Tarea-Examen 3 Álgebra Moderna I

1. Sea G un grupo y $H \leq G$. Muestra que H es normal en G si y sólo si H es unión de clases de conjugación de G.
2. Sea G un grupo y X un G-conjunto. Si $x, y \in X$ están en la misma orbita, da un isomorfismo entre el estabilizador de x y el estabilizador de y.
3. Muestra que si G es un grupo finito y $H \leq G$ con $[G : H] = p$, donde p es el primo más pequeño que divide al orden de G, entonces H es normal en G.
4. Muestra que si G es un grupo finito de orden pn, donde p es número primo mayor o igual que n, entonces G tiene un subgrupo normal de orden p.
5. Si G es grupo no abeliano de orden p^3, muestra lo siguiente:
   (a) $\mathrm{Z}(G)$ es cíclico de orden p.
   (b) $G/\mathrm{Z}(G)$ es isomorfo a $\mathrm{Z}(G) \times \mathrm{Z}(G)$.
   (c) Si $g^p \equiv 1$ para todo $g \in G$, entonces G tiene un subgrupo de orden p^2.

SUERTE!!!