Tarea 2 — Álgebra Moderna I

1. Si $H, K \trianglelefteq G$, $H \cap K = \{e\}$ y $\langle H, K \rangle = G$, muestra que K es isomorfo a G/H.
2. Sea $H \trianglelefteq G$ tal que $[G : H] = p$ (p primo). Muestra que si $K \leq G$ no está contenido en H entonces $G = HK$ y $[K : K \cap H] = p$.
3. Si $H, K \trianglelefteq G$ con $G = HK$, muestra que $G/(H \cap K)$ es isomorfo a $(G/H) \times (G/K)$.
4. Si $\mathcal{S}:\ 1 \longrightarrow G' \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} G'' \longrightarrow 1$ es una sucesión de morfismos de grupos, decimos que $\mathcal{S}$ *es exacta* si f es inyectiva, g es suprayectiva y $\ker(g) = \operatorname{im}(f)$. Muestra lo siguiente:
   (a) $\mathcal{S}$ es exacta si y sólo si existe $H \trianglelefteq G$ y un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & G' \arrow[r, "f"] & G \arrow[r, "g"] & G'' \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & H \arrow[r, hook] \arrow[u, "\varphi"] & G \arrow[r, "\pi"'] \arrow[u, "\mathrm{id}"] & G/H \arrow[r] \arrow[u, "\psi"] & 1
\end{tikzcd}$$

   donde φ y ψ son isomorfismos.
   (b) Si $\mathcal{S}$ es una sucesión exacta con G' y G'' grupos finitamente generados entonces G es finitamente generado.
5. Si G es un grupo y

$$\mathcal{C}:\ G_n \leq G_{n-1} \leq \cdots \leq G_1 \leq G_0 = G$$

   es una cadena de subgrupos de G, decimos que $\mathcal{C}$ *es una cadena normal de* G, si $G_{i+1} \trianglelefteq G_i$ para toda i. Si $\mathcal{C}$ es una cadena normal de G, decimos que $\mathcal{C}$ *es abeliana* (resp. *cíclica*) si G_i/G_{i+1} es un grupo abeliano (resp. cíclico) para toda i.
   (a) Muestra que si $G \xrightarrow{f} G'$ es un morfismo de grupos y $\mathcal{C}$ es una cadena abeliana (resp. cíclica) de G', entonces $f^{-1}(\mathcal{C})$ es una cadena abeliana (resp. cíclica) de G.
   (b) Muestra que si G es un grupo y $H \trianglelefteq G$, entonces G *es soluble* (es decir, G tiene una cadena abeliana con $G_n = \{e\}$) si y sólo si H y G/H son solubles.
6. Si G es un grupo abeliano finito y p es número primo que divide al orden de G, entonces G tiene un elemento de orden p.