación

$$a^\perp : 2x + y = 1,$$

nos falta encontrar otra recta que pase por él.



La idea clave es que al saber cómo actúa  $f$  en la recta  $p_0^\perp$ , sabemos, en principio, cómo calcular la función  $f$  en el círculo luz. Dado un punto luz  $p \in \mathbb{S}^1$ ,  $p \neq p_0$ , su tangente intersecta a la recta  $p_0^\perp$  en el punto  $p^\perp \cap p_0^\perp$  que corresponde a una  $x$ . Al aplicar  $f$ , tangentes deben ir en tangentes, así que  $f(p)$  debe ser un pie de  $f(x)$ . Pero uno de los pies ya está fijo, es  $p_0$ , así que  $f(p)$  tiene que ser el otro. Los ejemplos importantes para nuestro problema son los puntos  $p_1 := (1, 0)$  y  $p_{-1} := (-1, 0)$  pues sus tangentes pasan por  $[e_2]$ ; son sus pies. El cálculo con  $p_{-1}$  sale más bonito. Hagámoslo.

$$\begin{aligned} p_{-1}^\perp \cap p_0^\perp &= (-1, 1) = -1; \\ f(-1) &= -2 = (-2, 1); \\ (-2, 1)^\perp &: -2x + y = 1. \end{aligned}$$

Y ahora debemos encontrar las intersecciones de esta recta con  $\mathbb{S}^1$  para deducir el pie faltante de  $(-2, 1)$ . Sustituyendo  $y = 2x + 1$  en el polinomio de  $\mathbb{S}^1$ , se obtiene

$$x^2 + (2x + 1)^2 - 1 = x(5x + 4).$$

Estas raíces son  $x = 0$  (ya lo sabíamos) y  $x = -4/5$ , lo que nos da (al sustituir en la ecuación de  $(-2, 1)^\perp$  o de  $\mathbb{S}^1$ )  $y = -3/5$ , y por tanto que

$$f(p_{-1}) = f(-1, 0) = -1/5(4, 3) = [4 : 3 : -5].$$

Y ahora sí, al intersectar su polar  $(4x + 3y = -5)$  con  $a^\perp$  ( $2x + y = 1$ ), obtenemos a dónde debe ir  $[e_2]$ :

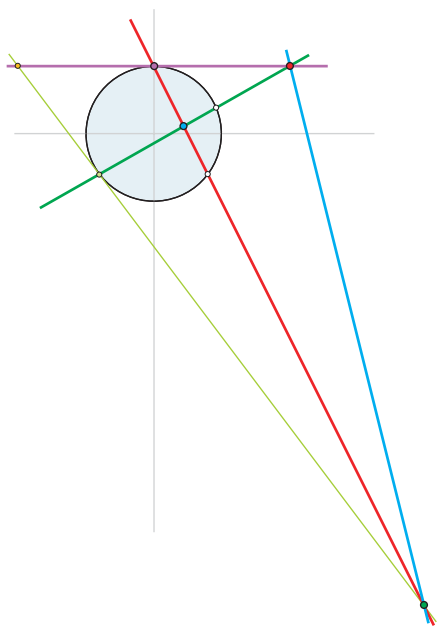
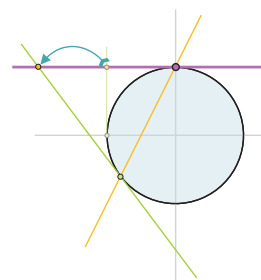
$$b = f([e_2]) = (4, -7) = [4 : -7 : 1].$$

Finalmente, resolviendo otro sistema de  $2 \times 2$ , encontramos el punto temporal de la terna ortogonal como

$$c = a^\perp \cap b^\perp = 1/9(4, 1) = [4 : 1 : 9].$$

Levantamos a vectores L-unitarios, ajustamos los signos de los espaciales para eliminar la ambigüedad de 4, y obtenemos que la matriz de  $f$  tiene que ser

$$H_2 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 4 & 7 & 1 \\ 4 & -1 & 9 \end{pmatrix}.$$



Es claro que el 2 que tomamos de ejemplo no tiene nada de particular y que para cualquier  $\mathbf{a} \neq 0$ , se obtiene una traslación horocíclica que manda a  $[\mathbf{e}_1]$  en  $(\mathbf{a}, 1)$ . Dejamos como ejercicio ver que su matriz es

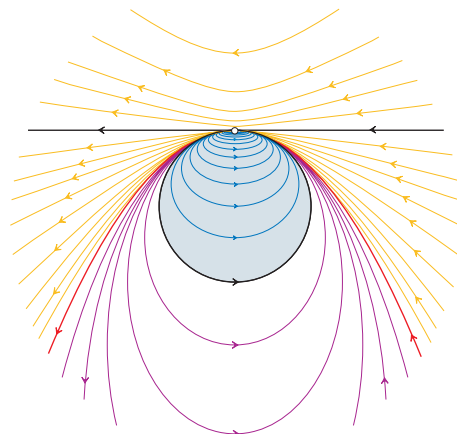
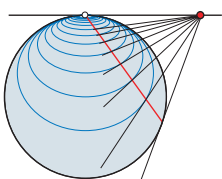
$$H_{\mathbf{a}} = \frac{1}{2\mathbf{a}^2} \begin{pmatrix} 2\mathbf{a}^2 & -2\mathbf{a} & 2\mathbf{a} \\ 2\mathbf{a} & 2\mathbf{a}^2 - 1 & 1 \\ 2\mathbf{a} & -1 & 2\mathbf{a}^2 + 1 \end{pmatrix}. \tag{8.9}$$

Cuando  $\mathbf{a}$  tiende a  $\infty$ ,  $H_{\mathbf{a}}$  tiende a la identidad, I. Así que si la incluimos, obtenemos un subgrupo de  $\mathcal{H}^+(2)$ : las *traslaciones horocíclicas centradas en*  $\mathbf{p}_0 = [0 : 1 : 1]$ , que denotaremos  $\mathcal{T}_{\mathbf{p}_0}$  (la notación extiende a puntos luz la de las traslaciones centradas en puntos espaciales) y que es isomorfo a las traslaciones de la recta real (en nuestro caso, identificada con  $\mathbb{P}^1 - \{0\}$ ). Orientado de  $\infty$  a 1, veremos a continuación cuáles son sus órbitas. A las que quedan dentro de  $\mathbb{H}^2$  se les llama *horociclos*, y demostraremos que son las curvas que intersectan ortogonalmente a todas las rectas del haz paralelo centrado en  $\mathbf{p}_0$ .

Las órbitas de  $\mathcal{T}_{\mathbf{p}_0}$  son las cónicas de la familia que tiene como “círculo de curvatura” en el  $(0, 1)$  al círculo unitario  $\mathbb{S}^1$ . Además de ser tangentes a  $\mathbb{S}^1$  en el  $(0, 1)$ : éste es el círculo que más se les parece infinitesimalmente ahí (ver Ejercicios 8.41 y 8.42). Para demostrarlo, las definimos por la familia de polinomios

$$P_{\mathbf{b}}(x, y) = \mathbf{b}x^2 + (y + \mathbf{b} - 1)^2 - \mathbf{b}^2,$$

donde  $(0, 1 - \mathbf{b})$  es su centro. Esta familia tiene a la recta doble  $(y - 1)^2$  para  $\mathbf{b} = 0$ ; consta de elipses para  $\mathbf{b} > 0$ ; incluye a la parábola  $x^2 + 2y - 2$  cuando  $\mathbf{b} \rightarrow \infty$ , y da hipérbolas para  $\mathbf{b} < 0$ . Con un cálculo directo, aunque engorroso, se puede ver que son invariantes bajo las transformaciones  $H_{\mathbf{a}}$ ; es decir, que cumplen  $\tilde{P}_{\mathbf{b}} \circ H_{\mathbf{a}} = \tilde{P}_{\mathbf{b}}$ , donde  $\tilde{P}_{\mathbf{b}}$  es su polinomio homogeneizado. Entonces, si un punto está en una de estas cónicas, toda su órbita también lo está.



Para  $0 < \mathbf{b} < 1$ , la elipse  $P_{\mathbf{b}}(x, y)$  es un horociclo. Las tangentes a los horociclos en sus intersecciones con una recta hiperbólica que pasa por  $\mathbf{p}_0$  concurren en un punto de  $\mathbf{p}_0^\perp$ , pues son la imagen bajo alguna  $H_{\mathbf{a}}$  de las correspondientes horizontales que concurren en  $[\mathbf{e}_1]$ . A saber, tal recta es  $[\mathbf{a}]^\perp$  para algún  $[\mathbf{a}] \in \mathbf{p}_0^\perp$ .

Hemos exhibido a las traslaciones horocíclicas correspondiendo a las transformaciones de Moebius de una recta tangente al círculo luz que tienen como único punto fijo al de tangencia (ver Ejercicios 8.36 y 8.38). Veremos en la siguiente sección que esto no es casualidad pues nuestro razonamiento se extiende a cualquier transformación de Moebius que fije el punto de tangencia. Pero, por el momento, concluyamos con que ya hemos descrito todas las transformaciones hiperbólicas orientadas.

**Teorema 8.6** *Sea  $f \neq \text{id}$  una transformación hiperbólica que preserva orientación; entonces  $f$  es una rotación, una traslación o una traslación horocíclica.*

**Demostración.** Nótese primero que hay que evitar la identidad pues ésta califica para las tres clases. Sea  $B \in \mathcal{H}^+(2)$  la matriz asociada a  $f$ . Puesto que toda matriz de  $3 \times 3$  tiene al menos un vector propio, entonces  $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  tiene un punto fijo. Si este punto fijo es temporal entonces es una rotación.

Supongamos ahora que el punto fijo,  $\alpha$  digamos, es espacial. Sean  $q_1$  y  $q_2$  los pies de  $\alpha$ . Como  $f(\alpha) = \alpha$ , estos pies van en sí mismos. Si se quedan fijos, *i.e.*,  $f(q_i) = q_i$ , entonces  $f$  es una traslación. La única otra posibilidad es que  $f$  los permute. En este caso, consideremos la función  $f$  restringida a la recta  $\alpha^\perp$ . Es una transformación de Moebius ahí, que permuta dos puntos pero manda a los dos segmentos (el temporal y el espacial) en sí mismos. Por el Ejercicio 8.43, tiene un punto temporal fijo y entonces es una rotación de  $\pi$  en ese punto.

Finalmente, si el único punto fijo de  $f$  es luz, entonces  $f$  es por definición una traslación horocíclica.  $\square$

**EJERCICIO 8.36** Demuestra que si una transformación de Moebius tiene como único punto fijo al 0 entonces es de la forma  $\frac{\alpha x}{x+\alpha}$  para algún  $\alpha \neq 0$ , que es la imagen del infinito.

**EJERCICIO 8.37** Como calentamiento para el caso general, encuentra la matriz de la traslación horocíclica alrededor de  $p_0 = (0, 1)$  que manda a  $[e_1]$  en el punto  $(1, 1)$ . Sigue los pasos del ejemplo en el texto.

**EJERCICIO 8.38** Demuestra que la matriz de (8.9) es la traslación horocíclica centrada en  $p_0 = (0, 1)$  que manda a  $[e_1]$  en el punto  $(\alpha, 1)$ . (Hay una demostración constructiva y, al menos, una teórica donde necesitas el siguiente ejercicio; supónlo cierto.)

**\*EJERCICIO 8.39** Demuestra que el polinomio característico de  $H_\alpha$  es  $-(\lambda - 1)^3$ .

**EJERCICIO 8.40** Usando al Ejercicio 8.38, encuentra una fórmula para expresar cualquier traslación horocíclica.

**EJERCICIO 8.41** Considera a la elipse canónica  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  parametrizada por  $\theta \mapsto p(\theta) = (a \cos \theta, b \sin \theta)$ . Para cada  $\theta \neq 0$ , sea  $C_\theta$  el círculo que pasa por los puntos  $p(\theta)$ ,  $p(-\theta)$  y  $p(0) = (a, 0)$ . Demuestra que la abscisa del centro del círculo  $C_\theta$  tiende a  $(a^2 - b^2)/a$  cuando  $\theta$  tiende a 0. El círculo límite es el *círculo de curvatura* de la elipse en el punto  $(a, 0)$ . Con la misma idea se puede definir el círculo de curvatura en cualquier otro punto y para otras cónicas.

**EJERCICIO 8.42** Demuestra que  $S^1$  es el círculo de curvatura de la elipse  $P_b(x, y) = bx^2 + y^2 + 2(b-1)y - 2b + 1$ , con  $b > 0$ , en el punto  $(0, 1)$ .

**EJERCICIO 8.43** Demuestra que una transformación de Moebius que manda a un segmento en sí mismo, pero intercambia sus extremos, tiene un punto fijo.

### 8.3.7 Transformaciones hiperbólicas y de Moebius (su isomorfismo)

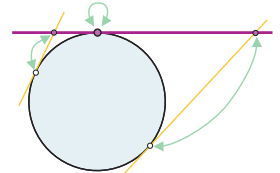
Las transformaciones de Moebius han aparecido como herramienta en nuestro estudio de las transformaciones hiperbólicas, y como ya dijimos, no es por casualidad. Esta sección estará dedicada a demostrar su estrechísima relación.

**Teorema 8.7** *El grupo de transformaciones hiperbólicas es naturalmente isomorfo, como grupo, al de transformaciones de Moebius, es decir,*

$$\mathcal{H}(2) \simeq \text{Pr}(1).$$

La idea básica es identificar el círculo al infinito de  $\mathbb{H}^2$ , con la recta proyectiva  $\mathbb{P}^1$ . De hecho, ya lo hicimos con bastante éxito en la sección anterior tomando el punto fijo  $p_0 = (0, 1)$ , y definiendo geoméricamente una biyección  $\mathbb{S}^1 \longleftrightarrow \mathbb{P}^1$  al intersectar  $p_0^\perp$  con las tangentes, que podemos escribir:

$$\begin{aligned} \varphi &: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 (= p_0^\perp) \\ \varphi(p) &= \begin{cases} p^\perp \cap p_0^\perp & \text{para } p \neq p_0 \\ p_0 & \text{para } p = p_0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (8.10)$$



Nos conviene encontrar su expresión explícita en coordenadas pues la usaremos hacia el final de la demostración.

Estamos identificando a  $\mathbb{P}^1$  con la recta  $y = 1$  en  $\mathbb{R}^2$ , que en  $\mathbb{P}^2$  está dada por la ecuación homogénea  $y = z$ ; y la manera natural de hacerlo es mediante la inclusión que en coordenadas homogéneas toma la forma  $[\lambda : \mu] \mapsto [\lambda : \mu : \mu]$ . Dado  $p = (\alpha, \beta) \in \mathbb{S}^1$ , queremos encontrar el punto  $p^\perp \cap p_0^\perp$ . Sabemos que  $p^\perp$  está determinado por la ecuación lineal homogénea  $\alpha x + \beta y - z = 0$ . Al sustituir  $z = y$ , obtenemos la ecuación

$$\alpha x + (\beta - 1)y = 0,$$

cuya solución es  $[x : y] = [1 - \beta : \alpha]$ ; es decir  $p^\perp \cap p_0^\perp = [1 - \beta : \alpha : \alpha]$ . Esto no tiene sentido para  $\beta = 1$ , pues  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{S}^1$  implica que  $\alpha = 0$  y no se debe, ni se puede, hablar de  $[0 : 0]$ . Sin embargo, si suponemos que  $\beta \neq \pm 1$  se tiene, puesto que  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ , que

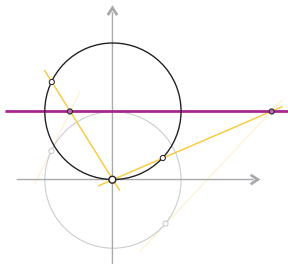
$$\begin{aligned} [1 - \beta : \alpha] &= [(1 + \beta)(1 - \beta) : (1 + \beta)\alpha] \\ &= [1 - \beta^2 : (1 + \beta)\alpha] = [\alpha^2 : (1 + \beta)\alpha] = [\alpha : 1 + \beta]. \end{aligned}$$

Tenemos entonces que nuestra identificación del círculo unitario con la línea proyectiva tiene que ser

$$\begin{aligned} \varphi &: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \\ \varphi(\alpha, \beta) &= \begin{cases} [1 - \beta : \alpha] & \text{para } \beta \neq 1 \\ [\alpha : 1 + \beta] & \text{para } \beta \neq -1 \end{cases}, \end{aligned} \quad (8.11)$$

que aunque esté expresada de manera distinta en dos grandes pedazos (cada uno el círculo menos un punto), se tiene que en su intersección coinciden.

Un corolario importante de esta “talacha” que acabamos de hacer es que la identificación de  $\mathbb{S}^1$  con  $\mathbb{P}^1$  que estamos usando coincide con la clásica **proyección estereográfica**. Pues nótese que la última fórmula se puede pensar en dos tiempos. En su versión en  $\mathbb{R}^2$ , la función  $(\alpha, \beta) \mapsto (\alpha, \beta + 1)$  es simplemente trasladar una unidad hacia arriba. Y luego se proyectiviza a cada punto del círculo trasladado, que se puede interpretar como tomar la intersección de su recta por el origen (en donde quedó el polo sur) con la recta canónica  $y = 1$  identificada con  $\mathbb{P}^1$  (en el origen hay que cambiar de definición y tomar el límite de las líneas: la tangente que intersecta en el punto al infinito). Así que la función  $\varphi$  coincide con la proyección desde el polo sur a la recta horizontal por el centro del círculo, justo la llamada proyección estereográfica.



Una vez establecida la correspondencia entre  $\mathbb{S}^1$  y  $\mathbb{P}^1$ , conviene simplificar nuestra notación. Volvamos a pensar en  $\mathbb{P}^1$  como la recta real extendida y para  $x \in \mathbb{P}^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  (que también pensaremos como  $x \in \mathbb{p}_0^\perp$ ) denotemos:

$$p_x := \varphi^{-1}(x) \in \mathbb{S}^1,$$

en concordancia con el uso que dimos a  $p_0, p_1$  y  $p_\infty$  en la sección anterior.

Tenemos que demostrar ahora que al identificar así a  $\mathbb{S}^1$  con  $\mathbb{P}^1$ , las transformaciones hiperbólicas y las transformaciones de Moebius se corresponden. Es decir, que para cualquier  $f \in \mathcal{H}(2)$ , la transformación  $\mu_f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  definida por la ecuación

$$\mu_f(x) = \varphi(f(p_x))$$

es de Moebius. Y al revés, que es como vamos a proceder, que para cualquier transformación de Moebius  $\mu$ , existe una transformación hiperbólica  $f_\mu$  tal que

$$f_\mu(p_x) = p_{\mu(x)}.$$

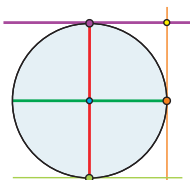
Ya hemos avanzado en esto. Para las transformaciones de Moebius que fijan únicamente al 0, ya lo hicimos. Y las mismas ideas funcionan para el caso general. Demostremos que dada una transformación de Moebius  $\mu$ , entonces la función

$$f_\mu : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$$

$$f_\mu(p_x) = p_{\mu(x)}$$

se extiende a una transformación hiperbólica. De nuevo, el punto será encontrar una terna ortogonal adecuada.

Sabemos que  $\mu$  está determinada por sus valores en 0, 1 e  $\infty$ . Sean entonces  $q_0 := p_{\mu(0)}$ ,  $q_1 := p_{\mu(1)}$  y  $q_\infty := p_{\mu(\infty)}$  los puntos correspondientes en  $\mathbb{S}^1$ . Como la terna ortogonal canónica se define en términos de la “terna luz” canónica,  $p_0, p_1, p_\infty$ , como sigue



$$[e_1] = p_0^\perp \cap p_\infty^\perp;$$

$$[e_2] = [e_1]^\perp \cap p_1^\perp;$$

$$[e_3] = [e_2]^\perp \cap [e_1]^\perp;$$



Entonces definimos

$$\begin{aligned} \mathbf{a} & : = \mathbf{q}_0^\perp \cap \mathbf{q}_\infty^\perp; \\ \mathbf{b} & : = \mathbf{a}^\perp \cap \mathbf{q}_1^\perp; \\ \mathbf{c} & : = \mathbf{b}^\perp \cap \mathbf{a}^\perp. \end{aligned}$$

Esta terna se levanta a cuatro ternas L-ortogonales; pero es fácil ver que sólo una de ellas manda a nuestros tres puntos como queremos. Observemos que el cuarto punto de la cuarteta proyectiva canónica  $[\mathbf{e}_0] = [\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3]$  también se define como  $[\mathbf{e}_0] = \mathbf{p}_0^\perp \cap \mathbf{p}_1^\perp$ , así que hay que mandarlo a  $\mathbf{q}_0^\perp \cap \mathbf{q}_1^\perp$  para que  $f \in \mathcal{H}(2) \subset \text{Pr}(2)$  quede determinada.

Por lo tanto, la función  $f \in \mathcal{H}(2)$ , diseñada para cumplir

$$f(\mathbf{p}_x) = \mathbf{p}_{\mu(x)} (= \mathbf{q}_x) \quad \text{para } x = 0, 1, \infty, \tag{8.12}$$

existe y es única. Pero nos falta demostrar que su extensión a todo  $\mathbb{S}^1$  es como la transformación de Moebius  $\mu$  manda; es decir, que se cumple la ecuación anterior para cualquier  $x \in \mathbb{P}^1$ . Esto, en notación funcional, equivale a probar que  $f \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \mu$ , pues recuérdese que  $\varphi^{-1}(x) = \mathbf{p}_x$ ; así que nos queda por demostrar que

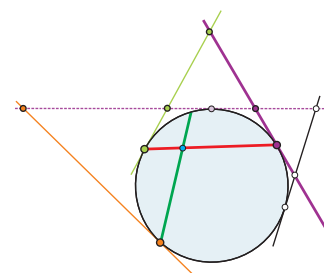
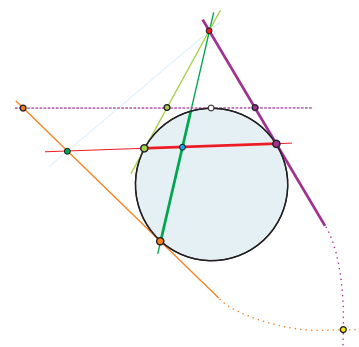
$$\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = \mu. \tag{8.13}$$

Y esto es equivalente a probar que  $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$  es una transformación proyectiva de la recta  $\mathbf{p}_0^\perp$  en sí misma, pues ya coincide con  $\mu$  en la terna canónica (8.12).

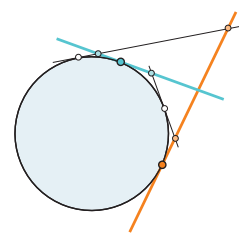
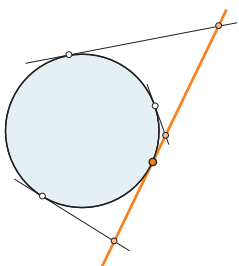
El caso en que  $f(\mathbf{p}_0) = \mathbf{p}_0$ , es decir, que  $\mu(0) = 0$ , es fácil, y casi se vio en la sección anterior. Pues entonces  $f$  es una función proyectiva de la recta  $\mathbf{p}_0^\perp$  en sí misma que, es lo que bastará demostrar, es igual a  $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ , porque  $f$  preserva tangencia (o, en general, polaridad). Veamos. Para cualquier  $x \neq 0$  se tiene que  $f \circ \varphi^{-1}(x) = f(\mathbf{p}_x) \neq f(\mathbf{p}_0) = \mathbf{p}_0$  y entonces, usando la definición original de  $\varphi$  (8.10), se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi(f(\mathbf{p}_x)) & = f(\mathbf{p}_x)^\perp \cap \mathbf{p}_0^\perp = f(\mathbf{p}_x)^\perp \cap f(\mathbf{p}_0)^\perp \\ & = f(\mathbf{p}_x^\perp) \cap f(\mathbf{p}_0^\perp) = f(\mathbf{p}_x^\perp \cap \mathbf{p}_0^\perp) = f(x). \end{aligned} \tag{8.14}$$

El caso general en que  $f(\mathbf{p}_0) \neq \mathbf{p}_0$  requiere más trabajo, pues  $f$  manda, proyectivamente, a la línea  $\mathbf{p}_0^\perp$  en otra línea (a saber,  $\mathbf{q}_0^\perp = f(\mathbf{p}_0)^\perp = f(\mathbf{p}_0^\perp)$ ), y para obtener  $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$  hay que “bajarla” o “untarla” al círculo y volverla a “trepar” a  $\mathbf{p}_0^\perp$ . Para  $x \neq 0$ , lo que sí sabemos es que tanto  $f(x) (\in \mathbf{q}_0^\perp)$  como  $\varphi(f(\mathbf{p}_x)) (\in \mathbf{p}_0^\perp)$  están en la línea  $f(\mathbf{p}_x)^\perp$ ; lo primero porque  $x \in \mathbf{p}_x^\perp$  y lo segundo por definición de  $\varphi$ . Esta situación cae en el esquema general de una correspondencia natural que se establece entre las líneas tangentes al círculo, que llamaremos *correspondencia tangencial*. Nos conviene liberarnos un rato del problema que traemos, con todo y su notación que nos obstruye la visión, y establecer esto último con calma y sin la presión de demostrar.



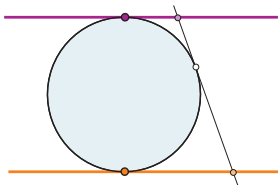
Notemos que lo único que tiene  $p_0$  de especial es que facilita los cálculos, pero para cualquier otro punto en  $\mathbb{S}^1$ ,  $q$  digamos, hay una biyección natural  $\varphi_q : \mathbb{S}^1 \rightarrow q^\perp$  que deja fijo a  $q$  y manda cualquier otro  $p \in \mathbb{S}^1$  a  $p^\perp \cap q^\perp$  (compárese con (8.10)). Su inversa es simplemente mandar un punto  $y \in q^\perp$  a **su otro pie** en  $\mathbb{S}^1$  ( $q$  es el pie fijo, y se queda ahí, parado); es lo que habíamos llamado “untar” a  $q^\perp$  en el círculo. Lo podemos volver a levantar a cualquier otra línea tangente — $p^\perp$  digamos, con  $p \in \mathbb{S}^1$ —, y obtenemos una biyección entre las dos líneas tangentes: su *correspondencia tangencial*,  $\varphi_p \circ \varphi_q^{-1}$ . Dicho de otra manera y genéricamente,  $y \in q^\perp$  corresponde tangencialmente a  $x \in p^\perp$  si y sólo si la línea  $\langle x, y \rangle$  es tangente a  $\mathbb{S}^1$ . Nótese que es importante pensar el punto en su línea, pues si  $z = p^\perp \cap q^\perp$  (que es el único caso para que lo genérico no funcione) entonces  $z \in p^\perp$  corresponde a  $q \in q^\perp$  mientras que  $z \in q^\perp$  corresponde a  $p \in p^\perp$  (son sus dos pies).



Puesto que la correspondencia tangencial surge, en el fondo, de identificaciones con un objeto único —el círculo—, es fácil ver que conmutan, es decir, que la composición de dos de ellas es otra; y es en ese sentido que usamos el término en singular. El punto medular para concluir con el teorema es demostrar que estas correspondencias entre líneas proyectivas son muy bien portadas.

**Proposición 8.8** *La correspondencia tangencial entre dos tangentes a  $\mathbb{S}^1$  es una transformación proyectiva.*

**Demostración.** Es claro que las transformaciones hiperbólicas preservan la correspondencia tangencial, pues esta no sólo está definida entre tangentes sino en base a tangentes (de  $\mathbb{S}^1$ , por supuesto). Por tanto, podemos escoger nuestro par de rectas  $y$ , por conjugación —o contagio grupal—, si probamos la proposición ahí, será cierta para cualquier par.



Pensando en  $\mathbb{R}^2$ , consideremos a  $p_0^\perp$  y  $p_\infty^\perp$  parametrizadas, ambas, por la primera coordenada (la segunda es 1 o  $-1$  respectivamente). Dado  $p = (\alpha, \beta) \in \mathbb{S}^1$ , vimos al principio de la sección que le corresponde  $(1 - \beta)/\alpha$  en  $p_0^\perp$ , pero además vimos (8.11) que para  $\beta \neq \pm 1$  esto es igual a  $\alpha/(1 + \beta)$ . Sustituyendo  $y = -1$  en la ecuación de  $p^\perp$  ( $\alpha x + \beta y = 1$ ) se ve que a  $p$  le corresponde  $(1 + \beta)/\alpha$  en  $p_\infty^\perp$ . De tal manera que la correspondencia tangencial entre  $p_0^\perp$  y  $p_\infty^\perp$  se expresa en parámetros como  $x \leftrightarrow 1/x$ , que es de Moebius.  $\square$

Una observación que no podemos dejar pasar es que esto último, junto con el comentario que sigue a (8.11), implica que la proyección estereográfica del eje  $x$  a  $\mathbb{S}^1$  desde el polo sur, seguida de la proyección estereográfica desde el polo norte de regreso a  $\mathbb{R}$ , es la función  $x \mapsto 1/x$ .

Ahora sí, tenemos todos los elementos para concluir la demostración del teorema.

**Demostración.** [ $\mathcal{H}(2) \simeq \text{Pr}(1)$ ] Si regresáramos a la frase donde nos desviamos de la demostración, (después de (8.13)) concluiríamos que  $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$  es  $f$  seguida de la correspondencia tangencial de  $f(p_0^\perp)$  a  $p_0^\perp$ , y que por tanto  $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$  es proyectiva; pero aprovechemos la distracción para recapitular y concluir de un solo golpe.

Para una transformación proyectiva  $\mu$  de  $p_0^\perp$  en sí misma construimos, usando la identificación  $\varphi: \mathbb{S}^1 \rightarrow p_0^\perp$ , una transformación hiperbólica  $f \in \mathcal{H}(2)$  tal que  $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$  coincide con  $\mu$  en tres puntos. Estábamos en demostrar que  $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$  también es proyectiva pues, por el Teorema de 3 en 3, esto es equivalente a que coincida con  $\mu$ . Lo haremos ahora en general, mimetizando el caso que ya habíamos concluido con éxito (8.14).

...Dibujo

Sea  $q = f^{-1}(p_0) \in \mathbb{S}^1$  para que  $f(q) = p_0$  y  $f$  sea una transformación proyectiva de  $q^\perp$  en  $p_0^\perp$ . Entonces, para cualquier  $x \in p_0^\perp$  tal que  $q \neq p_x = \varphi^{-1}(x) \in \mathbb{S}^1$ , se tiene, puesto que  $f(p_x) \neq p_0$ , que

$$\begin{aligned} \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) &= \varphi(f(p_x)) = f(p_x)^\perp \cap p_0^\perp \\ &= f(p_x)^\perp \cap f(q)^\perp = f(p_x^\perp) \cap f(q^\perp) = f(p_x^\perp \cap q^\perp). \end{aligned}$$

Nótese que  $p_x^\perp \cap q^\perp$  es la imagen de  $x \in p_0^\perp$  bajo la correspondencia tangencial de  $p_0^\perp$  a  $q^\perp$ ; entonces hemos expresado  $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$  como la composición de dos transformaciones proyectivas y por tanto es proyectiva. Concluimos entonces que

$$\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = \mu. \quad (8.15)$$

De aquí en adelante nada más falta comentar detalles. Obsérvese primero que en el último párrafo no se usó sino hasta la última línea de dónde viene  $f$ ; es cierto entonces que para cualquier  $f \in \mathcal{H}(2)$  la transformación  $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$  que va de  $p_0^\perp$  en sí misma, definida por conjugación con  $\varphi$ , es proyectiva. Así que, identificando a  $p_0^\perp$  con  $\mathbb{P}^1$ , como lo hicimos con cuidado al principio de la sección, tenemos una función

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(2) &\rightarrow \text{Pr}(1) \\ f &\mapsto \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} \end{aligned}$$

cuya inversa es la que se llevó la parte constructiva de la demostración, y que (se deduce fácilmente de (8.15) despejando  $f$ ) se escribe

$$\begin{aligned} \text{Pr}(1) &\rightarrow \mathcal{H}(2) \\ \mu &\mapsto \varphi^{-1} \circ \mu \circ \varphi. \end{aligned}$$

Tenemos entonces la biyección natural del teorema. Pero además es un *isomorfismo de grupos* pues en ambos sentidos preserva la composición (justo por estar definidas como conjugación). Por ejemplo,

$$g \circ f \mapsto \varphi \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1} = (\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}).$$

□

---

**EJERCICIO 8.44** Encuentra las matrices de las transformaciones hiperbólicas que mandan a la terna luz canónica  $p_0, p_1, p_\infty$  respectivamente en

$$\begin{array}{ccc} [1 : \sqrt{3} : 2], & [1 : -\sqrt{3} : 2], & [-1 : 0 : 1]; \\ (0, 1), & (-1, 0), & (1, 0); \\ [4 : 3 : 5], & [-4 : 3 : 5], & [0 : -1 : 1]. \end{array}$$

**EJERCICIO 8.45** Demuestra que la función inversa de  $\varphi$  (8.11) tiene la forma

$$\varphi^{-1}([\lambda : \mu]) = \frac{1}{\lambda^2 + \mu^2} (2\lambda\mu, \mu^2 - \lambda^2).$$

**EJERCICIO 8.46** Recuerda de la Sección 6.2.5 la clasificación de transformaciones de Moebius; ¿a qué tipo de transformaciones hiperbólicas corresponden?

**EJERCICIO 8.47** Demuestra que si  $f \in \mathcal{H}(2)$  invierte orientación, entonces es una reflexión (deja fija, punto a punto, a una línea hiperbólica llamada su espejo, e invierte sus dos lados) o es un paso (una reflexión seguida de una traslación en el espejo).

**EJERCICIO 8.48** Demuestra que dos líneas hiperbólicas son ortogonales si y sólo si sus extremos forman una cuarteta armónica (identificando al círculo al infinito con  $\mathbb{P}^1$ ).

**EJERCICIO 8.49** ¿Qué tipo de transformación se obtiene de la composición de dos reflexiones?

---

## 8.4 Métrica

Vamos ya a acabar de definir las nociones básicas de ángulo y distancia en  $\mathbb{H}^2$  de tal manera que el grupo las preserve. Conviene pensar y hacer las cosas formales en el modelo de la cazuela hiperbólica  $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^3$ .

### 8.4.1 Ángulos

Ya definimos ángulo con base en las rotaciones, que debía ser llamado el *ángulo orientado*, pues se definió como el ángulo de la rotación que lleva una recta en otra y toma valores entre  $-\pi$  y  $\pi$  o bien entre  $0$  y  $2\pi$ . No es simétrico sino antisimétrico, pues la inversa de esa rotación (menos el ángulo) nos regresa a la original. Y esta noción que en el origen hiperbólico,  $\mathbf{e}_3$ , coincide con la euclidiana se difundió a todo  $\mathbb{H}^2$  por medio del grupo  $\mathcal{H}(2)$ . Veremos ahora cómo calcular fácilmente su versión simétrica, el ángulo con valores entre  $0$  y  $\pi$ , para dos rectas orientadas.

En la Sección 8.3 vimos la correspondencia natural entre vectores L-unitarios espaciales y rectas hiperbólicas orientadas; denotémosla con  $\mathbf{u} \leftrightarrow \mathbf{u}^\perp$ , donde  $\mathbf{u}^\perp$  denota

ahora una recta hiperbólica orientada. En el “origen hiperbólico”,  $\mathbf{e}_3$ , esta correspondencia es la euclidiana; una recta orientada por  $\mathbf{e}_3$  es (la intersección con) un plano vertical y su vector asociado es su ortogonal (con tercera coordenada igual a 0). Y como para estos vectores el producto interior euclidiano corresponde al de Lorentz-Minkowski se tiene que

$$\angle(\mathbf{u}^\perp, \mathbf{v}^\perp) = \arccos(\mathbf{u} \bullet_L \mathbf{v}) \tag{8.16}$$

correponde a nuestra definición previa usando al grupo  $SO(2) \subset \mathcal{H}(2)$ .

Simplemente hay que extender esta fórmula a cualquier par de rectas hiperbólicas orientadas  $\mathbf{u}^\perp$  y  $\mathbf{v}^\perp$  concurrentes para definir su ángulo. Expresa lo que queremos geoméricamente, pues al actuar por elementos de  $\mathcal{H}(2)$  se queda invariante, así que corresponde a llevar su intersección al origen y ahí medir con el grupo. En particular, si dos rectas hiperbólicas  $\mathbf{u}^\perp$  y  $\mathbf{v}^\perp$  se intersectan se tiene que  $|\mathbf{u} \bullet_L \mathbf{v}| \leq 1$  y  $\angle(\mathbf{u}^\perp, \mathbf{v}^\perp) \in [0, \pi]$ , donde los extremos se dan si y sólo si  $\mathbf{u} = \pm \mathbf{v}$ .

Conviene extender la fórmula para calcular ángulos a vectores no necesariamente unitarios. Para cualquier  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ , denotemos por

$$\|\mathbf{v}\|_L := \sqrt{|\mathbf{v}|_L^2}$$

a su *L-tamaño*. Nótese que el término “L-norma” debería aplicarse aquí en estricta analogía con el caso euclidiano, y deberíamos haber usado “L-norma cuadrada” para  $|\mathbf{v}|_L^2$ ; pero como esta última es la más usada preferimos simplificar la terminología y usar y acuñar, hasta ahora que lo necesitamos, un nuevo término para la raíz del valor absoluto de la L-norma, que sólo sirve para *normalizar*, esto es, para hacer L-unitario a un vector no luz.

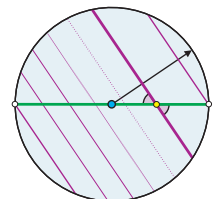
Se tiene entonces que si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son vectores espaciales cuyas rectas polares son (hiperbólicamente) concurrentes,

$$\angle(\mathbf{u}^\perp, \mathbf{v}^\perp) = \arccos\left(\frac{\mathbf{u} \bullet_L \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|_L \|\mathbf{v}\|_L}\right). \tag{8.17}$$

Veamos un ejemplo sencillo pero iluminador. Pensando en el modelo proyectivo ( $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{P}^2$ ), consideremos la familia de rectas con una pendiente euclidiana dada y calculemos su ángulo hiperbólico respecto al eje  $x$ ,  $\mathbf{e}_2^\perp$ . Sea  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , con  $\mathbf{a} > 0$  (para simplificar expresiones, pero  $\mathbf{a} \neq 0$  funciona), un vector euclidianamente unitario (es decir, tal que  $\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = 1$ ), de tal manera que el haz (euclidianamente) ortogonal a  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  está dado por las ecuaciones

$$\mathbf{a}x + \mathbf{b}y = \mathbf{a}c,$$

donde  $c$ , variable, parametriza su intersección con  $\mathbf{e}_2^\perp$ , que es precisamente  $(c, 0)$ . Sea  $\mathbf{u}_c = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}c)$ , así que estas rectas son sus (L-) polares y son hiperbólicas para  $|c| < 1/\mathbf{a}$ . Se tiene que para estos valores de  $c$ :



$$\frac{\mathbf{e}_2 \bullet_L \mathbf{u}_c}{\|\mathbf{u}_c\|_L} = \frac{b}{\sqrt{1 - a^2 c^2}}.$$

Dibujo:  
grafica  
 $\rho(c)$

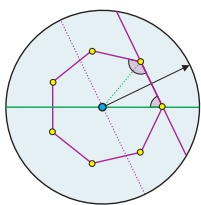
Llamemos  $\rho(c)$  a esta función con dominio  $-1/a < c < 1/a$ . Notemos primero que si  $b = 0$  (si nuestras rectas son verticales),  $\rho(c)$  es constante  $0$  correspondiendo al hecho de que  $\{\mathbf{u}_c^\perp\}$  son las ortogonales a  $\mathbf{e}_2^\perp$ . Supongamos que  $b > 0$  (el caso análogo  $b < 0$  se deja como ejercicio). Entonces  $\rho(c)$  tiene un mínimo,  $b$ , en  $c = 0$ , es simétrica ( $\rho(c) = \rho(-c)$ ) y cumple que  $\rho(c) \leq 1$  para  $-1 \leq c \leq 1$ , alcanzándose la igualdad en los extremos. Esto último corresponde a que  $\mathbf{u}_c^\perp$  es concurrente a  $\mathbf{e}_2^\perp$  cuando  $|c| < 1$ , y cuando  $c = \pm 1$  son paralelas (con  $(\pm 1, 0)$  como punto común al infinito); para  $|c| > 1$ ,  $\rho(c) > 1$  y las rectas  $\mathbf{u}_c^\perp$  y  $\mathbf{e}_2^\perp$  son ultraparalelas. Entonces  $\rho(c)$  cae en el dominio de la función arccoseno sólo en los dos primeros casos. En el primero, se aplica la fórmula (8.17), pero ésta **se puede extender continuamente** de pares de rectas concurrentes **para incluir pares de rectas paralelas**, lo que nos da que el ángulo de estas últimas es  $0$  (o  $\pi$  para el caso  $b < 0$ ; ver Ejercicio 8.53).

Que  $\rho(c)$  sea simétrica corresponde a que la rotación de  $\pi$  en el origen lleva a  $\mathbf{e}_2^\perp$  en sí misma y a  $\mathbf{u}_c^\perp$  en  $\mathbf{u}_{-c}^\perp$  invirtiendo orientación en ellas y consecuentemente tienen el mismo ángulo. Finalmente, que la función  $\rho(c)$  baje de  $1$  a  $b$  mientras  $c$  va de  $-1$  a  $0$  y suba simétricamente a  $1$  al seguir  $c$  de  $0$  a  $1$ , implica que el ángulo  $\angle(\mathbf{u}_c^\perp, \mathbf{e}_2^\perp)$  empieza en  $0$  para  $c = -1$ , sube monótonamente hasta alcanzar su máximo,  $\arccos(b) = \angle(\mathbf{u}_0^\perp, \mathbf{e}_2^\perp)$ , en  $c = 0$  (que coincide con el ángulo euclidiano) y vuelve a bajar monótona y continuamente a  $0$  cuando  $c = 1$ . Como corolario de este hecho tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 8.9** *Existe un polígono hiperbólico regular de  $n$  lados y ángulo interno  $\alpha$  para cualquier  $n \geq 3$  y  $0 < \alpha < \pi(n-2)/n$ .*

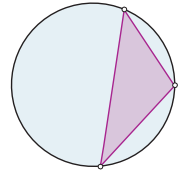
**Demostración.** Consideremos  $(a, b) = (\cos(\pi/n), \sin(\pi/n))$  en la discusión anterior. Se tiene entonces que

$$\angle(\mathbf{u}_0^\perp, \mathbf{e}_2^\perp) = \pi \frac{(n-2)}{2n}.$$



De nuestra última observación se sigue que existe una única  $c$  con  $0 < c < 1$ , para la cual  $\angle(\mathbf{u}_c^\perp, \mathbf{e}_2^\perp) = \alpha/2$ . Sea  $P_c$  el polígono regular euclidiano de  $n$  lados con centro en el origen y vértice en  $(c, 0)$ ; nótese que está contenido en el plano hiperbólico. Su grupo de simetrías es el grupo diédrico de orden  $n$ ,  $D_n$ , generado por las reflexiones en  $\mathbf{e}_2^\perp$  y la recta por el origen con dirección  $(a, b)$ . Como  $D_n \subset O(2) \subset \mathcal{H}(2)$ , este polígono, considerado en el plano hiperbólico (puntos y segmentos de rectas ordenados cíclicamente), tiene todas las simetrías hiperbólicas posibles, es decir, cualquier par incidente “vértice-lado” se puede mandar en cualquier otro, y eso es lo que llamamos *regular*. Entonces todos sus ángulos internos son iguales y, por construcción, son iguales a  $\alpha$ .  $\square$

Un caso importante es el límite cuando el ángulo  $\alpha$  de los triángulos regulares tiende a 0; se les llama *triángulos hiperbólicos ideales*. Están formados por tres líneas hiperbólicas 2 a 2 paralelas, pierden sus vértices pues quedan en el infinito, y por el Teorema de 3 en 3 no importa qué tres puntos se tomen en  $\mathbb{S}^1$ ; son equivalentes. Resulta que su área es  $\pi$  (con la noción natural de distancia que ahí viene) y es la máxima área que puede tener un triángulo hiperbólico.




---

**EJERCICIO 8.50** Encuentra el vértice  $(c, 0)$  de un cuadrado hiperbólico regular centrado en  $(0, 0)$  con ángulo interior  $\pi/3$ , y el de un hexágono con ángulo  $\pi/2$ .

**EJERCICIO 8.51** Define un triángulo isósceles como un triángulo con dos ángulos iguales. Demuestra que la suma de ángulos de un triángulo hiperbólico isósceles es menor que  $\pi$ .

**EJERCICIO 8.52** Considera el análisis del ángulo entre  $\mathbf{e}_2^\perp$  y  $\mathbf{u}_c^\perp$  que dejamos pendiente, es decir, cuando  $b < 0$ . Demuestra que  $\angle(\mathbf{u}_c^\perp, \mathbf{e}_2^\perp)$  baja de  $\pi$  a  $\angle(\mathbf{u}_0^\perp, \mathbf{e}_2^\perp) = \arccos(b)$  conforme  $c$  va de  $-1$  a  $0$  y luego vuelve a subir simétricamente.

**EJERCICIO 8.53** Sean  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  dos vectores espaciales unitarios tales que  $[\mathbf{u}] \neq [\mathbf{v}]$ . Ya vimos que si sus líneas polares son concurrentes entonces  $|\mathbf{u} \bullet_L \mathbf{v}|$  (en valor absoluto) es menor que 1. Demuestra que sus líneas polares son paralelas o ultraparalelas correspondiendo respectivamente a que  $|\mathbf{u} \bullet_L \mathbf{v}|$  sea igual a 1 o mayor que 1.

---

## 8.4.2 Distancias

Por fin vamos a deducir la noción de distancia. Ya sabemos trasladar en rectas pero aún no sabemos medir distancias en ellas. Claramente estas dos nociones deben corresponderse; dada una traslación, cada punto en la recta y su imagen deben estar a la misma distancia. Veremos que esto obliga (salvo una constante) a la noción de distancia. Como todas las rectas hiperbólicas son iguales pues ya tenemos el grupo, bastará concentrarnos en una que pasa por el “origen”  $\mathbf{e}_3$  para luego propagar la noción. Las rectas por  $\mathbf{e}_3$  son aún “más iguales”, se ven (pensaremos, ahora sí, en la cazuela hiperbólica) como una rama de una hipérbola canónica en  $\mathbb{R}^2$ , así que simplifiquemos las cosas y estudiemos esta última.

### Lorentz en dimensión 2

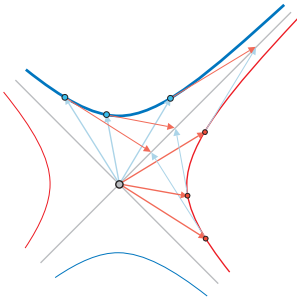
Hasta nuevo aviso, denotemos con  $L$  a la análoga de la matriz de Lorentz en dimensión 2, que podríamos llamar “la Lorentzita”

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Usemos  $\mathbf{u} \bullet_L \mathbf{v} = \mathbf{u}^\top \mathbf{L} \mathbf{v}$  y  $|\mathbf{u}|_L^2 = \mathbf{u} \bullet_L \mathbf{u}$  para denotar, respectivamente, a la forma bilineal y a la forma cuadrática asociada ( $x^2 - y^2$ ); donde ahora  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ . Igualmente, usaremos toda la terminología que desarrollamos para el caso de dimensión 3. Una gran diferencia es que ahora hay una correspondencia entre los vectores *unitarios temporales* y *espaciales*; ambos son hipérbolas cuadradas; la única diferencia es que una se abre hacia el eje  $y$  (la temporal) y la otra es “horizontal” (la espacial). Tenemos entonces una clara noción de *compadre L-ortogonal* (análoga a la euclidiana) pues si declaramos, cambiando la notación para que no se confunda con el ortogonal euclidiano,

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})^L = (\mathbf{y}, \mathbf{x}),$$

claramente se tiene que  $\mathbf{u} \bullet_L \mathbf{u}^L = 0$  y  $|\mathbf{u}|_L^2 = -|\mathbf{u}^L|_L^2$ . Intercambia temporales por espaciales dejándoles la misma magnitud en valor absoluto. Los vectores luz forman dos rectas, una (la  $x = y$ ) donde el compadre L-ortogonal es el mismo vector, y la otra (la



$x = -y$ ) donde es su inverso. El compadre L-ortogonal tiene un elegante significado geométrico (análogo también al euclidiano respecto a los círculos).

**Lema 8.10** Dado  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ , entonces  $\mathbf{u}^L$  es tangente en  $\mathbf{u}$  a la curva de nivel de la función  $|\mathbf{x}|_L^2$  que pasa por  $\mathbf{u}$ , es decir, a la curva  $C_{\mathbf{u}} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathbf{x}|_L^2 = |\mathbf{u}|_L^2\}$ .

**Demostración.** Obsérvese primero que las curvas de nivel  $C_{\mathbf{u}}$  están definidas por una ecuación  $x^2 - y^2 = cte$ , y que por tanto son cónicas de las que sabemos hablar de sus tangentes. En el caso en que  $\mathbf{u}$  es un vector luz (la cónica degenera en dos rectas) el lema es claro por la descripción de  $\mathbf{u}^L$ .

Supongamos entonces que  $|\mathbf{u}|_L^2 \neq 0$ . Para ver cómo interseca la recta  $[\mathbf{u}^L] + \mathbf{u}$  a la curva de nivel, tomemos un vector  $t\mathbf{u}^L$  trasladado a  $\mathbf{u}$  y evaluemos la forma cuadrática:

$$\begin{aligned} |t\mathbf{u}^L + \mathbf{u}|_L^2 &= (t\mathbf{u}^L + \mathbf{u}) \bullet_L (t\mathbf{u}^L + \mathbf{u}) \\ &= (t\mathbf{u}^L) \bullet_L (t\mathbf{u}^L) + (t\mathbf{u}^L) \bullet_L \mathbf{u} + \mathbf{u} \bullet_L t\mathbf{u}^L + \mathbf{u} \bullet_L \mathbf{u} \\ &= t^2 (\mathbf{u}^L \bullet_L \mathbf{u}^L) + 2t (\mathbf{u}^L \bullet_L \mathbf{u}) + |\mathbf{u}|_L^2 \\ &= t^2 |\mathbf{u}^L|_L^2 + |\mathbf{u}|_L^2. \end{aligned}$$

Puesto que  $|\mathbf{u}|_L^2 \neq 0$  entonces  $|\mathbf{u}^L|_L^2 \neq 0$ , y de la ecuación anterior se deduce que  $|t\mathbf{u}^L + \mathbf{u}|_L^2 = |\mathbf{u}|_L^2$ , si y sólo si  $t = 0$ . Por tanto, la recta  $[\mathbf{u}^L] + \mathbf{u}$  interseca a  $C_{\mathbf{u}}$  justo en  $\mathbf{u}$  y es entonces su tangente ahí.  $\square$

Estudiemos ahora la rama positiva de temporales unitarios, que podemos llamar la “recta hiperbólica”

$$\mathbb{H}^1 := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathbf{x}|_L^2 = -1, \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_2 > 0 \right\}.$$

...Dibujo



Como en el caso de dimensión 3, tenemos el grupo  $O(1, 1)$  de matrices que dejan invariante la forma bilineal de Lorentz (o bien, tales que  $B^T L B = L$  o, equivalentemente, que sus columnas forman una base L-ortonormal). Dentro de éste, tenemos el subgrupo que manda a  $\mathbb{H}^1$  en sí mismo, que llamamos  $\mathcal{H}(1)$ , y dentro de éste el de aquellas que preservan la orientación,  $\mathcal{H}^+(1)$ . Siguiendo los pasos del caso de dimensión 3, no es difícil ver que este último grupo es

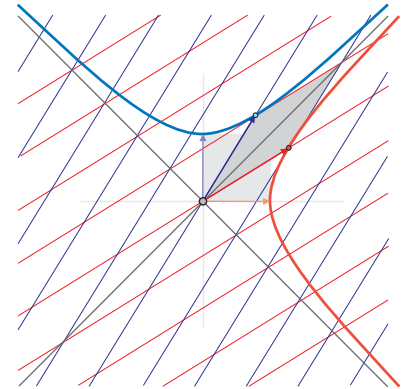
$$\mathcal{H}^+(1) = \left\{ \begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix} \mid a^2 - b^2 = -1, b > 0 \right\},$$

(es fácil comprobar que estas matrices cumplen que  $B^T L B = L$ ). Para  $\mathbf{u} = (a, b) \in \mathbb{H}^1$ , denotemos

$$T_{\mathbf{u}} = T_{(a,b)} := \begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix}, \tag{8.18}$$

que es la *traslación* que manda al *origen* de la recta hiperbólica,  $\mathbf{e}_2$ , en  $\mathbf{u}$ , y desplaza a todo  $\mathbb{H}^1$  dentro de sí mismo.

Esta transformación lineal en  $\mathbb{R}^2$  “aplasta” un cuadrante (en el que está  $\mathbf{u}$ ) hacia su recta luz, o, mejor dicho, lo “alarga” pues preserva área, y compensa con un acortamiento de la otra recta luz; sus vectores propios son los luz con valores propios  $a + b$  y  $b - a$ .



Obsérvese que (8.18) establece una biyección  $\mathbb{H}^1 \rightarrow \mathcal{H}^+(1)$  que a cada punto le asocia la traslación que manda al origen en él. Nuestro problema actual es encontrar una distancia en  $\mathbb{H}^1$  que logre que estas traslaciones sean rígidas.

Puesto que  $\mathbb{H}^1$  es topológicamente una recta, encontrar una distancia en  $\mathbb{H}^1$  compatible con estas traslaciones equivale a parametrizar adecuadamente  $\mathbb{H}^1$ . Es decir, a encontrar una función

$$\mathbf{h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^1$$

que convierta a la suma (las traslaciones en  $\mathbb{R}$ , a partir de las cuales ahí se define distancia) en nuestras traslaciones hiperbólicas. Es decir, tal que al componerla con la biyección  $\mathbb{H}^1 \rightarrow \mathcal{H}^+(1)$  mande a la suma en composición, que se escribe

$$T_{\mathbf{h}(t+r)} = T_{\mathbf{h}(t)} T_{\mathbf{h}(r)}. \tag{8.19}$$

Evaluando en el origen, la parametrización  $\mathbf{h}$  que andamos buscando debe cumplir entonces que

$$\mathbf{h}(t+r) = T_{\mathbf{h}(t)}(\mathbf{h}(r)), \tag{8.20}$$

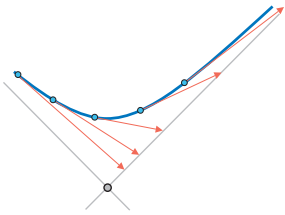
pero además, como las traslaciones de  $\mathcal{H}^+(1)$  quedan determinadas por su valor en el origen, esta condición es equivalente a la de *homomorfismo* (8.19). En particular, como la traslación por  $\mathbf{0}$  es la identidad en  $\mathbb{R}$ , y  $T_{\mathbf{e}_2}$  es la identidad en  $\mathbb{H}^1$ ,  $\mathbf{h}$  también debe cumplir la *condición inicial*:

$$\mathbf{h}(0) = \mathbf{e}_2. \tag{8.21}$$

Antes de deducir formalmente cuál es la parametrización  $\mathbf{h}$  que cumple estas condiciones, vale la pena preguntarse ¿qué es lo más bonito que puede pasar? Pues con inusitada frecuencia en matemáticas la respuesta a esta última pregunta es la correcta, o al menos es premonitoria. Manténgase también en mente la analogía de que medir ángulos equivale a parametrizar adecuadamente a  $\mathbb{S}^1$ .

Hemos visto (Lema 8.10) que para cada punto  $\mathbf{u}$  de  $\mathbb{H}^1$ , su compadre L-ortogonal  $\mathbf{u}^\perp$  es un vector tangente a  $\mathbb{H}^1$ . Entonces  $\mathbb{H}^1$  viene dado junto con un *campo de vectores* natural, es decir, en cada punto  $\mathbf{u} \in \mathbb{H}^1$  hay un vector tangente distinguido,  $\mathbf{u}^\perp$ . Un punto, o partícula, viaja en  $\mathbb{H}^1$  acorde con este campo vectorial si en cada momento su velocidad coincide con el vector tangente distinguido. Como estos

vectores varían continuamente, es intuitivamente claro que se puede viajar de esta manera; el campo vectorial de compadritos define cómo deben moverse internamente los puntos. Si llamamos  $\mathbf{h}$  a la función de posición de una partícula que viaja acorde con el campo, y la ponemos en el origen en el tiempo 0, *i.e.*,  $\mathbf{h}(0) = \mathbf{e}_2$ , obtenemos al candidato ideal para la parametrización. Pues obsérvese que



cada punto sabe dejarse llevar por el *flujo*, así que si los ponemos a todos juntos y “agarrados” de la mano, se mueven coherentemente dando lugar a traslaciones. Entonces la condición de homomorfismo (8.19) equivale a dejar correr a  $\mathbb{H}^1$  con el flujo por un cierto tiempo  $r$ , ahí tomar una foto instantánea ( $T_{\mathbf{h}(r)}$ : dónde anda cada uno), y luego dejarlo correr otro rato  $t$ ; al final, simplemente se le dejó correr un tiempo  $t + r$ . Pero ¿por qué coinciden estos movimientos de acuerdo con el flujo con nuestras traslaciones hiperbólicas? Pues, como veremos, porque estas últimas preservan el campo vectorial ya que preservan al L-compadrazgo.

Más formalmente, lo que le estamos pidiendo a la parametrización  $\mathbf{h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^1$  dada por el flujo es que su derivada sea el compadre L-ortogonal. Si expresamos  $\mathbf{h}$  en coordenadas,  $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ , donde  $h_1$  y  $h_2$  son funciones de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ , entonces tenemos una condición inicial y una diferencial

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(0) = \mathbf{e}_2 &\Leftrightarrow (h_1(0), h_2(0)) = (0, 1); \\ \mathbf{h}' = \mathbf{h}^\perp &\Leftrightarrow (h_1', h_2') = (h_2, h_1). \end{aligned} \quad (8.22)$$

Aunque la ecuación diferencial intercambia índices, de ella se sigue que  $h_i'' = h_i$ ; es decir, ambas son funciones cuya aceleración es su valor: cuanto más lejos (positivo) del 0 estén, más aceleran y agarran una velocidad “endemoniada”. Por ejemplo, de  $h_1$  sabemos que  $h_1(0) = 0$ , que  $h_1'(0) = 1$  y que  $h_1'' = h_1$ . No es este el libro para hacerlo en detalle, pero heurísticamente si determinamos la posición y la velocidad inicial y damos una regla para la aceleración de acuerdo con la posición, la función debe estar determinada de manera única. Si suponemos esto (que se sigue del Teorema de unicidad y existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales —y que al manejar un coche con el simple acelerador se corrobora todos los días—), ya tenemos candidato para la parametrización  $\mathbf{h}$ ; sus coordenadas tienen nombres clásicos:  $h_1$  es el *seno hiperbólico* y  $h_2$  el *coseno hiperbólico*, que se denotan  $\sinh$  y  $\cosh$  respectivamente.

Aún suponiendo que ya tenemos  $\mathbf{h} = (\sinh, \cosh)$  que cumple (8.22), nos falta demostrar más formalmente que cumple (8.20); si se lo cree ya el lector, sáltese la siguiente subsección que tiene que ver más con cálculo.

### \*Los cálculos

Queremos probar que la condición de homomorfismo (8.20) es equivalente a la condición del “flujo de compadrazgo” (8.22), bueno, casi. Supongamos entonces que  $\mathbf{h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^1$  cumple que  $\mathbf{h}(0) = \mathbf{e}_2$  que es la parte común. Veamos primero que (8.20) implica algo un poco más general que (8.22).

En coordenadas (8.20) se expresa, usando (8.18), como

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1(t+r) \\ \mathbf{h}_2(t+r) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{h}_2(t) & \mathbf{h}_1(t) \\ \mathbf{h}_1(t) & \mathbf{h}_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1(r) \\ \mathbf{h}_2(r) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{h}_2(t)\mathbf{h}_1(r) + \mathbf{h}_1(t)\mathbf{h}_2(r) \\ \mathbf{h}_1(t)\mathbf{h}_1(r) + \mathbf{h}_2(t)\mathbf{h}_2(r) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Que son las identidades aditivas para el seno y el coseno hiperbólicos.

De estas dos ecuaciones podemos sacar condiciones diferenciales que deben cumplir las funciones. Consideremos la segunda, y con base en su identidad para la suma expresemos su derivada en la forma clásica de límites:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}'_2(t) &= \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{\mathbf{h}_2(t+r) - \mathbf{h}_2(t)}{r} \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{\mathbf{h}_1(t)\mathbf{h}_1(r) + \mathbf{h}_2(t)\mathbf{h}_2(r) - \mathbf{h}_2(t)}{r} \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{\mathbf{h}_1(t)\mathbf{h}_1(r) + \mathbf{h}_2(t)(\mathbf{h}_2(r) - 1)}{r} \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{\mathbf{h}_1(t)\mathbf{h}_1(r)}{r} \right) + \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{\mathbf{h}_2(t)(\mathbf{h}_2(r) - 1)}{r} \right) \\ &= \mathbf{h}_1(t) \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{\mathbf{h}_1(r)}{r} \right) + \mathbf{h}_2(t) \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{\mathbf{h}_2(r) - 1}{r} \right) \\ &= \mathbf{h}_1(t) \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{\mathbf{h}_1(0+r) - \mathbf{h}_1(0)}{r} \right) + \mathbf{h}_2(t) \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{\mathbf{h}_2(0+r) - \mathbf{h}_2(0)}{r} \right) \\ &= \mathbf{h}_1(t) \mathbf{h}'_1(0) + \mathbf{h}_2(t) \mathbf{h}'_2(0). \end{aligned}$$

Pero además  $\mathbf{h}$  va por la hipérbola  $\mathbb{H}^1$  y pasa por su mínimo en el 0, lo cual implica que  $\mathbf{h}'_2(0) = 0$ . Así que se cumple

$$\mathbf{h}'_2(t) = \mathbf{h}'_1(0) \mathbf{h}_1(t).$$

De un cálculo análogo (que dejamos como ejercicio) se obtiene que

$$\mathbf{h}'_1(t) = \mathbf{h}'_1(0) \mathbf{h}_2(t).$$

Éstas son, salvo la constante  $\mathbf{h}'(0)$  (el caso de la equivalencia), las ecuaciones (8.22). Esta constante corresponde a viajar con velocidades distintas en el flujo, o bien, considerar múltiplos del campo vectorial. Sin embargo, si tomamos esta constante igual a 1 tenemos que la condición de homomorfismo (8.20) implica la del flujo (8.22).

Supongamos ahora que  $\mathbf{h}' = \mathbf{h}^L$  (8.22), y vamos a demostrar que  $\mathbf{h}(\mathbf{t} + \mathbf{r}) = T_{\mathbf{h}(\mathbf{t})}(\mathbf{h}(\mathbf{r}))$  (8.20). La idea básica es que podemos reparametrizar y luego usar (es inevitable) la unicidad de soluciones.

Pensemos a  $\mathbf{t}$  como una constante; es más, denotemos  $\mathbf{u} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{h}(\mathbf{t})$  y definamos la función  $\mathbf{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^1$  como

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = T_{\mathbf{u}}^{-1}(\mathbf{h}(\mathbf{t} + \mathbf{r})).$$

Claramente se cumple que  $\mathbf{g}(0) = \mathbf{e}_2$ . Además, derivando con respecto a  $\mathbf{r}$  y como la matriz  $T_{\mathbf{u}}^{-1}$  es constante, y multiplicar por ella es lineal, se cumple que

$$\mathbf{g}'(\mathbf{r}) = T_{\mathbf{u}}^{-1}(\mathbf{h}'(\mathbf{t} + \mathbf{r})) = T_{\mathbf{u}}^{-1}(\mathbf{h}(\mathbf{t} + \mathbf{r})^L) = (T_{\mathbf{u}}^{-1}(\mathbf{h}(\mathbf{t} + \mathbf{r})))^L = \mathbf{g}(\mathbf{r})^L,$$

pues  $T_{\mathbf{u}}^{-1} \in \mathcal{H}^+(1)$  y es fácil ver que estas matrices preservan el compadre L-ortogonal. (Si alguien se siente incómodo con que hayamos derivado vectores, o que haya entrado la derivada tan fácil, se le invita a hacer las cuentas en coordenadas usando (8.18) y el Ejercicio 8.54). Entonces  $\mathbf{g}$  cumple las mismas condiciones que  $\mathbf{h}$  y por la unicidad de soluciones se tiene que son la misma parametrización de  $\mathbb{H}^1$ . Multiplicando ambos lados de la ecuación  $\mathbf{h} = \mathbf{g}$  por  $T_{\mathbf{u}}$ , tenemos

$$T_{\mathbf{u}}(\mathbf{h}(\mathbf{r})) = T_{\mathbf{u}}(\mathbf{g}(\mathbf{r})) = T_{\mathbf{u}}(T_{\mathbf{u}}^{-1}(\mathbf{h}(\mathbf{t} + \mathbf{r}))) = \mathbf{h}(\mathbf{t} + \mathbf{r}),$$

que es lo que queríamos demostrar.

**EJERCICIO 8.54** Demuestra que si  $T_{\mathbf{u}}$  es como en (8.18) entonces

$$T_{\mathbf{u}}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} & -\mathbf{a} \\ -\mathbf{a} & \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

**EJERCICIO 8.55** Demuestra que si  $T \in \mathcal{H}^+(1)$  entonces  $T(\mathbf{u}^L) = (T\mathbf{u})^L$ .

**EJERCICIO 8.56** Demuestra que si  $\mathbf{h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^1$  cumple la condición de homomorfismo (8.19), entonces  $\mathbf{g}(\mathbf{t}) = \mathbf{h}(c\mathbf{t})$  para cualquier constante  $c \neq 0$ , también la cumple.

### Seno y coseno hiperbólicos (distancia en $\mathbb{H}^1$ )

Resumiendo, tenemos que la función  $\mathbf{h} = (\sinh, \cosh)$  es una biyección de  $\mathbb{R}$  con  $\mathbb{H}^1$  que hace corresponder a las traslaciones reales con las hiperbólicas, pues las funciones trigonométricas hiperbólicas,  $\cosh t$  y  $\sinh t$  (cuyas gráficas aparecen al margen) cumplen:

...Dibujo,  
graficas de  
cosh y senh

	$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$	
$\cosh 0 = 1$		$\sinh 0 = 0$
$\cosh' t = \sinh t$		$\sinh' t = \cosh t$
	$\cosh(t+r) = \cosh t \cosh r + \sinh t \sinh r$	
	$\sinh(t+r) = \cosh t \sinh r + \sinh t \cosh r$	

La distancia en  $\mathbb{H}^1$  debe ser

$$d(\mathbf{h}(t), \mathbf{h}(r)) = |t - r|.$$

Para expresarla sin referencia a  $\mathbf{h}$ , podemos usar la inversa del coseno hiperbólico,  $\cosh^{-1} t$ , que tiene sentido sólo para  $t \geq 1$ , que, por definición, siempre toma valores positivos, y que de la segunda coordenada de un punto en  $\mathbb{H}^1$  nos dice, en valor absoluto, de qué  $t$  proviene. En efecto, para el origen  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{h}(0)$ , se tiene que

$$d(\mathbf{e}_2, \mathbf{h}(t)) = |t| = \cosh^{-1}(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{h}(t)) = \cosh^{-1}(-(\mathbf{e}_2 \bullet_{\mathbb{L}} \mathbf{h}(t))).$$

Esta última expresión (como en los ángulos) es la base para generalizar, pues podemos definir entonces para cualquier  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{H}^1$ :

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \cosh^{-1}(-(\mathbf{u} \bullet_{\mathbb{L}} \mathbf{v})).$$

Que es claramente invariante bajo  $\mathcal{H}(1)$  y concuerda con la distancia al origen; hace que la parametrización  $\mathbf{h}$  sea una isometría.

### Distancia en $\mathbb{H}^2$

Regresando al plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^3$ , debe ser claro que la buena definición de *distancia* de  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$  (puntos de  $\mathbb{H}^2$ ) es

$$\boxed{d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \cosh^{-1}(-(\mathbf{u} \bullet_{\mathbb{L}} \mathbf{v}))}. \quad (8.23)$$

Pues es claramente invariante bajo  $\mathcal{H}(2)$  ya que estas transformaciones preservan la forma bilineal de Lorentz y entonces el resultado de la fórmula no cambia. Además, hace justo lo que queremos, pues dados cualesquiera  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{H}^2$  podemos trasladar al origen con alguna  $f \in \mathcal{H}(2)$  tal que  $f(\mathbf{u}) = \mathbf{e}_3$ , entonces

$$\begin{aligned} d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \cosh^{-1}(-(\mathbf{u} \bullet_{\mathbb{L}} \mathbf{v})) \\ &= \cosh^{-1}(-(f(\mathbf{u}) \bullet_{\mathbb{L}} f(\mathbf{v}))) \\ &= \cosh^{-1}(-(\mathbf{e}_3 \bullet_{\mathbb{L}} f(\mathbf{v}))); \end{aligned}$$

y  $-(\mathbf{e}_3 \bullet_{\mathbb{L}} f(\mathbf{v}))$  es precisamente la tercera coordenada de  $f(\mathbf{v})$ , que, vista en el plano vertical correspondiente, igual a  $\mathbb{R}^2$ , es la segunda coordenada de un punto en  $\mathbb{H}^1$ .

Por está última expresión, como todos los puntos de  $\mathbb{H}^2$  están arriba de  $\mathbf{e}_3$ , se tiene claramente que  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$  si y sólo si  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ ; o bien, que  $\mathbf{u} \bullet_{\mathbb{L}} \mathbf{v} \leq -1$  y la igualdad se da si y sólo si  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ . Pero nos falta probar **la desigualdad del triángulo** para ver que hemos definido a una distancia con todas las de la ley.

Sean  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  tres puntos en la cazuela hiperbólica  $\mathbb{H}^2$ ; queremos demostrar que

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \geq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}).$$

Podemos suponer que  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_3$  y además que  $\mathbf{v}$  está en el plano  $yz$ , y entonces que se escribe  $\mathbf{v} = (0, \mathbf{a}, b)$ . Sea  $c$  la altura de  $\mathbf{w}$ , es decir,  $c = \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_3$  que es la que determina la distancia a  $\mathbf{e}_3$ . Si  $\mathbf{v}$  estuviera más alto que  $\mathbf{w}$  (o sea, si  $b \geq c$ ) entonces  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq d(\mathbf{u}, \mathbf{w})$  y ya no hay nada que demostrar; supongamos entonces que  $\mathbf{v}$  está debajo de  $\mathbf{w}$ . Sea  $\mathbf{v}'$  el punto en el rayo de  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$  que está a la altura de  $\mathbf{w}$ ; de tal manera que  $d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = d(\mathbf{u}, \mathbf{v}')$ , es decir, ambos están en un círculo hiperbólico centrado en  $\mathbf{e}_3$ , que es la intersección de  $\mathbb{H}^2$  con el plano horizontal  $z = c$ . Nótese que los círculos horizontales  $\Pi_r \cap \mathbb{H}^2$ , donde  $\Pi_r : z = r$ , son los círculos en torno a  $\mathbf{e}_3$ , esto es, los conjuntos de puntos con una misma distancia a  $\mathbf{e}_3$ .

Sea  $T \in \mathcal{H}^+(2)$  la traslación hiperbólica que lleva a  $\mathbf{v}$  al origen hiperbólico  $\mathbf{e}_3$ . Es fácil ver que es la matriz

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & -a \\ 0 & -a & b \end{pmatrix}$$

y que ésta lleva a los planos horizontales  $\Pi_r$  en la familia de planos  $\mathbf{a}y + \mathbf{b}z = r$  normales al vector  $(0, \mathbf{a}, b)$ . De aquí se sigue que la imagen del círculo  $\Pi_c \cap \mathbb{H}^2$  es una elipse con un único punto de tercera coordenada mínima, a saber  $T(\mathbf{v}')$ . Por tanto,  $T(\mathbf{w})$  está arriba de  $T(\mathbf{v}')$  y se tiene

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = d(\mathbf{u}, \mathbf{v}') = d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + d(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + d(\mathbf{v}, \mathbf{w}),$$

con la igualdad si y sólo si  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  son colineales (pues la igualdad se da si y sólo si  $d(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = d(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ , si y sólo si  $T(\mathbf{w})$  coincide con el mínimo  $T(\mathbf{v}')$ ).

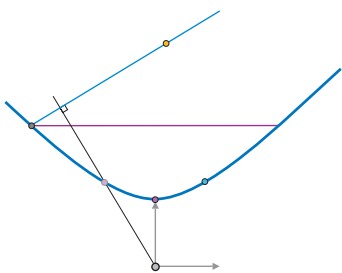
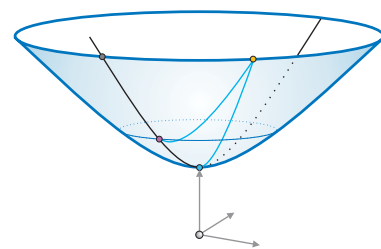
Como corolario de la demostración, obsérvese que los círculos hiperbólicos alrededor de un punto cualquiera  $\mathbf{u} \in \mathbb{H}^2$  son las intersecciones de la cazuela  $\mathbb{H}^2$  con los planos paralelos a su plano tangente en  $\mathbf{u}$ ; pues esto es cierto en  $\mathbf{e}_3$ .

---

**EJERCICIO 8.57** Demuestra que el conjunto de puntos que equidistan de dos puntos dados es un recta, llamada su *mediatriz*.

**EJERCICIO 8.58** Recuerda que dos líneas ultraparalelas tienen una única perpendicular común, y observa además que si tienen una perpendicular común son ultraparalelas. Demuestra que los puntos de intersección de la perpendicular común con las rectas es donde se realiza la distancia mínima entre ellas (usa las reflexiones y la desigualdad del triángulo).

---

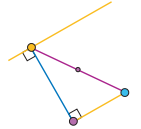
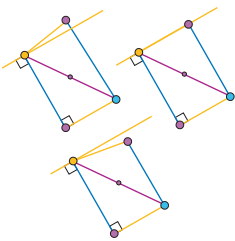


### 8.4.3 Triángulos

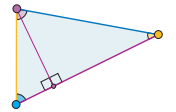
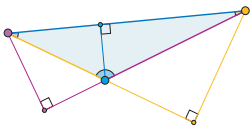
Queremos demostrar que **la suma de ángulos de un triángulo hiperbólico es menor que  $\pi$ , y convencer que su área es acotada.**

Un triángulo hiperbólico está determinado por tres puntos  $a, b, c$  (ya no será relevante si los pensamos en  $\mathbb{P}^2$  o en  $\mathbb{R}^3$ ; también los podemos pensar en abstracto), pues, como en el caso euclidiano, quedan determinados los segmentos que definen y sus ángulos internos, llamémosles  $\alpha, \beta, \gamma$  respectivamente.

Consideremos primero el caso de un triángulo rectángulo: supongamos que  $\gamma = \pi/2$ . Sea  $\ell$  la recta ortogonal a  $\langle c, b \rangle$  en el punto  $b$  y observemos (Ejercicio 8.58) que el segmento  $bc$  realiza la distancia de la recta  $\ell$  a la recta  $\langle a, c \rangle$ . Sea  $f$  la rotación de  $\pi$  en el punto medio del segmento  $ab$ . Se tiene que  $f(a) = b$  y  $f(b) = a$ ; queremos ver que  $f(c)$  está en la franja entre  $\ell$  y la recta  $\langle a, c \rangle$ . Si  $f(c)$  estuviera del otro lado de  $\ell$  que  $c$  entonces el segmento de  $f(c)$  a  $a = f(b)$  intersectaría a  $\ell$  y tendríamos que la distancia de  $\ell$  a la línea  $\langle a, c \rangle$  es menor que  $d(b, c)$  contradiciendo el Ejercicio 8.58. Y se contradice la unicidad de la perpendicular común si  $f(c) \in \ell$ ; por tanto,  $f(c)$  está del lado de  $a$  (y  $c$ ) de la recta  $\ell$ . Esto implica que  $\alpha + \beta < \pi/2$  y por lo tanto que  $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ .



Consideremos ahora cualquier triángulo. Tracemos la perpendicular a un lado desde el vértice opuesto,  $c$  digamos, que podemos llamar la *altura de c*. Hay dos casos por analizar; cuando la perpendicular corta en el segmento  $ab$ , y cuando corta a la línea  $\langle a, b \rangle$  fuera de él. En el primer caso tenemos que el triángulo original se parte en dos triángulitos rectángulos. Como en cada uno de ellos la suma de sus dos ángulos no rectos es menor que  $\pi/2$ , la suma de los tres ángulos del grande da menos de  $\pi$ . El segundo caso se reduce al primero, pues al tomar la altura de los otros dos vértices, alguna de ellas parte el triángulo en dos. Esto completa la prueba de que  $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ .

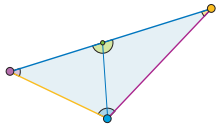


Al hacer con cuidado las cuentas de este último razonamiento aparece algo más profundo (o preciso) que conviene analizar. Dado un triángulo  $T$  con ángulos internos  $\alpha, \beta, \gamma$  podemos definir su *déficit angular* como

$$\delta(T) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Queríamos demostrar que el déficit angular de cualquier triángulo es positivo. Lo hicimos primero para triángulos rectángulos; y al extender este resultado descomponiendo un triángulo en dos triangulitos lo que se usa en el fondo es que el déficit angular es *aditivo*. Veámoslo en general.

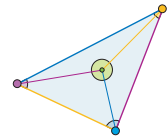
Si tomamos cualquier punto de un lado de un triángulo  $T$  y trazamos el segmento al vértice opuesto, *c* digamos, se obtienen dos triangulitos  $T_1$  y  $T_2$  con ángulos complementarios nuevos  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , de tal manera que



$$\begin{aligned}\delta(T_1) + \delta(T_2) &= \pi - (\alpha + \theta_1 + \gamma_1) + \pi - (\beta + \theta_2 + \gamma_2) \\ &= 2\pi - (\alpha + \beta + (\gamma_1 + \gamma_2) + (\theta_1 + \theta_2)) \\ &= 2\pi - (\alpha + \beta + \gamma + \pi) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma) = \delta(T).\end{aligned}$$

O bien, si tomamos un punto en el interior de  $T$  y *subdividimos* en tres triangulitos, se obtiene que

$$\delta(T_1) + \delta(T_2) + \delta(T_3) = \delta(T),$$

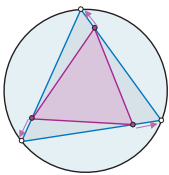


pues los ángulos alrededor del nuevo vértice suman  $2\pi$ , y el resto de los ángulos se asocia por parejas para dar los del original.

Así que si subdividimos un triángulo  $T$  en triangulitos que sólo se intersecten en sus fronteras (una iteración de las dos subdivisiones que acabamos de analizar) obtenemos que  $\delta(T)$  es la suma de los déficit angulares de sus triangulitos:

**¡La función  $\delta(T)$  se comporta como una función de área!**

Pues medir el área de algo equivale a partir en pedazos chicos que no se traslapen y sumar sus áreas. Es concebible además, definir áreas no sólo de triángulos sino de cualquier figura hiperbólica con un proceso de triangulación, medir en triangulitos, y sumar; y en todo caso, un proceso de límites para figuras cuya frontera no esté segmentada. Ya no tenemos tiempo, espacio o aliento para llevar a cabo este programa, pero debe ser cierto. Y además que cualquier noción coherente de área debe ser un múltiplo de ésta que se nos atravesó.



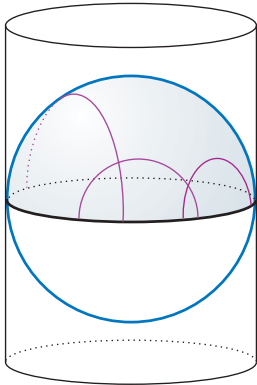
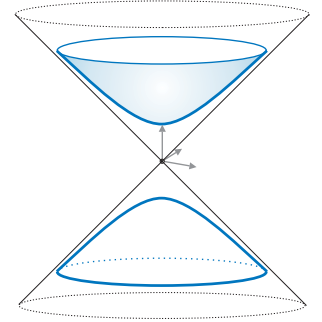
Se tiene que entre más chico sea un triángulo, más se parece a uno euclidiano; sus ángulos casi suman  $\pi$  y su déficit angular o área es casi cero. En el otro extremo, el área de cualquier triángulo está acotada por el área de los triángulos ideales (con sus tres vértices al infinito) que, como tienen ángulos de 0 grados, tienen déficit angular  $\pi$ . Estos se pueden ver como el límite de triángulos cuya área  $\delta(T)$  es creciente pero tiende a  $\pi$ .

## 8.5 Modelos de Poincaré y el hemiplano superior

Además de los dos modelos del plano hiperbólico con que hemos trabajado hay otros dos importantes que describiremos en esta sección.



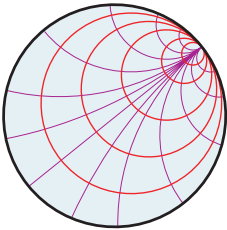
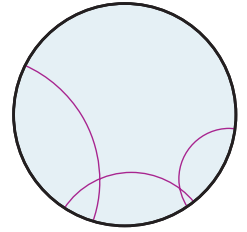
Consideremos al plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  como la cazuela contenida en  $\mathbb{R}^3$  pero completando a éste último a  $\mathbb{P}^3$ , es decir, añadiendo un plano proyectivo al infinito. Formalmente, tomamos una nueva coordenada homogénea,  $w$  digamos, e identificamos  $(x, y, z)$  con  $[x : y : z : 1]$ . Nos interesa ver a  $\mathbb{H}^2$  alrededor del infinito. Para esto podemos traer al plano al infinito al plano horizontal  $xy$  intercambiando las dos últimas coordenadas,  $[x : y : z : w] \mapsto [x : y : w : z]$  ( $\mapsto (x/z, y/z, w/z)$  en  $\mathbb{R}^3$ ) que intercambia el plano  $z = 0$  con el plano al infinito  $w = 0$  (o equivalentemente, ver las cosas en la carta coordenada  $z \neq 0$ ). El efecto en la cazuela hiperbólica de esta transformación (vista en  $\mathbb{R}^3$ ) es mandarla en el hemisferio superior de la esfera unitaria  $\mathbb{S}^2$ ; los unitarios temporales de abajo (con  $z$  negativa) van en el hemisferio inferior, y el ecuador es la imagen del cono de luz



intersectado con el plano al infinito, donde se pegan ambas hojas. Pues los unitarios temporales están dados por la ecuación  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ , cuyo polinomio homogéneo asociado es  $x^2 + y^2 + w^2 - z^2$ , que al tomar  $z = 1$  (y mandar el plano  $z = 0$  al infinito) nos da la ecuación  $x^2 + y^2 + w^2 = 1$  en la carta coordenada afín  $z \neq 0$  parametrizada por  $xyw$ . Más aún. El cono de luz (con polinomio homogéneo  $x^2 + y^2 - z^2$ ) se convierte en el cilindro circular  $x^2 + y^2 = 1$ ; efectivamente, todas sus rectas pasan ahora por el infinito vertical  $[0 : 0 : 1 : 0]$ ; y los planos que pasaban por el origen son ahora planos verticales.

Tenemos entonces el **modelo esférico de  $\mathbb{H}^2$**  que consiste en el hemisferio superior de  $\mathbb{S}^2$  (todos sus puntos de tercera coordenada estrictamente positiva) con el círculo al infinito en el ecuador, y las líneas hiperbólicas son intersecciones con planos verticales, es decir semicírculos verticales, o bien, que intersectan ortogonalmente al ecuador. Notemos que el plano  $z = 1$  (o, proyectivamente  $z = w$ ) se ha quedado en su lugar. Así que la identificación del modelo proyectivo con el modelo esférico es simplemente proyectar al interior del círculo en el plano  $z = 1$  ortogonalmente sobre el hemisferio superior de la esfera  $\mathbb{S}^2$ .

El **modelo de Poincaré** se obtiene del modelo esférico proyectando estereográficamente desde el polo sur  $(0, 0, -1)$  sobre el plano  $xy$  del ecuador. Se tiene entonces que como conjunto de puntos es de nuevo el interior del círculo unitario, pero ahora las rectas hiperbólicas son círculos ortogonales a la frontera. Los puntos se mueven hacia el centro de tal manera que lo que antes eran segmentos de recta se vuelven ahora segmentos de círculos que llegan perpendicularmente a la frontera. Lo importante de este modelo es que es *conforme*, es decir, los ángulos hiperbólicos coinciden con los ángulos euclidianos en que se encuentran las líneas (que ahora son círculos, insistimos). Este modelo es el que usa Escher en sus grabados famosos.



Otra cosa que hay que notar del modelo de Poincaré es que en él los horociclos (recuérdese, las curvas que son ortogonales a un haz paralelo) son de nuevo círculos. Precisamente los circulitos tangentes a  $\mathbb{S}^1$  en el punto al infinito correspondiente al haz.

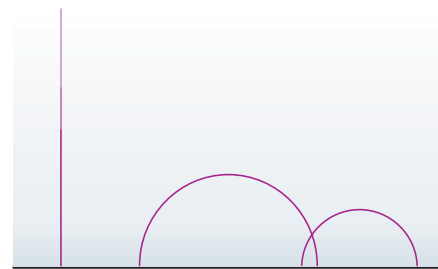
El **modelo del hemiplano superior** se obtiene también del modelo esférico por una proyección estereográfica, pero ahora desde un punto en el ecuador (en el infinito) sobre una pantalla vertical que se identifica con el plano de los números complejos,  $\mathbb{C}$ . Como el círculo al infinito va a dar a una recta, a ésta se le identifica con la recta real en  $\mathbb{C}$  de tal manera que la imagen de  $\mathbb{H}^2$  resulta ser los números complejos cuya parte imaginaria es positiva; y de ahí su nombre. De nuevo, este modelo es conforme. Las rectas hiperbólicas aquí son semicírculos ortogonales a la recta real y líneas verticales. Los horociclos son círculos tangentes a la recta real y líneas horizontales, que corresponden al único punto al infinito que no vemos (el infinito real); en estos horociclos, la métrica inducida es euclidiana, así que la distancia se vuelve manejable, es inversamente proporcional a la altura. Además, lo bonito de este modelo es que la identificación del grupo hiperbólico  $\mathcal{H}^+(2)$  con las transformaciones de Moebius se hace nítida. A cada transformación de Moebius se le puede asociar de manera única una matriz real

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con determinante 1. Y la fórmula

$$\mu(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

se extiende tal cual a una acción sobre el hemiplano superior que es justo la correspondiente transformación hiperbólica. Queda entonces el plano hiperbólico dentro de la esfera de Riemann (ver página 252).



## 8.6 \*Subgrupos discretos

La riqueza exuberante de las simetrías en el plano hiperbólico sigue explorándose hoy día, así que no podemos ser exhaustivos; pero sí podemos señalar dos hechos importantes que indican lo profusos que son los subgrupos discretos de  $\mathcal{H}(2)$ .

Notemos primero que la Proposición 8.9 nos dice con cuáles polígonos regulares como losetas se puede armar un mosaico que cubra el plano hiperbólico. Para que  $m$  polígonos regulares de  $n$  lados se ajusten alrededor de un vértice se necesita que su ángulo interno sea  $2\pi/m$ , y por la Proposición 8.9 tal polígono existe si y sólo si

$$\begin{aligned}\frac{2\pi}{m} &< \frac{\pi(n-2)}{n} \\ \frac{2}{m} &< 1 - \frac{2}{n} \\ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} &< \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Así que para cada pareja  $n, m$  que cumpla la desigualdad anterior, se pueden pegar y pegar  $n$ -ágonos regulares con ángulo interno  $2\pi/m$  por sus aristas de tal manera que ajusten  $m$  alrededor de cada vértice. Al mosaico resultante, que cubre  $\mathbb{H}^2$ , lo podemos llamar  $\{\{n, m\}\}$  usando la notación de Schläfli que introdujimos al final del capítulo ???. Nótese que los ocho valores de  $n$  y  $m$  que no cumplen la desigualdad anterior (y con  $n, m \geq 3$  para que tenga sentido) dan lugar a los mosaicos euclidianos (el  $\{\{3, 6\}\}$ , el  $\{\{4, 4\}\}$  y el  $\{\{6, 3\}\}$ ) y a los esféricos o platónicos (el  $\{\{3, 3\}\}$ , el  $\{\{3, 4\}\}$ , el  $\{\{4, 3\}\}$ , el  $\{\{3, 5\}\}$  y el  $\{\{5, 3\}\}$ ).

Dibujo...

El grupo de simetrías del mosaico hiperbólico  $\{\{n, m\}\}$ , esto es, las isometrías hiperbólicas que preservan la colección de polígonos  $\{\{n, m\}\}$ , está generado por tres reflexiones. Al escoger uno de los  $n$ -ágonos tenemos las dos reflexiones  $\rho_0, \rho_1$  que generan el diédrico  $\mathbf{D}_n$  de sus simetrías, y además está la reflexión  $\rho_2$  en su arista que lo manda a su polígono adyacente ( $\rho_1$  y  $\rho_2$  generan entonces al diédrico  $\mathbf{D}_m$  de simetrías que fijan el vértice base). Se tiene entonces que  $\rho_0, \rho_1, \rho_2$  son las reflexiones en los lados de un triángulo con ángulos internos  $\pi/n, \pi/m, \pi/2$ . Llamemos  $\Gamma_{n,m,2}$  a este grupo.

Claramente se puede generalizar a los llamados *grupos triangulares*  $\Gamma_{n,m,k}$  (o caleidoscópicos) generados por las reflexiones  $\rho_0, \rho_1, \rho_2$  en los lados de un triángulo con ángulos internos  $\pi/n, \pi/m, \pi/k$ . Entonces los generadores cumplen las relaciones

$$\begin{aligned}\rho_0^2 = \rho_1^2 = \rho_2^2 &= \mathbf{1} \\ (\rho_0\rho_1)^n = (\rho_1\rho_2)^m &= (\rho_2\rho_0)^k = \mathbf{1},\end{aligned}$$

donde  $\mathbf{1}$  es la identidad, y estas relaciones definen en abstracto al grupo. Cuando

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{k} < 1$$

este grupo se representa geoméricamente en el plano hiperbólico, es decir  $\Gamma_{n,m,k} \subset \mathcal{H}(2)$ ; cuando la misma suma da 1 es de isometrías euclidianas y lo habíamos visto en la Sección 3.9.2, y cuando la suma excede a 1 es esférico (ver Sección 5.4.3).

Nótese, además, que los grupos  $\Gamma_{n,m,k}$  hiperbólicos cumplen las dos propiedades de los que habíamos llamado grupos cristalográficos en 3.9.2 al cambiar  $\mathbb{R}^2$  por  $\mathbb{H}^2$ ; es decir, son discretos y “*cocompactos*”.

# Capítulo 9

## Cónicas IV (tangentes y polaridad)

En este último capítulo recopilamos brevemente las implicaciones que nuestro desarrollo de la geometría hiperbólica tiene para las cónicas en general. Para construir la geometría hiperbólica usamos la forma bilineal de Lorentz asociada al círculo unitario, pero se puede hacer lo análogo para cualquier cónica.

### 9.1 Forma bilineal de una cónica

Consideremos una cónica  $\mathcal{C}$  en  $\mathbb{R}^2$  definida por un polinomio cuadrático  $P(x, y)$ . Hemos visto (capítulo 7) que  $\mathcal{C}$  tiene una completación proyectiva (obtenida al homogeneizar el polinomio) que seguiremos llamando  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$  (al fin que se le añaden a lo más dos puntos). Y que una cónica proyectiva tiene una matriz simétrica  $A$  (de  $3 \times 3$ ) asociada, de tal manera que su polinomio homogéneo, que también hemos llamado su *forma cuadrática* asociada, se escribe

$$\tilde{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot (A \mathbf{x}).$$

Tiene entonces una *forma bilineal simétrica* asociada, al diferenciar las dos apariciones de la variable  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{x} \bullet_A \mathbf{y} := \mathbf{x}^\top A \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (A \mathbf{y}) = (A \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}. \quad (9.1)$$

Ésta es una función de dos variables en  $\mathbb{R}^3$  que toma valores reales. Y cumple claramente que

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \bullet_A \mathbf{y} &= \mathbf{y} \bullet_A \mathbf{x} && \text{(es simétrica);} \\ (\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) \bullet_A \mathbf{z} &= \alpha (\mathbf{x} \bullet_A \mathbf{z}) + \beta (\mathbf{y} \bullet_A \mathbf{z}); \\ \mathbf{x} \bullet_A (\alpha \mathbf{y} + \beta \mathbf{z}) &= \alpha (\mathbf{x} \bullet_A \mathbf{y}) + \beta (\mathbf{x} \bullet_A \mathbf{z}) && \text{(es bilineal).} \end{aligned}$$

Las dos últimas ecuaciones son redundantes; basta con una de ellas pues entonces de la simetría se obtiene la otra; las ponemos simplemente para enfatizar su carácter *bilineal* (lineal en cada variable).

## 9.2 Tangentes y polaridad

Supongamos que  $\det A \neq 0$ , es decir, que la cónica original  $\mathcal{C}$  es no degenerada. Podemos definir entonces para cualquier  $[\mathbf{u}] \in \mathbb{P}^2$ , su recta  $A$ -polar, que denotamos  $[\mathbf{u}]^A$  por la ecuación lineal homogénea

$$[\mathbf{u}]^A : \mathbf{u} \bullet_A \mathbf{x} = (A\mathbf{u}) \cdot \mathbf{x} = 0.$$

Para demostrar que este polinomio lineal homogéneo no es cero y que  $[\mathbf{u}]^A$  es efectivamente una línea, es necesario suponer que  $\det A \neq 0$ ; pues entonces, como  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  se tiene que  $A\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ .

Decimos que dos puntos  $[\mathbf{u}], [\mathbf{v}] \in \mathbb{P}^2$  son  $A$ -polares o  $A$ -ortogonales si  $\mathbf{u} \bullet_A \mathbf{v} = 0$ . Es claro que es una relación simétrica. En particular

$$[\mathbf{u}] \in [\mathbf{v}]^A \Leftrightarrow [\mathbf{v}] \in [\mathbf{u}]^A. \quad (9.2)$$

Si todos nuestros datos están en  $\mathbb{R}^2$ , es decir, si  $[\mathbf{u}] = [a : b : 1]$ , entonces la ecuación de  $[\mathbf{u}]^A$  tiene la forma

$$(a, b, 1) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \left( A \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

que es una línea en  $\mathbb{R}^2$  siempre y cuando  $[A\mathbf{u}] \neq [0 : 0 : 1]$ . Si  $\mathbf{u}$  es tal que  $[A\mathbf{u}] = [0 : 0 : 1]$  entonces su línea  $A$ -polar es la línea al infinito y  $[\mathbf{u}]$  es el *centro* de la cónica; de aquí que el centro, que habíamos detectado algebraicamente, es sólo un invariante afín, y que las parábolas “no tienen” centro: también está en el infinito.

Regresando a  $\mathbb{P}^2$ , para que no aparezcan casos especiales, tenemos que toda línea  $\ell$  es la  $A$ -polar de un punto. Pues si  $\ell$  está dada por la ecuación  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0$ , como  $A$  es invertible, tomamos  $\mathbf{u} = A^{-1}\mathbf{v}$  y entonces  $\ell$  es  $A$ -polar de  $[\mathbf{u}]$ . Así que también podemos hablar del *punto  $A$ -polar* de una línea y **la  $A$ -polaridad establece una biyección entre puntos y líneas de  $\mathbb{P}^2$** .

Hemos estudiado dos casos. Primero, cuando  $A$  es la identidad: la  $I$ -polaridad corresponde a la ortogonalidad euclidiana o la *dualidad* en el proyectivo, y seguiremos usando este término para distinguirla. Y segundo, cuando  $A$  es la matriz de Lorentz y corresponde a la “polaridad” respecto al círculo unitario que apareció desde el capítulo 2. En la primera se tiene que un punto nunca está en su línea polar (de hecho es la línea más lejana a él de acuerdo con la métrica proyectiva), pero de la segunda podemos generalizar el principio fundamental.

**Lema 9.1** *Si  $\mathcal{C}$  es no degenerada y no vacía, entonces la línea polar de un punto en  $\mathcal{C}$  es su línea tangente.*

**Demostración.** Estamos suponiendo que  $\det A \neq 0$  y además que tenemos  $[\mathbf{u}] \in \mathcal{C}$ , es decir, tal que  $\mathbf{u} \bullet_A \mathbf{u} = 0$ ; pues  $\mathcal{C}$  está determinada por la ecuación  $\mathbf{x} \bullet_A \mathbf{x} = 0$ .

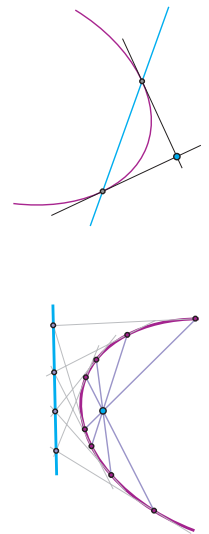
Sea  $\ell = [\mathbf{u}]^A$ ; queremos demostrar que  $\ell \cap \mathcal{C} = [\mathbf{u}]$ . Supongamos que no; que existe  $[\mathbf{v}] \neq [\mathbf{u}]$  tal que  $[\mathbf{v}] \in \ell \cap \mathcal{C}$ . Vamos a probar que entonces  $\ell \subset \mathcal{C}$ . Los puntos de  $\ell$  se escriben como  $[\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}]$ , y para cualquier  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  se tiene, por la simetría y bilinearidad, que

$$(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) \bullet_A (\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha^2 (\mathbf{u} \bullet_A \mathbf{u}) + 2\alpha\beta (\mathbf{u} \bullet_A \mathbf{v}) + \beta^2 (\mathbf{v} \bullet_A \mathbf{v}).$$

El primer sumando es 0 pues  $[\mathbf{u}] \in \mathcal{C}$ , el segundo también lo es pues  $[\mathbf{v}] \in \ell \Leftrightarrow \mathbf{u} \bullet_A \mathbf{v} = 0$ , y el tercero es cero al suponer que  $[\mathbf{v}] \in \mathcal{C}$ . Por tanto  $\ell \subset \mathcal{C}$ , y como contiene una recta entonces  $\mathcal{C}$  es degenerada. La contradicción implica el lema.  $\square$

Con base en este lema y en la simetría polar (9.2) es fácil extraer las conclusiones análogas al caso del círculo. Suponiendo que  $A$  define una cónica no vacía (en  $\mathbb{R}^2$  puede ser elipse, parábola o hipérbola, y en  $\mathbb{P}^2$  simplemente no vacía y no degenerada), se cumple entonces que:

1. Los puntos polares de líneas concurrentes son colineales, e inversamente, las líneas polares de puntos colineales son concurrentes.
2. El punto polar de una secante a  $\mathcal{C}$  se obtiene intersectando las tangentes a los dos puntos donde corta a  $\mathcal{C}$ ; y podemos decir que este punto está *afuera* de  $\mathcal{C}$ . E inversamente, si  $[\mathbf{u}]$  está afuera de la cónica entonces su recta  $A$ -polar  $[\mathbf{u}]^A$  la intersecta en dos puntos (llamados los *pies* de  $[\mathbf{u}]$  en la cónica  $\mathcal{C}$ ) cuyas tangentes pasan por  $[\mathbf{u}]$ ; así que para encontrar analíticamente los pies de un punto se encuentra la ecuación de su  $A$ -polar y se resuelve la ecuación cuadrática que da sus intersecciones con la cónica.
3. Si  $[\mathbf{u}]$  está *dentro* de (es decir, ni afuera ni en) la cónica, entonces su recta  $A$ -polar  $[\mathbf{u}]^A$  no la intersecta, está afuera y es la recta por los puntos polares a dos líneas cualquiera que pasan por  $[\mathbf{u}]$ . En particular, las intersecciones de las tangentes a los puntos extremos de cuerdas concurrentes son colineales (independientemente de dónde esté el punto de concurrencia).




---

**EJERCICIO 9.1** Encuentra los pies de .... a la cónica ....

**EJERCICIO 9.2** Demuestra que el centro de una cónica, cuando lo tiene, es un invariante afín.

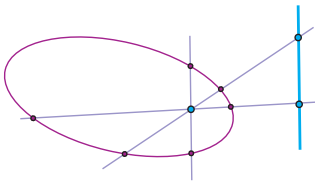
---

### 9.3 Armonía y el grupo de invariencia

Toda cónica  $\mathcal{C}$  (entenderemos por esto que es no vacía y no degenerada) tiene un grupo de transformaciones proyectivas que la deja invariante. Éste es conjugado del grupo

hiperbólico bajo una transformación proyectiva  $g \in \text{Pr}(2)$  que manda a  $\mathcal{C}$  en el círculo unitario ( $g$  existe por el Teorema de clasificación de cónicas proyectivas del capítulo 7). Así que se puede considerar al interior de la cónica  $\mathcal{C}$  como el plano hiperbólico con su grupo de invariancia proyectiva como grupo de isometrías. Nótese que, puesto que  $g$  preserva tangencia, también preserva polaridad, y entonces podemos reinterpretar la polaridad en términos clásicos de armonía.

Puesto que la línea polar del centro,  $\mathbf{o}$  digamos, del círculo unitario es la recta al infinito, se cumple que toda recta  $\ell$  por  $\mathbf{o}$  intersecta a su recta polar  $\mathbf{o}^\perp$  en un par armónico respecto a sus intersecciones con el círculo (en una línea afín, el punto medio de un segmento es conjugado armónico del punto al infinito respecto a los extremos); es decir,  $\mathbf{o} \in \ell$  y  $\ell \cap \mathbf{o}^\perp$  es un par armónico respecto a la pareja  $\ell \cap \mathbb{S}^1$ . Como se puede mandar proyectivamente a la terna  $\mathbb{S}^1, \mathbf{o}, \ell$  en cualquier terna que consiste en una cónica  $\mathcal{C}$ , un punto  $c$  en su interior y una recta por él; y las transformaciones proyectivas preservan armonía (Teorema 6.6), se tiene la siguiente:



**Proposición 9.2** *Sea  $c$  un punto interior de una cónica (no vacía y no degenerada)  $\mathcal{C}$ . Entonces la recta polar de  $c$  respecto a  $\mathcal{C}$  está formada por los conjugados armónicos de  $c$  respecto a la pareja  $\ell \cap \mathcal{C}$ , donde  $\ell$  corre por las rectas que pasan por  $c$ ; es decir, si  $c \in \ell$  entonces  $c, \ell \cap \mathcal{C}^\perp$  es armónico del par  $\ell \cap \mathcal{C}$ .*

Una manera, quizá más bonita, de entender esto es observar que el análogo de una cónica (no vacía y no degenerada) en la línea proyectiva, es decir, en dimensión 1, es una pareja de puntos. Respecto a ellos hay polaridad en  $\mathbb{P}^1$  que es precisamente la relación de armonía; a cada punto se le asocia su conjugado armónico. Lo previo equivale a decir que al restringir la polaridad respecto a una cónica en  $\mathbb{P}^2$  a sus líneas proyectivas se obtiene la polaridad ahí respecto a la intersección. Polaridad y armonía son instancias de lo mismo pero en diferentes dimensiones. Y debe ser claro que al subir la dimensión, esto se extiende. Para superficies cuadráticas en  $\mathbb{P}^3$ , los puntos tienen planos polares formados por los puntos en las líneas por él que son sus armónicos con respecto a la intersección con la superficie; las líneas tienen líneas polares o armónicas y los planos tienen puntos polares.

---

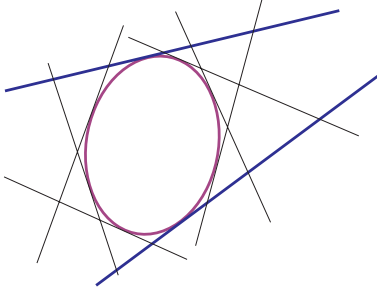
**EJERCICIO 9.3** Define algebraicamente el *plano polar* de un punto respecto a una superficie cuadrática en  $\mathbb{R}^3$ .

---

## 9.4 Cónicas y proyectividades de rectas



Otro resultado del capítulo anterior que se generaliza fácilmente es el de la correspondencia tangencial. Dada una cónica  $\mathcal{C}$  (no vacía y no degenerada) se tiene que todas sus líneas tangentes se identifican natural y canónicamente. Si  $\ell_1$  y  $\ell_2$  son dos tangentes a  $\mathcal{C}$ , su correspondencia tangencial es la transformación entre ellas que completa continuamente a:

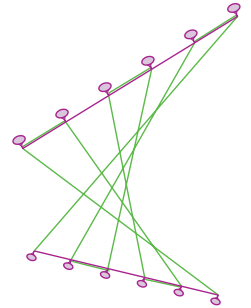


$$\begin{aligned} \ell_1 &\leftrightarrow \ell_2, \\ \ell \cap \ell_1 &\leftrightarrow \ell \cap \ell_2, \end{aligned}$$

donde  $\ell$  corre por el resto de las tangentes de  $\mathcal{C}$ . Que esta transformación es proyectiva se sigue de lo que ya hicimos (Proposición 8.8) al identificar proyectivamente a  $\mathcal{C}$  con el círculo unitario. Pero surge una pregunta interesante que es la inversa, y cuya respuesta nos dará la oportunidad de colar de refilón resultados clásico que no habían tenido cabida en el texto.

Supongamos que  $\ell_1$  y  $\ell_2$  son dos rectas en  $\mathbb{P}^2$  y que  $f : \ell_1 \rightarrow \ell_2$  es una transformación proyectiva entre ellas. ¿Será cierto que las líneas  $\langle p, f(p) \rangle$  con  $p \in \ell_1$  son las tangentes a una cónica? Es decir ¿es toda transformación proyectiva entre rectas una correspondencia tangencial? Por supuesto que debemos eliminar el caso con el que empezamos a estudiar la geometría proyectiva que es la proyección desde un punto. Nótese que al proyectar desde un punto, la intersección  $p_0 := \ell_1 \cap \ell_2$  se queda en su lugar, así que si añadimos la hipótesis de que  $f(p_0) \neq p_0$  (que es el único punto donde podría pasar que  $\langle p, f(p) \rangle$  no es una línea), la pregunta adquiere la dimensión de “teorema a la mano”.

Antes de enunciarlo, recordemos la evidencia del “trazo artesanal de paraboloides” que algunos tuvimos la suerte de conocer desde la escuela secundaria. Si se toman dos intervalos no paralelos en una madera, se clavan clavitos a intervalos regulares en cada uno de ellos y luego se va entrelazando un hilo que una tachuelas correspondientes y de tal manera que se vaya cruzando (en un intervalo va en una dirección y en el otro al revés), se delinea una parábola, o, con un poco de imaginación tridimensional, parece un reglado de un paraboloide hiperbólico. Éste es un caso particular del problema anterior, la transformación entre las dos líneas es afín, y al corresponderse sus puntos al infinito, la línea por ellos es tangente a la cónica y por tanto es una parábola (dando ya por un hecho que la respuesta es afirmativa).

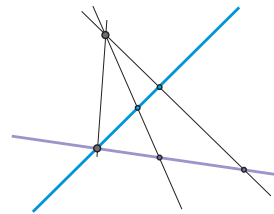


**Teorema 9.3** Sean  $\ell_1$  y  $\ell_2$  dos líneas en  $\mathbb{P}^2$  que se intersectan en  $p_0$ , y sea  $f : \ell_1 \rightarrow \ell_2$  una transformación proyectiva entre ellas. Si  $f(p_0) \neq p_0$ , entonces  $f$  es la correspondencia tangencial de una cónica; y si  $f(p_0) = p_0$ ,  $f$  es la proyección desde un punto.

Supongamos primero que  $f(p_0) = p_0$ . Consideremos otros dos puntos  $a, b \in \ell_1$ , y sea  $q = \langle a, f(a) \rangle \cap \langle b, f(b) \rangle$ . La proyección desde  $q$  de  $\ell_1$  a  $\ell_2$  coincide con  $f$  en tres puntos y por lo tanto (Teorema de 3 en 3) es  $f$ .

Supongamos entonces que  $f(p_0) \neq p_0$ . Notemos primero que la cónica que estamos buscando (la que dará la correspondencia tangencial entre  $\ell_1$  y  $\ell_2$ ) tiene como tangentes a  $\ell_1$  y a  $\ell_2$ . Consideremos tres nuevas rectas  $\ell_3, \ell_4$  y  $\ell_5$  de la forma  $\langle p, f(p) \rangle$  con  $p \in \ell_1$ ; si encontramos una cónica  $\mathcal{C}$  que tenga a estas cinco rectas como tangentes habremos terminado: la correspondencia tangencial de  $\ell_1$  a  $\ell_2$  respecto a  $\mathcal{C}$  coincide con  $f$  pues lo hace en tres puntos. Obsérvese entonces que estamos demostrando que el conjunto de rectas  $\{\langle p, f(p) \rangle \mid p \in \ell_1\}$  son las tangentes a una cónica.

Queda por demostrar que hay una cónica tangente a cinco rectas dadas. Lo haremos dualizando un teorema clásico.



**Teorema 9.4** *Por cinco puntos (distintos) en  $\mathbb{P}^2$  pasa una curva cuadrática; ésta es única si y sólo si no hay cuatro de ellos colineales, y es no degenerada (una cónica) si y sólo si están en posición general.*

**Demostración.** Si no están en posición general, tres de los puntos son colineales y la recta  $\ell$  que pasa por ellos tiene que estar en la cónica (de no ser así, la intersectaría en tres puntos). Además,  $\ell$  junto con la recta que pasa por los otros dos es la cónica deseada (y degenerada); y está claro que no es única sólo cuando un cuarto, o todos, están en  $\ell$ , pues entonces la segunda recta se puede hacer variar. Preocupémonos entonces por la existencia en general.

Podemos suponer que los cinco puntos están en  $\mathbb{R}^2$ . Consideremos las seis constantes del polinomio general de segundo grado como incógnitas. Al evaluar con las coordenadas de uno de los puntos dados e igualar a 0 (queremos que el punto anule el polinomio) se obtiene una ecuación lineal homogénea en las incógnitas. Tenemos entonces cinco ecuaciones lineales homogéneas con seis variables. Tienen una solución no trivial: esos valores nos dan un polinomio que se anula en los cinco puntos dados y define la cónica que buscamos.

Formalmente hay un problemita; en este libro nunca llegamos a sistemas lineales de 5 por 6. Si se nos cree esta última afirmación, o ya se manejan rudimentos de álgebra lineal, que ahí quede el asunto; pero por puro prurito matemático una demostración que sólo usa elementos intrínsecos se describe en los ejercicios.

La unicidad equivale a que las soluciones tengan dimensión uno, pues dan entonces múltiplos de un polinomio y definen la misma cónica. Es más latoso de ver que esto equivale al enunciado del teorema. Los ejercicios de la demostración alternativa realzan entonces su valía.  $\square$

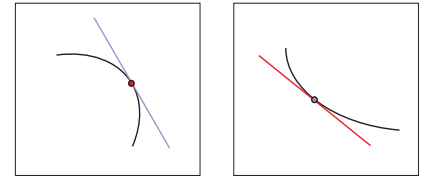
Regresando al Teorema 9.3, las cinco rectas corresponden a cinco puntos en el plano proyectivo dual,  $(\mathbb{P}^2)^*$ , que conviene pensar por separado de  $\mathbb{P}^2$  aunque acabemos usando tres coordenadas proyectivas en cada uno de ellos. (Aquí estamos usando la dualidad clásica, donde a una recta le corresponde el punto  $[\mathbf{v}]$  tal que la ecuación  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0$  la define, y que hemos denotado  $\ell_{[\mathbf{v}]} \longleftrightarrow [\mathbf{v}]$ .) Además, estos cinco puntos están en posición general, pues por la construcción es fácil ver que no hay tres de las rectas concurrentes (lo contrario implicaría que  $f(\mathbf{p}_0) = \mathbf{p}_0$ ). Por el Teorema 9.4 existe una cónica  $\mathcal{C}'$  no degenerada, en  $(\mathbb{P}^2)^*$ , que pasa por los cinco puntos. Tiene una matriz simétrica asociada  $\mathbf{A}$  con  $\det \mathbf{A} \neq 0$ . Para concluir, vamos a demostrar que la cónica asociada a la matriz  $\mathbf{A}^{-1}$  es tangente a las cinco rectas originales.

Supongamos que  $[\mathbf{v}] \in (\mathbb{P}^2)^*$  está en la cónica  $\mathcal{C}'$ , es decir que  $\mathbf{v}^\top \mathbf{A} \mathbf{v} = 0$ . Sabemos que la recta tangente a  $\mathcal{C}'$  en  $[\mathbf{v}]$  está dada por la ecuación  $(\mathbf{A} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{x} = 0$ . Pero además corresponde a un punto en  $\mathbb{P}^2$ ; precisamente a  $[\mathbf{A} \mathbf{v}] \in \mathbb{P}^2$ , que por la dualidad es un punto en la recta  $\ell_{[\mathbf{v}]}$  (piénsese en una de las cinco originales). Tenemos entonces que las rectas tangentes a  $\mathcal{C}'$  nos definen puntos en las rectas originales (los duales de sus tangentes), y estos puntos cumplen

$$(\mathbf{A} \mathbf{v})^\top \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{v}) = \mathbf{v}^\top (\mathbf{A}^\top \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}) \mathbf{v} = \mathbf{v}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{v} = \mathbf{v}^\top \mathbf{A} \mathbf{v} = 0.$$

Entonces, si  $\mathcal{C}$  es la cónica asociada a la matriz  $\mathbf{A}^{-1}$ , su tangente en el punto  $[\mathbf{A} \mathbf{v}]$  es  $\ell_{[\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A} \mathbf{v})]} = \ell_{[\mathbf{v}]}$ . Y queda demostrado el Teorema 9.3.

La generalidad de estos últimos párrafos es para poder concluir con algo que era de esperarse.



**Teorema 9.5** *Las tangentes a una cónica (no vacía y no degenerada) forman una cónica en el plano proyectivo dual.*

---

**EJERCICIO 9.4** Demuestra, resolviendo el sistema de ecuaciones  $5 \times 6$  correspondiente, que una cónica  $\mathcal{C}$  pasa por los puntos  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$ , si y sólo si está definida por un polinomio de la familia

$$a x(x - 1) + c y(y - 1)$$

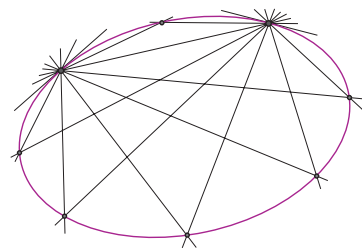
con  $[a : c] \in \mathbb{P}^1$ .

**EJERCICIO 9.5** Demuestra que cualquier  $\mathbf{p} \in \mathbb{P}^2$  distinto de los cuatro puntos anteriores está en exactamente una de las cónicas de la familia. Concluye el Teorema 9.4 usando el de 4 en 4.

---

## 9.5 El Teorema místico de Pascal.

El dual del Teorema 9.3 da que si tenemos una transformación proyectiva entre dos haces de rectas (concurrentes), entonces los puntos de intersección de los pares de rectas correspondientes forman una cónica o una recta. Esto implica que las cónicas pueden definirse axiomáticamente sin uso de coordenadas o ecuaciones, son algo natural dentro de la geometría proyectiva, pues solo dependen de la relación de incidencia. Veamos. Las proyecciones desde un punto entre rectas (con lo que empezamos a estudiar geometría proyectiva) se definen por incidencia (rectas que pasan por dos puntos e intersecciones de rectas), a veces se les llama *perspectividades*. Sin embargo, la composición de perspectividades no necesariamente es una perspectividad, es una transformación proyectiva o *proyectividad*. Estas nociones tienen sentido en el dual. Entonces, si tomamos los puntos  $\ell \cap f(\ell)$  al correr  $\ell$  en un haz concurrente (una línea dual) y siendo  $f$  una proyectividad con otro haz, se obtiene, en general, una cónica. Esta sería su definición sintética. Hacemos énfasis en esto al final para recordar y dar evidencia de lo que decíamos al principio: que también se puede hacer geometría a partir de axiomas y se llega a lo mismo;<sup>1</sup> la "geometría" es una.

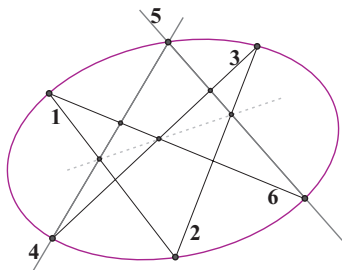


Para concluir, demostramos un teorema clásico usando el inverso de lo anterior, que las cónicas definen proyectividades entre los haces de rectas por sus puntos.

**Teorema 9.6 (Pascal)** *Los lados opuestos de un hexágono inscrito en una cónica se intersectan en puntos colineales.*

**Demostración.** Consideremos seis puntos  $p_1, p_2, \dots, p_6$  en una cónica  $\mathcal{C}$ . Nótese que el orden en que los dimos es independiente del orden cíclico en que aparecen en la cónica; el que usamos en la figura es simplemente para que los puntos relevantes queden cerca. Denotemos por  $l_i$  a la línea que va del punto  $p_i$  al siguiente (según el hexágono), es decir,  $l_i := \langle p_i, p_{i+1} \rangle$ , donde  $p_7 = p_1$ ; nótese que las seis líneas son distintas pues estamos suponiendo (con nuestra acepción de la palabra *cónica*) que  $\mathcal{C}$  es no degenerada. Y denotemos  $p_{ij} := l_i \cap l_j$ , para  $i \neq j$ ; de tal forma que  $p_i = p_{(i-1)i}$ . Debemos demostrar que los puntos  $p_{14}, p_{25}, p_{36}$  son colineales.

Sea  $f : l_4 \rightarrow l_5$  la transformación proyectiva que se obtiene identificando a  $l_4$  con el haz concurrente en  $p_1$  ( $l_4 \ni p \mapsto \langle p, p_1 \rangle$ ), luego a éste con el haz de  $p_3$  a través de la cónica  $\mathcal{C}$  y finalmente a éste haz con  $l_5$  (por intersección). Nótese que  $f$  se puede pensar como proyectar  $l_4$  a  $\mathcal{C}$  desde  $p_1$  seguida de proyectar  $\mathcal{C}$  a  $l_5$  desde  $p_3$ , y tenemos entonces los siguientes datos de  $f$ :



$$\begin{aligned} p_4 &\mapsto p_4 \mapsto p_{35} \\ p_{14} &\mapsto p_2 \mapsto p_{25} \\ p_{46} &\mapsto p_6 \mapsto p_6 \\ p_5 &\mapsto p_5 \mapsto p_5 \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Este enfoque axiomático puede verse en [21].

Puesto que  $f(p_5) = p_5 = \ell_4 \cap \ell_5$ , se tiene que  $f$  es una proyección; y entonces es la proyección desde el punto

$$\langle p_4, p_{35} \rangle \cap \langle p_{46}, p_6 \rangle = \ell_3 \cap \ell_6 = p_{36}.$$

Como  $f(p_{14}) = p_{25}$ , se tiene entonces que  $p_{14}, p_{25}$  y  $p_{36}$  son colineales.  $\square$

El Teorema de Pascal generaliza al de Pappus (6.13), pues éste último puede pensarse como un caso especial para cónicas degeneradas. Aunque la demostración original de Pascal se desconoce, está enunciado en el *Ensayo sobre las cónicas* que publicó a los 17 años; es evidencia intelectual de que sí conocía el trabajo pionero sobre geometría proyectiva de Desargues; además, éste y su padre fueron amigos, así que por lo menos lo conoció bien. A veces se le añade el adjetivo “*místico*” al Teorema: quizá por lo del “*hexagrama místico*” o bien porque el mismo Pascal fué absorbido más adelante en su vida por el misticismo.

---

**EJERCICIO 9.6** Demuestra el Teorema de Pappus (6.13) con la idea que se usó para demostrar el de Pascal. ¿Puedes enunciar y demostrar un Teorema de Pappus-Pascal? Sólo falta analizar unos casos degenerados.

---



# Capítulo 10

## Apéndice

Este apéndice consta de dos secciones independientes. En la primera, establecemos muy brevemente las nociones básicas, la terminología y la notación de teoría de conjuntos que se usa en el libro. En la segunda, de un nivel mucho más alto, introducimos los números complejos apenas lo suficiente para enunciar el Teorema Fundamental del Álgebra. No damos su demostración, pero indicamos a grandes rasgos como probar el corolario de él que se usa en el capítulo 7.

### 10.1 Conjuntos

La propiedad básica de un conjunto  $A$  es que, dado cualquier objeto  $x$ , se puede decir si  $x$  es elemento de  $A$ , escrito  $x \in A$  y que se lee “ $x$  está en  $A$ ”, o bien, si no lo es, lo cual se escribe  $x \notin A$ .

Para definir un conjunto hay que hacer explícito de alguna manera cuáles son sus miembros o elementos. Esto se puede hacer, al menos, de tres maneras. Primero, mediante una lista explícita, por ejemplo, los números naturales son

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Segundo, dando una propiedad o propiedades que cumplen sus elementos; y tercero, mediante un parámetro que recorre los elementos de otro conjunto previamente definido. Por ejemplo, los números naturales pares se pueden definir por esa propiedad (la de ser par) o bien mediante un parámetro que recorre a los naturales:

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es par}\} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\};$$

la barra de enmedio “ $\mid$ ” se lee “tal que” o bien “donde”; en algunos textos se usan dos puntos “ $:$ ” en vez de “ $\mid$ ”.

La *unión* y la *intersección* de dos conjuntos  $A$  y  $B$  son respectivamente:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\} \quad \text{y} \quad A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

Cuando todos los elementos de un conjunto  $A$  también son elementos de  $B$ , se dice que  $A$  es *subconjunto* de  $B$ , o bien que  $B$  *contiene* a  $A$ , y se escribe  $A \subset B$ , o bien  $B \supset A$ . De tal manera que siempre se tiene que  $A \cup B$  contiene a  $A$  y a  $B$ , y que  $A \cap B$  es subconjunto de  $A$  y de  $B$ . Otra *operación* de conjuntos (cómo obtener un conjunto a partir de otros dos) es la *diferencia*, que se denota  $A \setminus B$  o bien  $A - B$ , que es

$$A \setminus B = A - B := \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Un conjunto importantísimo es el *conjunto vacío*, que se denota  $\emptyset$ , y es el único conjunto que no tiene elementos; para cualquier  $x$  se tiene que  $x \notin \emptyset$ . Así que  $A - B$  cumple que  $B \cap (A - B) = \emptyset$  y  $(A - B) \subset A$ . Además, el vacío es subconjunto de cualquier otro conjunto, pues por “*vacuidad*” se cumple para cualquier conjunto  $A$  que

$$x \in \emptyset \quad \Rightarrow \quad x \in A,$$

donde “ $\Rightarrow$ ” significa “*implica que*”; puesto que  $x \in \emptyset$  nunca sucede, cada vez que sucede se cumple lo que sea.

La última operación de conjuntos que usaremos es el *producto cartesiano*. A partir de dos conjuntos  $A$  y  $B$ , se puede construir un nuevo conjunto  $A \times B$ , llamado su *producto* que consta de todas las parejas ordenadas con el primer elemento en  $A$  y el segundo en  $B$ , es decir

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

## Relaciones

Una *relación*  $R$  en un conjunto  $A$  es un subconjunto de su producto cartesiano,  $R \subset A \times A$ ; es decir, es distinguir una colección de parejas *relacionadas*. Pero es más cómodo y usual denotarla con una tilde “ $\sim$ ” (o un símbolo parecido) con la convención

$$a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad (a, b) \in R,$$

donde “ $\Leftrightarrow$ ” significa “*si y sólo si*”; y cuando  $a \sim b$  se dice, y se lee, que  $a$  “*está relacionada con*”  $b$ . Vale entonces la notación  $a \not\sim b$  para  $(a, b) \notin R$ : cuando  $a$  no está relacionado con  $b$ .

Hay dos tipos de relaciones que con frecuencia surgen naturalmente. Una relación en  $A$  es una *relación de orden* si cumple las siguientes propiedades:

- i)  $a \sim a$  para todo  $a \in A$  (*reflexividad*);
- ii)  $a \sim b$  y  $b \sim a \Rightarrow a = b$ ;
- iii)  $a \sim b$  y  $b \sim c \Rightarrow a \sim c$  (*transitividad*).



Un ejemplo claro de orden son los números naturales con la relación “*ser menor o igual*” denotada “ $\leq$ ”. Otro es la relación de *contención* en el conjunto de los subconjuntos de un conjunto  $A$ ; tienen entonces sentido las definiciones alternas “la unión de  $A$  y  $B$  es el mínimo conjunto que contiene a ambos” y “la intersección el máximo subconjunto común”. Obsérvese, además, que una relación de orden siempre tiene una relación de *orden estricto* asociada donde se eliminan de la relación a las *igualdades*  $\mathbf{a} \sim \mathbf{a}$  y se llama entonces *antireflexiva*. Para el orden en los números se obtiene “*ser menor*” denotada “ $<$ ”; y para la de contención se obtiene la de “*contención estricta*”,  $\subsetneq$ .

Una relación  $\sim$  en  $A$  es de *equivalencia* si es reflexiva, transitiva y además cumple:

$$\text{iv) } \mathbf{a} \sim \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{b} \sim \mathbf{a} \quad (\text{simetría}).$$

Cuando se tiene una relación de equivalencia en un conjunto  $A$ , los subconjuntos máximos tales que todos sus elementos están relacionados entre sí se llaman *clases de equivalencia*; y el conjunto  $A$  se *parte* en clases de equivalencia; es decir, cualquier elemento  $\mathbf{a} \in A$  está en una clase de equivalencia, la de los equivalentes a  $\mathbf{a}$ , y las clases de equivalencia son disjuntas. E inversamente, una *partición* de un conjunto en subconjuntos ajenos y que lo cubren induce una relación de equivalencia en él.

El otro concepto que, por elemental, debería entrar en este apéndice es el de “función”, pero es tan importante para el texto que decidimos incluirlo al principio del capítulo 3.

## 10.2 Números complejos

Los números complejos, denotados  $\mathbb{C}$ , se construyen a partir de los números reales  $\mathbb{R}$  al introducir, o anexar, un nuevo número que se denota  $i$ , que cumple

$$i^2 = -1.$$

De tal manera que los números complejos se pueden definir como

$$\mathbb{C} := \{\mathbf{a} + \mathbf{b}i \mid \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}\}.$$

Por la igualdad  $i^2 = -1$ , la suma y la multiplicación de los reales se extiende naturalmente a  $\mathbb{C}$ , de tal manera que se convierte en un *campo* (ver sección 1.3.1).

Un polinomio en  $\mathbb{C}$  es una expresión de la forma

$$P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n, \quad (10.1)$$

con sus *coeficientes*  $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ , y es de *grado*  $n$  si  $c_n \neq 0$ . De tal manera que para cualquier  $z \in \mathbb{C}$  se puede *evaluar*  $P(z)$  (desarrollando la expresión) y de nuevo es un número complejo. Una *raíz* de  $P$  es un número complejo que anula al polinomio,

es decir, tal que al evaluar a  $P$  en él da  $0$ . Por ejemplo, las raíces del polinomio  $x^2 + 1$  son  $i$  y  $-i$ .

El **Teorema Fundamental del Álgebra**, probado por Gauss, dice que un polinomio de grado  $n$  tiene  $n$  raíces, o más precisamente, que dado el polinomio (10.1) (con  $c_n \neq 0$ ) existen  $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$  (sus raíces) tales que

$$P(x) = c_n (x - z_1) (x - z_2) \cdots (x - z_n).$$

Un campo con esta propiedad se llama *algebraicamente cerrado*. Los reales no lo son pues el polinomio  $x^2 + 1$  no tiene raíces reales; pero al adjuntar una raíz de él se cierra.

El corolario de este teorema que se usa en el libro es que *un polinomio real de grado impar tiene al menos una raíz real*. Se sigue de la siguiente observación.

Para cada número complejo  $z = a + b i$  se tiene su *conjugado*

$$\bar{z} = a - b i,$$

y es fácil ver que esta asignación cumple las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \overline{(z + w)} &= \bar{z} + \bar{w} \\ \overline{(zw)} &= \bar{z} \bar{w} \\ z = \bar{z} &\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

De tal manera que para un polinomio  $P(x)$  con todos sus coeficientes reales se tiene que  $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$  para cualquier  $z \in \mathbb{C}$ . En particular, si  $z_0$  es una raíz, también lo es su conjugado  $\bar{z}_0$ , pues  $P(z_0) = 0 = \overline{P(z_0)} = P(\bar{z}_0)$ . Es decir, las raíces complejas (no reales) de un polinomio con coeficientes reales vienen en parejas conjugadas. Y por lo tanto, si tiene grado impar tiene al menos una raíz real.

# Bibliography

- [1] Silvio Bergia, *Einstein and the birth of special relativity*. En *Einstein: A Centenary Volume*, A. P. French, Editor. Harvard University Press, Cambridge, Mass. 1979.
- [2] Javier Bracho, *¿En qué espacio vivimos?* La Ciencia para todos No. 77; Fondo de Cultura Económica, México D.F., 1989.
- [3] John H. Conway y Derek A. Smith, *On quaternions and octonions*. A. K. Peters; Natick, Massachusetts, 2003.
- [4] H. S. M. Coxeter, *Regular polytopes*. Dover; Nueva York 1973.
- [5] H. S. M. Coxeter, *Projective honeycombs*. ??????
- [6] H. S. M. Coxeter, *Introduction to geometry*, Wiley, Nueva York 1961.
- [7] H. S. M. Coxeter, *Projective geometry*, 2a ed., University of Toronto Press, 1974.
- [8] Branko Grünbaum y G. C. Shepard, *Tilings and Patterns*, W. H. Freeman, Nueva York, 1987.
- [9] David Hilbert y S. Cohn-Vossen, *Geometry and the imagination*, 1932. Traducción al inglés por P. Nemenyi, Chelsea Publishing Company; Nueva York 1952.
- [10] Alan Holden, *Shapes, space and symmetry*. Dover; Nueva York 1971.
- [11] L. Christine Kinsey y Teresa E. Moore, *Symmetry, shape and space*. Key College Publishing en cooperación con Springer Verlag; Nueva York, 2002.
- [12] Elmer Rees, *Elementary geometry*, ????
- [13] R. von B. Rucker, *Geometry, relativity and the fourth dimension*. Dover, Nueva York, 1977.
- [14] Patrick J. Ryan, *Euclidean and non-euclidean geometry; an analytic approach*. Cambridge University Press; Cambridge, 1986.
- [15] Hermann Weyl, *Symmetry*. Princeton University Press; Princeton, 1952.

- [16] Robert Goldblat, *Orthogonality and spacetime geometry*. Univesitext, Springer-Verlag, Nueva York, 1987.
- [17] George A. Jennings, *Modern geometry with applications*. Univesitext, Springer-Verlag, Nueva York 1994.
- [18] Benoit Mandelbrot, *Fractals everywhere*
- [19] *Generating fractals*
- [20] David Darling, *The universal book of mathematics: from abracadabra to Zeno's paradoxes*. John Wiley & Sons, Inc., New Jersey 2004.
- [21] Judith N. Cederberg, *Acourse in modern geometries*. Undergraduate texts in Mathematics, Springer-Verlag, Nueva York, 1989.
- [22] John Stillwell, *Mathematics and its history*. Second Edition. Springer-Verlag, Nueva York 2002, 1989.
- [23] George E. Martin, *Transformation geometry; an introduction to symmetry*. Undergraduate texts in Mathematics, Springer-Verlag, Nueva York, 1982.
- [24] David Mumford, Caroline Series y David Wright, *Indra's pearls; the vision of Felix Klein*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

# Index

- índice, 335
- ángulo, **48**
  - (s) complementarios, 53
  - de un vector, 51
  - diédrico o diedro, **223**
  - en  $H^2$ , 368, **369**
  - entre líneas esféricas, **222**
  - entre rectas, 53
  - entre vectores, 52, **52**, **56**
    - unitarios, **54**
  - interno de un triángulo, 53
  - recto, 1, 32, 48
- ánima, 280
- ápice, 247
- área
  - de un paralelogramo, 62, 211
  - de un triángulo esférico, 225
  - de un triángulo hiperbólico, 380
- áurea
  - (o), isósceles
    - alto, 243
    - chaparro, 243
  - , espiral, 172
  - , palapa, 243
  - , proporción, 172, **243**, 328
- órbita, **162**, **234**, 357, 361
  
- A-polaridad, 386
- acción libre, 240
- afinidad, **201**
- algebraicamente
  - cerrado, 314
  - equivalentes, matrices, 318
- Alhambra, 169
- altura
  - de un paralelogramo, 62
  - de un triángulo, 41
- anillo de polinomios, 308
- antípoda, **220**
- anticonmutatividad, 209
- antisimetría, 209
- Apolonio
  - , círculos de, **88**
  - Apolonio de Perga (c. 255-170 A.C.)*, 84
- arcocoseno, 50
- armónica
  - , cuarteta, 264
  - , pareja, 89
  - cuarteta, 368
- armónicos, **264**
  - , conjugados, 89, 388
- armonía, razón de, 90
- Arquímedes, 225
  - Arquímedes de Siracusa (c. 287-212 A.C.)*, 224
- asíntota, 85
- asociatividad, 10
- atlas, **275**
- axioma, 1, 9
  - (s) de espacio vectorial, 9, 11
  - (s) de incidencia (proyectivos), 271
  - (s) de los números reales, 10
  - del supremo, 10
  
- Bézout ??????*, 314
- balón de fútbol, 237
- baricentro
  - de un triángulo, **17**
- base

- canónica, 128, **130**
  - de  $\mathbb{R}^2$ , 53
- L-ortonormal, 349
- ortonormal, 125, **142**
  - de  $\mathbb{R}^2$ , **53**
  - de  $\mathbb{R}^3$ , **55**
- bigajo, 224
- bilineal, 209, 341, 385
- bisectriz, 64
- biyección, 13, **100**
- bola sólida, 219, 299
- Bolyai, János (1802-1860)*, 337
- círculo, 1, 58, **73**
  - al infinito, **338**
  - de curvatura, 361, **362**
  - de radio cero, 182
  - imaginario, 182
  - máximo, 220
  - unitario, **47**, **72**, 181
- cámara, 304
  - canónica, 304
- cónica, 71, 72, 246
  - (s) en el infinito, 307
  - proyectiva, **327**
- campo, 10, 397
- campo de vectores, 374
- Cantor, Georg Ferdinand Ludwig Philipp (1845-1918)*, iv, 99
- cardinalidad, 235
- carta
  - afín, 276
  - canónica, **276**
  - coordenada canónica, **274**
- casco convexo, 238, 302
- cazuela hiperbólica, **349**
- centro
  - caleidoscópico, 240
  - de expansión, 157
  - de la cónica, 386
  - de simetría, 162
    - caleidoscópica, 234
    - rotacional, 234, 238
  - de un círculo, 1, 58, **73**
  - de una curva cuadrática, 187
  - de una elipse, 79
- cerradura proyectiva, 311
- circuncírculo, 74
- circuncentro, 42
- circunferencia, 48
- clase de equivalencia, 397
- coeficientes
  - de un polinomio, 181, 397
  - de una combinación lineal, **21**, 130
- colinealidad, 19
- combinación
  - afín, 19, **22**, **150**, 205
  - baricéntrica, 19, **22**
  - lineal, **21**, 130
- compadre ortogonal, **32**, 208
- complejo conjugado, 398
- complemento de un ángulo, 226
- componentes, 158
- composición de funciones, **101**
- concurrency de rectas, 17
- conforme, **382**
- congruencia, 99
- conjugación, 112, 163, 367
- conjunto vacío, 396
- conmutatividad, 10
- cono, 71, 95, **311**
  - circular, 71
- contagio grupal, 353
- contracción, 8
  - fuerte, 175
- contradominio, 100
- coordenadas
  - baricéntricas, 16, **19**, 205
  - esféricas
    - altitud, **219**
    - longitud, **219**
  - homogéneas, **259**, **269**
  - polares, **51**, **299**
- correspondencia
  - biunívoca, *see* biyección

- tangencial, 365, **366**, 389
- coseno, 49
  - hiperbólico, 374, **376**
- Coxeter, 302
  - , relaciones de, 241
- Coxeter, Harold Scott MacDonald (1907-2003)*
  - , relaciones de, 241
- cuádriga, 334
  - proyectiva, 335
- cuadrícula canónica, 128
- cuadrante
  - (s) del plano cartesiano, 6
  - , primer, 353
  - hiperbólico, **353**
- cuaterniones, 302
- cubo, 238, **242**
- cubrimiento doble, 277
- cuerda, 338
- curva
  - algebraica, **308**
  - proyectiva, **311**
  - de vida, **343**
- déficit angular, 379
- Dandelin
  - , esferas de, 96
- Dandelin, Germinal P. (1794-1847)*, 95
- delta de Kroenecker, 142
- demostración, 1
- Desargues, 393
  - Desargues, Girard (1591-1661)*, 293
- Desargues, teorema de, 293
- Descartes, 3, 5, 66, 99, 245, 246, 248
  - Descartes, René (1596-1650)*, 2
- desigualdad
  - de Schwartz, 47
  - del triángulo, 46
- determinante
  - como área signada, 62
  - como volumen signado, 214
  - de dos vectores, **33**
  - de tres vectores, 210, **213**
  - de un sistema de ecuaciones, 28
  - de una matriz 2x2, **145**
  - de una matriz 3x3, **216**
- diagonales, 15
- diferencia, 396
- dilatación, 8
- dimensión, 7
- Dios, 10
- dirección de un vector, 51
- directriz, 82, 88, 97, 331
- discriminante, 261
- distancia, 1, 44
  - en  $H^2$ , 368, **377**
  - en la esfera, **222**
  - euclidiana, **57**
  - focal, 304
- dodecaédromo, 303
- dodecaedro, 238, **242**
- dominio, 100
- dualidad, 65, **270**
- Durero, Albertch ??? (1471-1528)*, 248
- e-reflexión, 262
- ecuación
  - canónica de la elipse, **80**
  - canónica de la hipérbola, **81**
  - funcional de la recta, **38**
  - lineal homogénea, 35
  - normal de la recta, **37**
  - normal del plano, 205
  - unitaria de la recta, 64, **66**
  - vectorial del círculo, **73**
- ecuador, **219**
- eigenespacio, *see* espacio propio
- eigenvalor, *see* valor propio
- eigenvector, *see* vector propio
- Einstein, Albert (????-1954)*, 245, 342
- eje
  - (s) de simetría, 116, 327
  - coordenado del plano, 5
  - de la parábola, **84**
  - x, 4

- y, 4
- z, 6
- El Quinto (postulado), **2**, 23, 245
- elemento, 395
- elipse, 67, 71, **78**, 247
- elipsoide, 331
- entrada, **134**
- equivalencia
  - algebraica de matrices, 318
  - lineal de matrices, 321
  - módulo G
    - de figuras, **180**
    - de polinomios , **184**
  - ortogonal de matrices, 321
  - proyectiva
    - de curvas, 315
    - de polinomios, 315
- escala, 248
- Escher, Maurits Cornelius (1898-1972)*, 382
- esfera, **219**
  - de dimensión 3, **300**
  - de dimensión n, 47, 219
  - de radio imaginario, 349
- espacio
  - de rectas, 66
  - euclideo, 7
  - métrico, **57**
  - propio, 190
  - topológico, 68
  - vectorial, **11**
- espejo, 239
  - , línea, 113, 298, 368
  - , punto, 109
  - , puntos, 262
- espiral, 172
- estabilizador, 170, **234**
  - cíclico, 234
  - diédrico, 234
- Euclides, 5
  - , Elementos de, 1, 3
- Euclides de Alejandría (c. 330-270 A.C.)*,
  - 1
- evento, **343**
- excentricidad, 88, **93**
- expansión
  - , centro de, 157
  - , factor de, 157
  - de P1, 262
- expresión
  - baricéntrica
    - de un plano, 19, **205**
    - de una recta, 16
  - paramétrica
    - de un plano, **20**, **205**
    - de una recta, **13**
  - vectorial de un polinomio cuadrático, **185**
- extensión lineal, **131**
- exterior
  - de una cónica, 387
  - del círculo, 75, 339
- extremos de una línea hiperbólica, 338
- fórmula del chicharronero, **77**, 261
- figura, 114
  - (s) isométricas, 180
  - (s) semejantes, 180
  - acotada, 161
  - caleidoscópica, 168
  - fundamental, 117, 168
  - plana, 179
- flujo, 374
- foco
  - de proyección, 304
  - elipse, 78
  - hipérbola, 81
  - parábola, 82
- forma bilineal
  - de Lorentz-Minkowski, 341
  - simétrica, 385
- forma cuadrática, 326, 335, 385
  - asociada a una matriz simétrica, 318
  - de Lorentz, 320, **340**
  - definida, 320, **326**



- negativa, **326**
- positiva, **326**
- degenerada, 320, **326**, 335
- euclidiana, 320
- indefinida, 326
- no degenerada, **326**, 335
- fractal
  - autosemejante, 173
  - autosimilar, 173
- función, **100**
  - (es) trigonométricas, 49
  - afín, **107**, **152**
  - lineal, **127**
  - proyectiva, 273
- G-equivalencia, *see* equivalencia módulo G
- Gauss, 398
- Gauss, Carl Friedrich (1777-1855)*, 337
- geodésicas, 296
- geometría
  - algebraica, iii, 247, 308, 315, 335
  - analítica, v, 5
  - computacional, iii
  - diferencial, iii
  - discreta, iii, 162, 234
  - euclidean, 1
  - no conmutativa, iii
  - proyectiva, 245
  - simpléctica, iii
- gráfica de una función, 38
- grado
  - de un polinomio, 307, 308, 397
  - de una curva algebraica, 308
- grados (medida angular), 48
- Grassmann* ????????, 66
- Grassmanniana, 66
- grupo
  - , generadores del, 241
  - , presentación del, 241
  - afín, **149**
  - cíclico, 105, 116
  - infinito, 119
  - caleidoscópico, 169, 237, 240
  - conmutativo, 10
  - cristalográfico, **169**, 237
  - de matrices hiperbólicas, 351
  - de rosetas o rosetones, 115
  - de simetría afín, **165**
  - de simetrías, **114**, **161**, 168
    - de una forma cuadrática, 327
  - de transformaciones, 99, **104**
    - hiperbólicas, 339
    - proyectivas, **285**
  - de traslaciones horocíclicas, 361
  - diédrico, 105, **115**, 237
    - infinito, 119
  - discreto, 169
  - espiral, 172
  - generado por..., 104
  - general lineal, 144
  - hiperbólico orientado, **354**
  - ortogonal, 142
  - ortogonal especial, 230
  - proyectivo, **254**
  - simétrico de orden n, 105
  - triangular, 237, 383
- grupoide, 175
- haz
  - de rectas, 69
  - de rectas concurrentes, 40
  - de rectas paralelas, 25
  - hiperbólico
    - concurrente, 339
    - paralelo, 339
    - ultraparalelo, 339
- hemisferio
  - de S<sup>3</sup>, 300
  - superior, 278
- Hilbert, David (1862-1943)*, 333
- hipérbola, 72, **81**, 247
  - unitaria o canónica, 181
- hiperboloide
  - canónico, 332

- de dos hojas, 332
- de una hoja, 332
- reglado, 331
- hipersuperficie algebraica, 309, 334
- proyectiva, 335
- homeomorfismo, 298, **300**
- homogéneo
  - espacio, 229
  - polinomio, 309, 310
- homogeneidad, 340, **352**
- homogeneización, 309
- homomorfismo de grupos, 257, **285**
- homotecia, 99, **138**, 157, 159
  - , factor de, 160
- horociclo, 361
  
- icosaedro, **238**
- identidad, función, **101**
- imagen, **102**
  - de una función, **102**
  - directa, **102**
  - inversa, **102**
- incírculo, 74
- independencia lineal, **218**
  - de dos vectores, 22
- infinito, 246
  - diagonal, 267
  - horizontal, 267
  - vertical, 267
- inscrito, 242
- interior
  - de una cónica, 387
  - del círculo, 75, 339
- intersección, 395
- invariante, 261
  - , subespacio, 324
- inversa
  - , imagen, **102**
  - de una función, 102
  - de una matriz, 144
- inverso
  - aditivo, 10
  - en  $\mathbb{R}^n$ , **9**
  - multiplicativo, 10
- invertible, matriz, 144
- inyectiva, **100**
- irreducible, 309
- isometría, 58, **110**
  - (s) de  $\mathbb{R}$ , 109
- isomorfismo, 163, **235**, 363, 367
- isotropía, **352**
  
- Kepler, Johannes (1571-1630)*, 72
- Klein
  - , botella de, 281
  - , modelo de, 338
- Klein, Christian Felix (1849-1925)*, iv, 99
  
- L-ortogonal
  - (es), vectores, **344**
  - , matriz, **349**
  - , plano, **344**
- L-tamaño, 369
- línea, *see también* recta
  - (s) hiperbólicas, **338**
    - concurrentes, **338**
    - paralelas, **338**
    - ultraparalelas, **338**
  - en  $\mathbb{R}^2$ , 13
  - esférica, **220**
  - hiperbólica orientada, **353**
  - polar, **221**, **344**
- Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646-1716)*, 99
- Leonardo
  - , teorema de, **162**
- Leonardo Da Vinci* ????, 116
- ley
  - de los cosenos, 55
  - del karatazo, 137
  - esférica de los cosenos, 222, **225**
  - esférica de los senos, **226**
- Lie, Marius Sophus (1842-1899)*, 99

*Lobachevsky, Nicolai Ivanovich (1793-1856)*, 337

Lorentz

- , cono de, 319
- , forma cuadrática de, 320, **340**
- , matriz de, **340**

*Lorentz, Hendrik A. (1853-1928)*, *see* Lorentz

losetas, 168

lugar geométrico, 9, 72

método del jardinero, 78

métrica de Manhattan, 60

magnitud, 44

matriz, 133, **134**

de Lorentz, **340**

de una permutación, 139

de una reflexión, 141

de una rotación, 140

diagonal, 188

hiperbólica, **351**

identidad, **138**

L-ortogonal, **349**

no singular, 218

ortogonal, 142, 230

simétrica, **185**

singular, 218

mediana, 16, **17**

mediatriz, 42, 63

esférica, 228

hiperbólica, 378

Michelson y Morley, 343

Minkowski

, producto interno de, 341

*Minkowski, Hermann (1864-1909)*, *see* Minkowski

modelo

de Klein, **338**

de Poincaré, 382

del disco, **279**

del hemiplano superior, 382

esférico, 381

ortogonal del disco, 278

proyectivo, **338**

Moebius

, banda de, 67, **68**, 280, 339

, transformación de, 252

*Moebius, August Ferdinand (1790-1868)*, 67

monomio, 307

mosaico, 168

movimiento, 58

inercial, 14

rígido, 112, 156

rectilíneo uniforme, 14

muestrario, 168

multiplicación escalar, **9**, 11

en  $\mathbb{R}^2$ , **8**

números

complejos, 314, **397**

naturales, 395

reales, 3

recta de los, 4

neutro

aditivo, 10

multiplicativo, 10

*Newton, Issac (1642-1727)*, 72, 99

no orientable, 281

norma, **44**

normalizar, 369

Nullstellensatz, 316

octaedro, 238

ordenada al origen de una recta, 38

orientación, 214, 261

, invertir, 147

, preservar, 147

de líneas hiperbólicas, 353

negativa, 214

positiva, 214

origen

de  $\mathbb{R}^n$ , 9

de una recta, 3

del plano euclideo, 4

ortogonal

- , equivalencia, 321
- , matriz, 142
- , terna, **346**
- ortogonales
  - , círculos, 92
  - , líneas hiperbólicas, **345**
  - , puntos (proyectivos), **345**
  - , vectores, 35
- panal, 303
- Papus de Alejandría (c. 300 D.C.)*, 294
- Papus, teorema de, 294
- par propio, **189, 322**
- parábola, 72, **82**, 247
  - canónica, 181
- parámetro, 13, **395**
- paraboloide, 331
  - hiperbólico, 332, 333
- paralelismo
  - de planos, 212
  - de rectas, 23, **25**
  - de vectores, 23, 211
- paralelogramo, 15
- parametrización
  - de una recta afín, 13, 248
  - de una recta proyectiva, 272
- parte dominante de un polinomio, 312
- partición, 397
- Pascal, Blaise (1623-1662)*, 393
- paso, 159, 232, 298
- pelota playera, 237
- pendiente de una recta, 38
- permutación, 105
- perpendiculares, *see* ortogonales
- perspectiva, 245, 248, 293
- perspectividad, 392
- Pi, 48
- pies
  - en  $S^1$ , **346**
  - en una cónica, **387**
- Pitágoras, 3
  - , teorema de, 2
    - , teorema métrico de, 59
    - , teorema vectorial de, **45**
- Pitágoras de Samos (c. 580-500 A.C.)*, 2
- plano, **22**, 205
  - afín, 247
  - de simetría, 327
  - de simultaneidad, 343
  - elíptico, 296
  - esférico, 296
  - euclideo, 3, **5**
  - hiperbólico, **338**
  - orientado, 223
  - por tres puntos, **19**
  - proyectivo, 268, **269**
    - holgado, 246, 295
    - rígido, 246, 295
- Poincaré
  - , modelo de, 382
- Poincaré, Jules Henri (1854-1912)*, 342
- polar
  - , punto, 77
  - , recta, 75
- polaridad, **221**
- poliedros
  - regulares, 241
- polinomio
  - característico, 191, 323
  - cuadrático, 181
  - homogéneo, **309, 310**
    - asociado, 309
- politopos regulares, 302
- polo
  - norte, 220
  - sur, 220
- posición general, **285**, 334
- postulado, *see* axioma
- principio de dualidad, **272**
- problema del bombero, 86
- producto
  - cartesiano, 5, **396**
  - cruz, 207, **208**

- construcción geométrica, 209
  - de matrices, **137**
  - escalar en  $R_n$ , **9**
  - interno
    - de Minkowski, **341**
  - interno, interior o punto, **30**
- Programa de Erlangen, iv, 99
- proporción, **259**
  - áurea, *see* áurea
- proyección
  - desde un punto, 248, **248**
  - estereográfica, **278**, 364
- proyectividad, **285**
  - de  $P_1$ , 254
- punto, **5**
  - base de un plano, 20
  - A-polar, 386
  - al infinito (hiperbólico), **338**
  - al infinito (proyectivo), 274
  - de fuga, 248
  - en el plano, **5**
  - en  $R_n$ , **7**
  - medio, 16
  - polar, 77, 221, 345
  - singular de un grupo, 234
- radianes, 48
- radio, 1, 58, **73**, **75**
- razón
  - áurea, *see* áurea
  - de armonía, 90
- recta, **22**, *see también* línea
  - A-polar, 386
  - al infinito, 247, **274**
  - canónica, 258
  - doble, 182
  - dual, **270**
  - en  $P_2$ , **269**
  - en  $R_2$ , **13**
  - espacial, **342**
  - hiperbólica, **372**
  - luz, **342**
- orientada, **66**
- polar, **75**
- proyectiva, **252**, **259**
- real, **5**
- temporal, **342**
- reducible, 309
- reflexión, **113**
  - , matriz de, 141
  - de  $P_1$ , 262
  - de  $R$ , 109
  - hiperbólica, 368
  - proyectiva, 298
- región fundamental, 170
- regla, 332
  - de Krammer, 216
  - de la autopista, 353
- reglado, 332
- relación, 396
  - de equivalencia, **397**
  - de orden, 10, **396**
- representación, *see* expresión, 242
- Riemann,
  - esfera de, 252
- rotación, **112**, 230
  - , matriz de, 140
  - de  $P_1$ , 262
  - hiperbólica, 355
  - irracional, 161
  - proyectiva, 298
- sólidos platónicos, 238
- Schläfli
  - , simbolo de, 383
  - Schläfli, Ludwig (1814-1895)*, 241
- secciones cónicas, 72
- segmento, 1, **15**
- semejanza, 94, 99, 160
- semieje
  - mayor, **78**
  - menor, **79**
- semiespacio, 214
- semigrupo, 175

- semiplano, 62, 67
- seno, 49
  - hiperbólico, 374, **376**
- Sierpinsky
  - , triángulo de, 173
- Sierpinsky, Waclaw Franciszek (1882-1969)*, 173
- simetría, 114
  - caleidoscópica, 117
  - esférica, 233
  - rotacional, 233
- sistema de ecuaciones, 27, 28
- sobre, *see* suprayectiva
- subconjunto, 396
- subespacio
  - vectorial, 44
  - generado, 22
- subgrupo, 104
- suma vectorial, 11
  - en  $\mathbb{R}^2$ , **7**
  - en  $\mathbb{R}^n$ , **9**
- superficie
  - algebraica, 309, 310
  - cuadrática, 330
  - de nivel, 350
- suprayectiva, **100**
- tangente
  - (s), círculos, 74, 81, 82
  - (s), esferas, 95
  - a un círculo, **75**
  - a una cónica, **330**, 386
  - a una parábola, 83
- telefoto, 304
- Teoría de la Relatividad Especial, 342
- teorema, 2
  - de 3 en 3, 255
  - de 3 en 3 afín, 152
  - de 4 en 4, 285
  - de alturas, 41
  - de bases ortonormales, 54, 229
  - de bisectrices, 65
  - de Desargues, 293
  - de diagonalización, 193, 322
  - de la Alhambra, 169
  - de Leonardo, 162, 234
  - de medianas, 17
  - de Pappus, 294
  - de Pascal, 392
  - de Pitágoras, **2**
  - del gol, 230
  - fundamental del álgebra, 398
- terna
  - L-ortonormal, 348
  - ortogonal, **346**
- tetraedro, 227
- topología, 66
  - algebraica, 339
- toro, 281, 282
- transformación, 100, **102**
  - (es), grupo de, **104**
  - afín, **107**, **149**
  - de Moebius, 252, **254**
  - hiperbólica, **339**
  - lineal, 100
  - ortogonal, **120**, 125
  - proyectiva, **284**
  - rígida, 99, 100, **110**
- transpuesta de una matriz, 143
- traslación, **111**
  - de  $P^1$ , 262
  - de  $\mathbb{R}$ , 109
  - hiperbólica, 356
  - horocíclica, 359
  - proyectiva, 298
- trasladado de un conjunto, 22
- triángulo, **53**
  - canónico, 152, 228
  - de Sierpinsky, 173
  - esférico, 224
    - equilátero, 228
    - isósceles, 228
  - hiperbólico, 379
  - ideal, **371**, 380
- unión, 395

- valor
  - absoluto, **46**
  - propio, 189, **322, 323**
- vector, 5
  - (es) direccionales de un plano, 20
  - cero en  $\mathbb{R}^n$ , *see* origen
  - direccional de una recta, 13
  - en el plano, **5**
  - en  $\mathbb{R}^n$ , **7**
  - espacial, **342**
  - L-unitario, 348
  - luz, **342**
  - normal, 37, 205
  - nulo, *see* origen
  - propio, **189, 322**
  - temporal, **342**
  - unitario, 47
    - en  $\mathbb{R}^3$ , 219
  - velocidad, 49
- volumen de un paralelepípedo, 214
- zoom, efecto de, 304