Introducción analítica a las geometrías

Javier Bracho

August 9, 2005

Abstract

A Irene, Felipe y Adrián.

A mis maestros:
Victor Neumann Lara,
Sevín Recillas Pishmish.

Prefacio

Este libro es un texto para el primer nivel universitario. No presupone “cierta madurez matemática” sino que se empeña en crearla, y sólo requiere del estudiante conocimientos mínimos del lenguaje de teoría de conjuntos, además de su esfuerzo. Fue concebido y experimentado en cursos de geometría analítica de primer año de las licenciaturas en matemáticas, física, actuaría y ciencias de la computación; pero puede extenderse a otras áreas y emplearse en otros niveles.

A principios del siglo XXI, la geometría —como área de las matemáticas— evade las definiciones pues sus límites son difusos y sus ramificaciones numerosas. Es, quizá, más que un cuerpo bien definido de conocimiento: una sensibilidad al practicar el pensamiento abstracto. El título de “geómetra” hoy se lo disputan matemáticos de muy diversas áreas; por dar ejemplos, los que hacen investigación en geometría algebraica, geometría diferencial o geometría discreta se llaman a sí mismos “geómetras”, con orgullo, a secas y con razón, pero a veces también con soberbio aire excluyente. Además, a cada rato aparecen nuevas sectas de “geómetras” que abren y bautizan áreas como “geometría computacional”, “geometría simpléctica” o “geometría no conmutativa”, por no hablar del uso del término como calificativo: “topología geométrica”, “convexidad geométrica”, “teoría geométrica de grupos”, “física geométrica”, etc. Quiero dar a entender con esta breve enumeración —que sólo a unos pocos lectores dice algo más que la rimbombancia misma de las palabras— que la Geometría, ahora sí, con mayúsculas, está vivita y coleando: en plena expansión como el resto de la ciencia. Sea lo que fuere, área o sensibilidad, es un motor pujante, activo y prolífico en el imponente desarrollo actual de las matemáticas. Es, en fin, una parte medular de la matemática contemporánea, pero a su vez la rebasa como sensibilidad o por sus aplicaciones, la desborda en sus manifestaciones naturales o artísticas; es una gema de nuestra cultura.

Sin embargo, y en contraste preocupante con este panorama, la educación de la geometría en el nivel universitario básico ha quedado estancada y ha sido relegada casi hasta la vacuidad. En muchas universidades, el curso clásico de “geometría analítica” ha desaparecido o se ha integrado a los cursos de cálculo como servicio, pues las cónicas —argumentan— son de nivel bachillerato; y en aquellas donde aún se da es con programas obsoletos que parecen ignorar que el siglo XIX aconteció. Los cursos de “geometría sintética” o “a la griega”, a veces llamados con ironía involuntaria “geometría moderna” —pues tratan de “geometría griega” hecha despues de ellos— , también se sienten anquilosados y, en el mejor de los casos, se usan como materias optativas de divertimento histórico, didáctico o formativo, desligados por completo del resto del currículo científico. No obstante, se siguen formando geómetras pues la sensibilidad geométrica es irrefrenable. Los estudiantes que la tienen —don, vocación, inquietud o visión del mundo— aprenden por ósmosis y desarrollan su intuición en otros cursos básicos o intermedios, como el de álgebra lineal o topología, y sólo hasta niveles avanzados de licenciatura o maestría vuelven a encontrar "geometrías", pero ya con apellidos de abolengo como "algebraica", "riemanniana" o "diferencial", o en boga como "cuántica" y "computacional", ya muy especializadas.

Este contraste entre la vitalidad de la geometría en el desarrollo de las matemáticas —su enorme importancia en ellas— por un lado, y por el otro, su magro valor curricular en la formación básica de científicos y profesionistas —su ausencia en la cultura ciudadana mínima—, obliga a una reflexión seria, sobre todo de parte de los que nos consideramos geómetras.

Para arañar la superficie de esta discusión, tengo que recurrir al balance entre las dos grandes tendencias, fuerzas o procesos que desarrollan la ciencia (cuya frontera es difícil dibujar.) Se tiene por un lado la fuerza creativa o de investigación que la hace avanzar y conquistar nuevo conocimiento. Pero además, hay un proceso de digestión, destilación o decantación en el cual nos vamos quedando con lo fundamental de las grandes teorías al reprocesar las ideas básicas, limpiar los argumentos centrales o aclarar y simplificar los razonamientos y construcciones; de tal manera que cada generación tiene acceso a ese conocimiento a una edad más temprana y con más profundidad que sus predecesoras.

En el siglo XX el proceso de digestión de las matemáticas se centró en sus fundamentos y formalización. Se creó un lenguaje, un estilo y una notación basados en la Teoría de Conjuntos (iniciada por Georg Cantor hacia finales del XIX) que permeó y cambió a todas las matemáticas; desde cómo se presentan a los párvulos hasta cómo se escriben sus artículos de investigación, pasando, por supuesto, por sus libros de texto y los currículos de todos los niveles de enseñanza. Pecando de simplismo pero, y valga la redundancia, en aras de simplificar mi argumento, permítaseme ubicar este monumental cambio en el ámbito de lo *simbólico*: "la otra sensibilidad" para enfrentar las matemáticas. Me aventuro a afirmar entonces que la digestión de la geometría quedó rezagada porque la energía intelectual de un siglo no puede desperdigarse demasiado. Pero la marea, como el siglo, está cambiando.

En los últimos 20 o 30 años del siglo XX, se dio un renacimiento de la geometría del siglo XIX en el nivel de investigación que se está digiriendo rápidamente y permeando en la enseñanza. La geometría hiperbólica renació ligada a la topología en dimensiones bajas; la geometría proyectiva revivió como fundamento para desarrollar la visualización por computadora —y ésta a su vez revaloró la parte algorítmica de la geometría (las construcciones con regla y compás que apasionaban a los griegos)—; los grupos geométricos encontraron excitantes aplicaciones en la física, etc. Y en este entorno, han aparecido nuevos libros de texto que dan a la geometría un enfoque más "kleiniano". Lo llamo así porque al concluir el siglo XIX —en el que se convulsionó la geometría al descubrirse sus versiones no euclidianas— la "Geometría" había dejado de ser una unidad, se había "desvalagado" en múltiples direcciones al parecer divergentes y Felix Klein, en su famosa ponencia del *Programa de Erlangen* y con profundidad visionaria, trató de resumir esta revolución diciendo, a muy grandes rasgos, que "la geometría es el estudio de espacios junto con sus grupos de transformaciones". Casi un siglo después, empezó a plasmarse esta filosofía en textos de nivel medio universitario.

De estos nuevos libros de texto, tuvieron gran influencia sobre mí, y por lo tanto en el presente libro, el de E. Rees [12] y el de P. J. Ryan [14]. Sin embargo, presuponen ya una cierta madurez matemática de parte del estudiante; la filosofía de este libro (enfatizar los grupos de transformaciones) es muy parecida pero llevada a un nivel más elemental, introductorio. Se desarrolló en los cursos de Geometría Analítica que periódicamente he dado en la Facultad de Ciencias de la UNAM durante 18 años. Con un programa oficial que bien podría datar del siglo XVIII (la geometría analítica como se entendía entonces), este curso ha ido evolucionando hasta su presente forma. La condición inicial de tener que cubrir un programa basado en el estudio de las cónicas, más que estorbar, acabó dándole una gran consistencia. Pues los problemas que plantean motivan el desarrollo teórico que a su vez, con más herramientas geométricas en mano, permiten entenderlas más profundamente y plantear nuevos problemas que a su vez... así que quedaron tratadas en cuatro capítulos (2, 4, 7 y 9).

Es frecuente pensar (yo lo hice por demasiado tiempo) que la geometría analítica representa un rompimiento con la geometría griega clásica, presentarla como algo que la supera; o bien, creer que las geometrías proyectiva e hiperbólica rompen con la euclidiana y que hay que tomar partido por alguna. No. Son todas ellas parte de lo mismo: La Geometría. Y para hacer énfasis en ello, una preocupación que entreteje al capítulo 1 es reconstruir la axiomática euclidiana a partir de la de los números reales que es la de la geometría analítica, y aclarar formalmente su relación. Parece superfluo, pero permite ejercitar las operaciones vectoriales y la idea de "demostración" en casos sencillos e intuitivamente claros, va construyendo la llamada "madurez matemática" y en los ejercicios, tanto teóricos como númericos, debe dar al estudiante seguridad y fe en su intuición geométrica; el riesgo de parecer trivial quizá se conjure con la idea profunda de que el lenguaje y las técnicas vectoriales que se van estableciendo en el plano funcionarán también para las siguientes dimensiones. Más adelante (capítulos 6 y 8, respectivamente), como se construyen los planos proyectivo e hiperbólico, ya no hay necesidad de axiomatizar; vamos sobre terreno firme y los axiomas quedan como observaciones o teoremas con notas históricas.

Si insisto en que La Geometría es una y única, ¿por qué pluralizarla en el título del libro? Por dos razones. Así como en español tenemos la afortunada dualidad "la matemática" y "las matemáticas" con significados sutilmente diferentes, siento que lo mismo se aplica a "la geometría". "Las geometrías" tendría entonces una acepción más modesta, con una implícita diversidad de enfoques y motivaciones posibles; pretendo, quizá pecando de ambicioso e iluso, que aquí se den los fundamentos modernos para adentrarse en ellas y en especial en las que están vivas en este cambio de siglo. Pero además, el plural tiene la ventaja de que remite inevitablemente a las geometrías no euclidianas, cuyos rudimentos básicos, creo yo, deberían ser parte de la formación temprana en matemáticas, e integrarse a la cultura mínima común sobre ellas. Sin embargo, por "las geometrías" no quiero entender sólo a las tres clásicas sino algo más cercano a la enumeración del principio. Al final de varios capítulos se incluyen secciones marcadas con un asterisco que indica que no es esencial para el desarrollo ulterior del libro; son pequeñas introducciones o disertaciones hacia áreas o temas aledaños, hacia "otras geometrías". Están ahí para incitar la curiosidad de los estudiantes o para dar más material a los maestros que las sientan afines. Por ejemplo, al final del capítulo 1, después de haber insistido en la maravillosa idea de Descartes de asociarle numeritos a los puntos que forman un plano y de haber hecho escencialmente lo mismo con las rectas mediante los coeficientes de sus ecuaciones, está a la mano preguntarse ¿geométricamente, qué forman las rectas del plano? Surge la banda de Moebius, una bonita motivación para entrar a la topología: gloria indiscutible de La Geometría del siglo XX.

En geometría, y sobre todo en el nivel elemental pero con una persistencia sorprendente hasta niveles más abstractos, los dibujos son parte fundamental del discurso matemático, del razonamiento, del proceso de entender y descubrir; quizá lo que tenga más que ver con eso de la "sensibilidad geométrica" que tanto he cacareado; son básicos para "visualizar" —yo no puedo prescindir de ellos en el salón de clase—. Pero sabemos bien que no son más que muletas para acceder a las verdaderas matemáticas. Una figura al margen o en el pizarrón es —en el mejor de los casos y de no ser un bosquejo esquemático de algo mucho más complicado— una instancia muy particular y aproximada de un razonamiento, de una definición o, digamos, de un cierto teorema. Las computadoras permiten liberar un poco esta particularización o congelamiento de los dibujos. Podemos tener *figuras animadas* que den la idea de un proceso continuo o que, al menos, hagan variar las instancias particulares donde se cumple el teorema. Pero también podemos tener *figuras interactivas* donde el "usuario" mueve los parámetros u objetos variables a los que alude la figura al mismo tiempo que ve en pantalla los efectos de sus actos, y entonces (en principio) puede pasar por todas las instancias a las que se refiere el teorema. Ambas muletas se acercan un poco más al teorema en sí; al menos amplían los ejemplos donde se cumple y ciertamente proveen una nueva intuición que debe ser bienvenida y explotada. Adjuntamos un disco compacto con una selección de figuras del libro a las que se dotó de algún don dinámico. Con una computadora se puede jugar con ellas —me sorprendió, en algunas, lo lejos que mi intuición andaba de la realidad— y quizá coadyuven a generar nuevas maneras de relacionarse con la geometría y las matemáticas. Fueron creadas con el programa Cinderella© y son, en su gran mayoría, construcciones clásicas con regla y compás; sus códigos, programas o algoritmos también vienen en el CD y pueden entonces servir como ejemplos didácticos de este recién resucitado arte que, como parte fundamental de la geometría, nació con los griegos.

Es un hecho que el enfoque (históricamente) original con el que se resuelven los problemas no es siempre el más directo, conciso, claro o elegante. Lo mismo sucede con las grandes teorías; su enseñanza siguiendo estrictamente su línea de desarrollo histórico no es necesariamente la más profunda o eficiente. Estoy convencido de que la cultura geométrica general, y muy en especial la de los científicos y matemáticos, debe actualizarse con urgencia para tener un rezago de por lo más un siglo, no de cuatro, y esto requiere buscar caminos e itinerarios alternativos que lleven de manera más simple y expedita a la geometría que se cocina hoy día. Este libro es fruto de mi esfuerzo para contribuir a ello.

Prólogo para el maestro

Aunque este libro esté pensado para un curso de un año, creo que en dos semestres es casi imposible cubrir todo su material. Yo nunca lo he logrado. Basicamente por las "secciones asterisco" de las que hablé antes, esos divertimentos laterales y aledaños sobre los cuales trabajo con distinta (o nula) profundidad dependiendo de los tiempos del curso, el grupo o mis intereses del momento. Sin embargo, siento que es importante que estén ahí. Si el estudiante decide brincarse olímpicamente alguno de ellos porque no es material del examen que le apremia, aprenderá que los libros de matemáticas pueden leerse a saltos, a veces grandes para adelante y cuando es necesario para atrás. Y si los lee por su cuenta, que sí creo posible que se haga con todas, quizá estimule su curiosidad o creatividad; al menos ampliará su cultura. En fin, más vale que sobre y no que falte, que se abran panoramas y no dar la impresión de algo ya hecho, estático y sin puertas o futuros posibles.

Sin embargo, sí creo que el material básico puede cubrirse en un año. Un semestre para el plano euclidiano, sus transformaciones y, con éstas últimas como herramienta, la clasificación de las cónicas; y el segundo para la esfera y el espacio, los planos proyectivo e hiperbólico y algo más de cónicas como apoyo, herramienta (en la construcción del plano hiperbólico) y motivación. Por supuesto, los énfasis o la profundidad con que se vean algunas partes no esenciales depende de los gustos y necesidades de cada maestro.

Me imagino también que los capítulos 3 (a "salto de mata"), 6 (con referencias a parte del 5) y 8 (con las pocas definiciónes que usa del 7) pueden ser el material de un curso semestral intermedio de geometrías no euclidianas para estudiantes que sepan geometría analítica clásica, algo de álgebra lineal y algo de teoría de grupos; el resto del libro será repaso o "asterisco".

De álgebra líneal se da necesariamente una introducción (capítulos 1 y principio del 5), pero es lo mínimo para hacer geometría en dimensiones 2 y 3; servirá de motivación y experiencia para un curso general. Los grupos en abstracto apenas se mencionan tangencialmente, de hecho ni siquiera se definen formalmente, pues el interés está únicamente en los grupos geométricos de transformaciones. Darán al estudiante una multitud de ejemplos e intuición para enfrentarse, en su momento, al álgebra moderna, en especial las secciones asterisco sobre grupos geométricos finitos y discretos. Puede entonces servir como texto de apoyo para materias más algebráicas.

La naturalidad en el orden en que se presentan las ideas matemáticas es, muchas veces, subjetiva. Cada maestro o cada autor siente esto a su manera; "las matemáticas no son simplemente conexas". Por ejemplo, para alguien que sabe, parece una locura hablar de transformaciones ortogonales antes de las lineales como aquí se hace; la razón es que las isometrías están más cerca de la intuición de alguien que no sabe de ninguna de ellas y al seguir el razonamiento desde esta óptica se obtiene, naturalmente creo yo, la noción de ortogonalidad y, con ésta, la linealidad como resultado: ello se convierte en motivación para definirlas. Por supuesto, el maestro que siga el orden clásico (más natural si de antemano se sabe de linealidad), o el de su gusto, y use a la vez este texto, enriquecerá la visión del estudiante.

En algunos otros lados del libro pasa lo mismo, hay alteraciones al orden que, en décadas pasadas, se nos enseñó como natural. No hay espacio para dar mis razones particulares. Pero en general, puedo decir que se deben a tres razones básicas: dar al texto consistencia interna y hacerlo, en la medida de lo posible, autocontenido; tratar de seguir líneas de razonamiento con motivaciones generales precisas y buscar dar ejemplos relevantes después de las definiciones para familiarizarse con ellas (por ejemplo, las coordenadas baricéntricas se introducen tan temprano para presentar el Teorema del Baricentro y así jugar con combinaciones lineales.)

Prólogo para el estudiante

Aprender matemáticas es un acto de soledad. Escuchar a un maestro o leer un libro ayudan y quizá explicar a alguien, o discutir, sirva más; pero a fin de cuentas requiere un proceso íntimo de creación y recreación. Por eso, leer matemáticas tiene sus propios ritmos o mañas que cada quien desarrolla. Una buena es la del lápiz y papel a la mano, dándoles su tiempo; otra, la de leer tramos rápido y por ensima para luego regresar, si acaso, a los detalles. Algo importante en un libro de texto como éste es entablar, al menos, breves escaramuzas mentales con los ejercicios. Hay que notar que algunos de ellos tienen un asterisco, y eso es porque son más dificiles que los otros; vale la pena preguntarse por qué. Y en general, ésa es la actitud correcta ante un texto de matemáticas: siempre hay que cuestoinarlo tratando de mejorarlo o corregirlo; no necesariamente su ritmo o hilo de razonamiento es el natural de uno, y encontrar esa "voz" es aprender. Un texto matemático, por decirlo así, nos presta su voz por un rato, pero aprender, o entender, es poder referirnos a las matemáticas a las que alude con nuestra propia voz, ser capaces de verlas con nuestros propios ojos.

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a los estudiantes que llevaron conmigo el curso "Geometría Analítica" en alguna de sus tantas versiones preliminares. No era fácil, pues no sabía bien cómo llegar a donde iba: estaba aprendiendo junto con ellos y ensayando; a veces nos confundíamos todos pero siempre nos divertimos. Sus preguntas, comentarios o bien las simples caras de extravio fueron centrando el rumbo. Siento que les debía este libro.

En la misma medida, o más, agradezco el apoyo creativo de los ayudantes de esos cursos; no los enlisto por el temor a saltarme alguno. Tampoco era nada fácil pues había que responsabilizarse y el material era volátil. Su trabajo, más en corto conmigo, fué fundamental para asentar las ideas y la concepción. Muy en especial, debo agradecer a Ricardo Strausz que escribió la primera versión de los primeros capítulos y, sólo así, me obligo a hacer lo propio.

Ya con el manuscrito, transformarlo en libro fue trabajo de equipo. Agradezco a Gabriela Alfaro y Claudia ¿¿??, su ayuda con los archivos, índices y correcciones. A Abdiel Macias su meticulosa corrección de estilo. A Emiliano Mora por su trabajo en las figuras interactivas. A Guadalupe ¿¿?? y ¿¿?? por sus figuras; dan tal personalidad visual al libro que, desde ya, hacen que me trascienda. Por último, agradezco profundamente a mis editores María del Carmen Farías y Axel Retif por su intenso apoyo al proyecto y por la excelencia amorosa de su trabajo.

Contenido