

# Iluminando Polígonos con Reflectores

Jorge Urrutia

Departamento de Ciencias de la Computación

Universidad de Ottawa

Ottawa, Ontario, Canadá

## Resumen

En este artículo, presentamos un resumen de varios resultados recientes sobre problemas de iluminación de polígonos simples y ortogonales usando reflectores. Probaremos que todo polígono simple  $P$  con  $n$  vértices puede iluminarse con un conjunto de lámparas cada una en un vértice de  $P$  de tal manera que la suma de los ángulos de  $P$  en dichos vértices es a lo más  $(n-2)\pi/3$ . Probaremos que para cualquier  $\varepsilon > 0$  existen polígonos que no se pueden iluminar con reflectores de tamaño menor que  $\pi - \varepsilon$ . Para polígonos ortogonales con  $n$  vértices y  $h$  agujeros probaremos que  $\lfloor (3n+4(h-1))/8 \rfloor$  reflectores ortogonales colocadas en vértices de  $P$  son siempre suficientes y a veces necesarios para iluminar  $P$ . Cuando los reflectores pueden colocarse sobre las aristas de  $P$ , las cotas se reducen a  $\lfloor (n+2h)/4 \rfloor$ . Todas nuestras cotas son justas. Finalmente probamos que para toda  $\varepsilon > 0$  existen polígonos ortogonales que no pueden iluminarse con reflectores de tamaño menor o igual a  $(\pi/2) - \varepsilon$ .

## 1. Introducción

Los problemas de iluminación de objetos en el plano, han sido estudiados en las matemáticas desde hace muchos años. Por ejemplo, es bien sabido que para iluminar la frontera de un convexo en el plano, tres lámparas son suficientes y algunas veces necesarias. Los problemas de iluminación utilizando lámparas que emiten luz dentro de una zona angular, *reflectores*, han sido estudiados en varios artículos recientes [BGLOSU, CRCU, ECU, O'RX, ECO'RXU, SS]. El primer problema estudiado sobre iluminación de reflectores, es el conocido como el problema de la iluminación de estrados [BGLOSU]. Supongamos que estamos en un teatro con sus numerosos reflectores, y su estrado. El problema de iluminación de estrados, consiste en decidir si los reflectores del teatro pueden ser rotados sobre sus bases de tal manera que todo el estrado quede iluminado.

En terminos matemáticos el problema se fórmula de la siguiente manera: Supongamos que tenemos un segmento de línea  $L$  y un conjunto de reflectores  $r_1, \dots, r_n$  representados por fuentes de luz que iluminan sólo en una zona angular de tamaño  $\alpha_i, i = 1, \dots, n$ . Más aún, supongamos que los vértices de dichos reflectores están fijos, y que éstos se pueden rotar sobre sus vértices. ¿Será posible rotar  $r_1, \dots, r_n$  de tal manera que el segmento de línea  $L$  quede iluminado? Figura 1. Hasta el momento, no se conoce ningún algoritmo eficiente para resolver este problema.

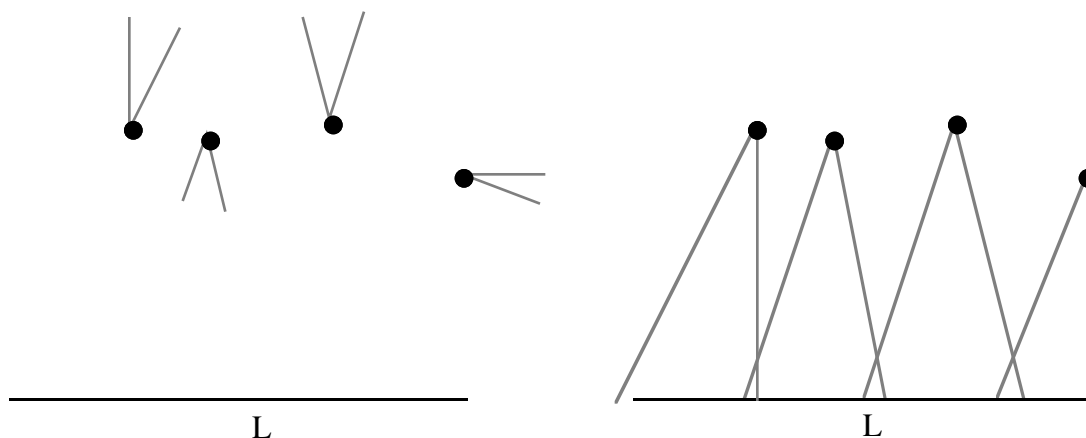


Figura 1

Los problemas de iluminación óptima de estrados con reflectores han sido estudiados en [CRCU], iluminación del plano en [BGLOSU] y [SS], y de iluminación de polígonos en [O'RX, ECO'RXU]. En este artículo, hacemos un resumen de resultados sobre iluminación de polígonos usando reflectores. Varios resultados nuevos obtenidos con diferentes coautores son presentados aquí, así como los resultados más recientes en el área.

Estudiaremos problemas de iluminación de polígonos simples y ortogonales (i.e. con aristas paralelas al eje  $x$  o al eje  $y$  del plano) utilizando reflectores de tamaños menores que  $\pi$  en el caso de polígonos simples, y de tamaño  $\frac{\pi}{2}$  para el caso de polígonos ortogonales. Para simplificar nuestra exposición, en adelante si un reflector  $r_i$  ilumina una zona angular de tamaño  $\alpha$  llamaremos a  $r_i$  un  $\alpha$ -reflector,  $\alpha$  será llamado también el tamaño de  $r_i$ . Si un reflector debe ser colocado en un vértice de  $P$ , se le llamará un v.reflector. En el caso que  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $r_i$  se llamará un reflector ortogonal.

En la segunda sección de este artículo, probaremos que todo polígono simple  $P$  puede iluminarse colocando lámparas en un subconjunto  $S$  de los vértices de  $P$  de tal manera que la suma de los ángulos internos en los vértices de  $S$  es a lo más  $\frac{(n-2)\pi}{3}$ . Probaremos que esta cota es justa. Probaremos también que para toda  $\varepsilon > 0$  existen polígonos que no pueden iluminarse colocando un reflector de tamaño a lo más  $\pi - \varepsilon$  en cada vértice de  $P$ .

Probaremos que  $\lfloor \frac{3n+4(h-1)}{8} \rfloor$  v.reflectores ortogonales son siempre suficientes y a veces necesarios para iluminar cualquier polígono ortogonal con  $n$  vértices y  $h$  agujeros; cuando permitimos colocar los reflectores sobre las aristas, estas cotas se reducen a  $\lfloor \frac{n+2h}{4} \rfloor$ ,  $h = 0, 1, \dots$ . Cabe mencionar que para  $h = 0$ , existen resultados similares para

la iluminación de polígonos ortogonales. Por ejemplo, en [KKK] se prueba que  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  lámparas colocadas en vértices bastan para iluminar cualquier polígono ortogonal con  $n$  vértices. Nótese sin embargo que desde el punto de vista de peso angular, estos conjuntos de lámparas pueden considerarse ineficientes. En el peor de los casos, estos conjuntos de lámparas tienen un peso de  $\frac{n\pi}{6}$ , mientras que en nuestro caso nuestros conjuntos pesan a lo más  $\frac{n\pi}{12}$ . Más importante quizás, es el hecho de que nuestras pruebas son mucho más simples y fáciles de implementar. Para el caso de reflectores ortogonales, existe un resultado de O'Rourke [O'R] en el que se prueba que todo polígono ortogonal con  $n$  vértices puede partirse en  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  L-polígonos, y como cada uno de ellos puede iluminarse con un reflector ortogonal, todo polígono ortogonal puede iluminarse con  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  reflectores ortogonales. Hay que notar sin embargo, que los reflectores usados en este caso, pueden ser colocados en el interior del polígono, lo cual es poco satisfactorio. Otra diferencia fundamental en nuestros resultados comparados con los anteriores, es que las cotas para polígonos con agujeros son diferentes, lo cual señala diferencias importantes entre los dos tipos de problemas.

## 2. Iluminando Polígonos Simples

Consideremos un polígono simple con  $n$  vértices. Observemos primero que si se nos permite colocar a lo más  $n - 2$  reflectores de tamaño menor o igual a  $\frac{\pi}{3}$  sobre los vértices de  $P$ , éstos pueden ser colocados de tal manera que todo  $P$  queda iluminado. Para probar esto, basta con observar que cualquier triangulación de  $P$  contiene exactamente  $n - 2$  triángulos, y que cada triángulo tiene un ángulo de tamaño a lo más  $\frac{\pi}{3}$ .

Estéticamente hablando, esta solución no es aceptable, ya que puede suceder que en algún vértice coloquemos más de un reflector. Supongamos entonces que a cada vértice  $v_i$  de  $P$  le asociamos un peso  $\alpha_i$  igual al tamaño del ángulo interno a  $P$  generado en  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Dado un subconjunto  $S$  de los vértices de  $P$ , decimos que  $S$  ilumina  $P$  si todo punto de  $P$  es visible desde algún vértice en  $S$ . Asociemos ahora un peso a  $S$  igual a la suma de los pesos de los elementos de  $S$ .

**Teorema 1:** Todo polígono  $P$  con  $n$  vértices tiene un subconjunto  $S$  que lo ilumina de tal manera que el peso de  $S$  es a lo más  $\frac{(n-2)\pi}{3}$ . Para cada  $\varepsilon > 0$  existen polígonos tales que no tienen conjuntos de vértices que los iluminen de peso  $\frac{(n-2)\pi}{3} - \varepsilon$ .

**Prueba:** Recordemos primero que la suma de los ángulos internos de cualquier polígono con  $n$  vértices es  $(n - 2)\pi$ . Triangulemos  $P$  añadiendo  $n - 3$  diagonales internas, y tres coloreemos los vértices de  $P$  de tal manera que si dos vértices están unidos por una arista de  $P$  o por una de las  $n - 3$  diagonales que se añadieron, reciben colores diferentes. Esto induce una partición de los vértices de  $P$  en tres subconjuntos ajenos, cada uno de los cuales iluminan  $P$ . Por tanto alguno de ellos tiene peso a lo más  $\frac{(n - 2)\pi}{3}$ . Para probar que  $\frac{(n - 2)\pi}{3} - \varepsilon$  no es suficiente, consideremos el polígono de la Figura 2.

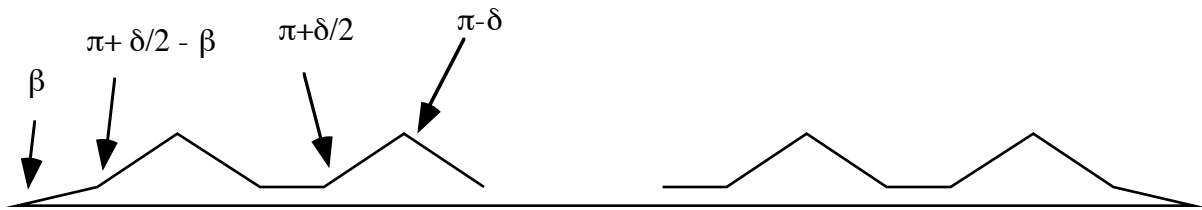


Figura 2

Dicho polígono contiene  $n = 3m + 2$  vértices,  $m$  vértices de peso  $\pi - \delta$ . Nótese que el polígono puede ser escogido de tal manera que cada vértice de peso  $\pi - \delta$  es visible sólo desde los vértices adyacentes a él, más aun,  $\delta$  puede escogerse tan pequeño como se quiera. Luego entonces para iluminar dichos puntos necesitamos escoger un vértice de peso al menos  $\pi - \delta$ , i.e. para iluminar  $P$  necesitamos un subconjunto de vértices de peso al menos  $m(\pi - \delta)$ , lo cual prueba nuestro resultado.

Otra pregunta natural que surge del poder iluminar un polígono con  $n - 2$  reflectores de tamaño  $\frac{\pi}{3}$  es la siguiente:

¿Será posible iluminar un polígono simple  $P$  colocando un reflector de tamaño a lo más  $\frac{\pi}{3}$  en cada vértice de  $P$ ? ¿Existirá algún  $\alpha < \pi$  tal que todo polígono puede iluminarse colocando en cada vértice un reflector de tamaño a lo más  $\alpha$ ? Es fácil ver que colocando un reflector de tamaño a lo más  $\pi$  en cada vértice,  $P$  puede ser iluminado. Para probar esto, triangulemos nuevamente  $P$  con  $n - 3$  diagonales. Observemos que una de estas diagonales uniendo dos vértices  $u$  y  $v$  corta  $P$  en dos partes, una de las cuales es un triángulo con vértices  $u, v, z$ . Coloquemos en  $z$  un reflector de tamaño igual al peso de  $z$  de tal manera que el triángulo  $u, v, z$  quede iluminado por este reflector. Nuestro resultado puede probarse ahora por inducción sobre el número de vértices de  $P$ .

Ahora presentamos el siguiente resultado:

**Theorema 2**[EO'RUX]: Para cualquier  $\varepsilon > 0$  existen polígonos simples que no pueden ser iluminados con reflectores de tamaño menor o igual a  $\pi - \varepsilon$  aun permitiendo un reflector por vértice.

En este trabajo, sólo probaremos que reflectores de tamaño menor o igual a  $\frac{\pi}{2}$  son suficientes. La prueba general para  $\pi - \varepsilon$  es fácil de obtener de este resultado. El lector interesado en la prueba completa puede encontrarla en [EO'RUX].

Esta prueba está tomada de [O'RX]. Consideremos el polígono  $P$  presentado en la Figura 3. Este polígono es simétrico con respecto a la vertical por el vértice  $v_m$ . Los ángulos internos a los vértices  $v_1, v_2, v_3$  son mayores que  $\frac{\pi}{2}$ . Supongamos por ahora que no nos es permitido colocar un reflector en el vértice  $v_m$  y que todos los reflectores que usamos son de tamaño a lo más  $\frac{\pi}{2}$ . Como el ángulo interno a  $P$  en  $v_3$  es mayor que  $\frac{\pi}{2}$ , para iluminar todos los puntos de  $P$  en el entorno de  $v_3$ , un reflector en  $v_3$  no es suficiente. Además, si un punto de  $P$  está lo suficientemente cerca a  $v_3$ , éste no es visible desde  $v_2$ ,  $r_1$  y  $v_1$ . Por tanto para iluminar todos los puntos en el entorno de  $v_3$  necesitamos utilizar reflectores en  $v_3$  y en  $r_2$ . Esto implica que el reflector colocado en  $r_2$  no ilumina  $v_2$ . Utilizando argumentos análogos, podemos ver ahora que para iluminar el entorno de  $v_2$  necesitamos los reflectores en  $v_2$  y  $r_1$ . Por tanto para iluminar el entorno de  $v_1$  sólo podemos utilizar el reflector en  $v_1$ . Pero como este reflector no basta por si solo para iluminar el entorno de  $v_1$ , esto nos fuerza a utilizar el reflector en  $v_m$  para completar la iluminación de dicho entorno.

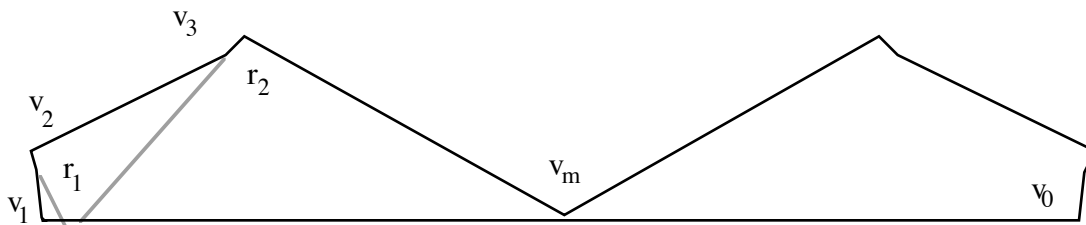


Figura 3

Pero como  $P$  es simétrico, para iluminar el entorno de  $v_0$  también necesitamos el reflector en  $v_m$ ! Como el reflector en  $v_m$  no puede iluminar simultáneamente  $v_0$  y  $v_1$  podemos concluir que no es posible iluminar  $P$  con reflectores de tamaño menor o igual a  $\frac{\pi}{2}$  en cada vértice.

No es difícil ahora ver que el ejemplo de la Figura 3 puede modificarse agregando vértices en ambos lados de  $P$  de tal manera que

- a) Cada lado contiene  $m$  vértices convexos,  $m - 1$  cóncavos
- b) Cada  $v_i$  es visible sólo desde  $r_{i-1}$  y  $r_i$ ,  $i = 1, \dots, m - 1$  y  $v_m$  es sólo visible desde  $v_{m-1}$
- c) Para  $m$  suficientemente grande los ángulos convexos en los vértices  $v_1, \dots, v_m$  son arbitrariamente cercanos a  $\pi$  [EO'RUX].

Si permitimos reflectores de tamaño  $\pi$  sobre las aristas de  $P$  se sabe que  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  reflectores bastan [BBCUZ].

### 3. Iluminando Polígonos Ortogonales con $\frac{\pi}{2}$ -v.reflectores

En esta sección probaremos que  $\lfloor \frac{3n + 4(h - 1)}{8} \rfloor$  v.reflectores ortogonales son suficientes y a veces necesarios para iluminar cualquier polígono ortogonal con  $n$  vértices y  $h$  agujeros. Trataremos por separado el caso  $h = 0$  de los casos cuando  $h \geq 1$ .

Consideremos un polígono ortogonal con  $n$  vértices. Todos los vértices de  $P$  generan ángulos interiores a  $P$  de tamaño  $\frac{\pi}{2}$  o  $\frac{3\pi}{2}$ . Es fácil probar que cualquier polígono ortogonal tiene exactamente  $\frac{n - 4}{2}$  vértices cóncavos y  $\frac{n + 4}{2}$  vértices convexos [O'R].

Una arista  $e$  de  $P$  se llamará una arista superior, si el interior del  $P$  está por debajo de  $e$ . En forma análoga, podemos definir aristas derechas, izquierdas e inferiores de  $P$ , Figura 5. Es fácil ver que el polígono  $P$  puede iluminarse con reflectores ortogonales utilizando la siguiente regla de iluminación:

#### Regla Izquierda-Superior:

- a) En el extremo superior de toda arista izquierda, coloquemos un reflector ortogonal iluminando el sector angular entre  $\frac{3\pi}{2}$  y  $2\pi$ .
- b) En el extremo izquierdo de toda arista superior, coloquemos un reflector ortogonal iluminando el sector angular entre  $\frac{3\pi}{2}$  y  $2\pi$ .

En forma análoga, podemos definir tres reglas más de iluminación, Regla Superior-Derecha, Regla Derecha-Inferior y Regla Inferior-Izquierda.

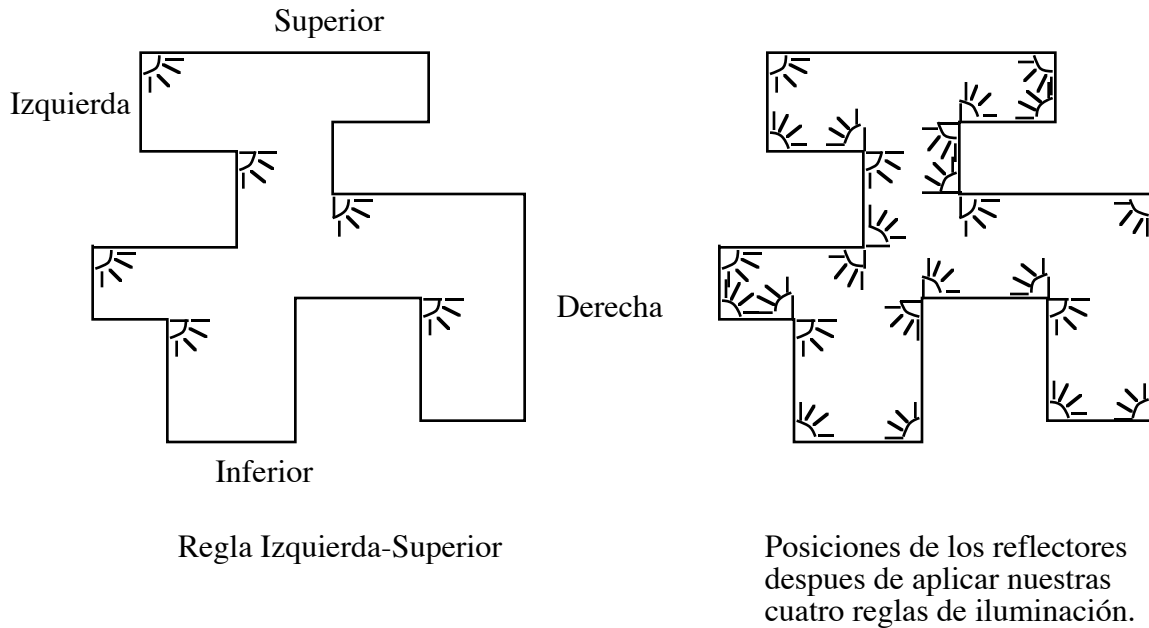


Figura 5

**Teorema 3**[ECU]: Todo polígono ortogonal puede iluminarse con a lo más  $\lfloor \frac{3n-4}{8} \rfloor$  v.reflectores ortogonales.

**Prueba:** Como acabamos de ver, el polígono  $P$  puede iluminarse de cuatro maneras diferentes colocando reflectores ortogonales en los vértices de  $P$ . Nótese que los conjuntos de reflectores utilizados en las reglas Izquierda-Superior, Superior-Derecha, Derecha-Inferior e Inferior-Izquierda son ajenos. Más aun, es facil ver que si ponemos reflectores ortogonales usando simultáneamente nuestras cuatro reglas de iluminación, en cada vertice cóncavo pondremos exactamente dos reflectores y en cada vértice convexo uno. Figura 5.

Ahora bien, como el número de vértices cóncavos es  $\frac{n-4}{2}$ , y el número de vértices convexos es  $\frac{n+4}{2}$ , el número total de reflectores utilizado por las cuatro reglas es  $\frac{3n-4}{2}$ . Esto indica que una de nuestras cuatro reglas de iluminación utiliza a lo más  $\lfloor \frac{3n-4}{8} \rfloor$ .

Para probar que existen polígonos que requieren  $\lfloor \frac{3n-4}{8} \rfloor$  reflectores ortogonales, consideremos los polígonos de la Figura 6. El primero  $P_{12}$  que llamaremos la hélice con cuatro aspas tiene 12 vértices, y requiere cuatro reflectores ortogonales. El segundo se obtiene pegando dos hélices por un aspa. Es fácil ver que el número de vértices se incrementa en 8, y el número de reflectores requeridos por tres. Repitiendo esta operación

de pegar copias extras de  $P_{12}$  se puede obtener una familia de polígonos con  $n = 12 + 8m$  vértices que requieren  $4 + 3m$  reflectores ortogonales, lo cual prueba nuestra cota inferior.

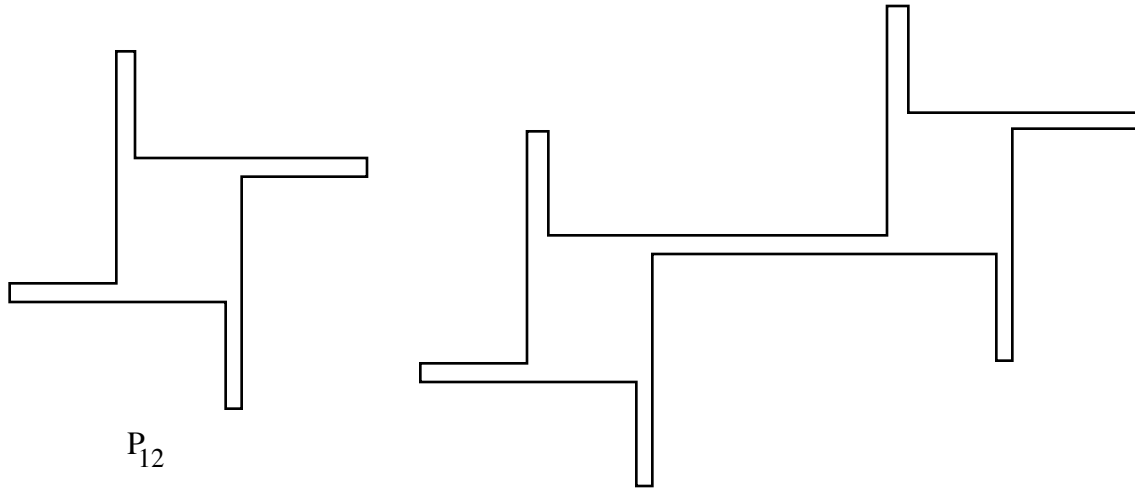


Figura 6

### 3.1 Polígonos Ortogonales con Agujeros

Consideremos un polígono  $P$  y un conjunto de polígonos  $Q_1, \dots, Q_n$  tales que  $Q_i$  está totalmente contenido en el interior de  $P, i = 1, \dots, n$ . El conjunto:

$$H = P - \bigcup_{i=1}^n Q_i$$

será llamado un polígono con agujeros. En el caso que  $P$  y  $Q_i, i = 1, \dots, n$  sean polígonos ortogonales  $H$  será llamado un polígono ortogonal con agujeros.

**Teorema 4**[AECSU]: Todo polígono ortogonal  $P$  con  $h$  agujeros y  $n$  vértices puede iluminarse con a lo más  $\lfloor \frac{3n + 4(h - 1)}{8} \rfloor$  reflectores ortogonales colocadas sobre los vértices de  $P$ .

**Prueba:** Lo primero que observamos, es que las cuatro reglas de iluminación definidas en la prueba del teorema O1 siguen siendo válidas para iluminar polígonos ortogonales con agujeros. Si un polígono ortogonal tiene  $h$  agujeros, entonces el número de vértices cóncavos y convexos cambian a:  $\frac{n + 4(h - 1)}{2}$  y  $\frac{n - 4(h - 1)}{2}$  respectivamente, por tanto el número de reflectores utilizados por las cuatro reglas de iluminación cambia a:

$$2\left(\frac{n + 4(h - 1)}{2}\right) + \left(\frac{n - 4(h - 1)}{2}\right) = \frac{3n + 4(h - 1)}{2}.$$



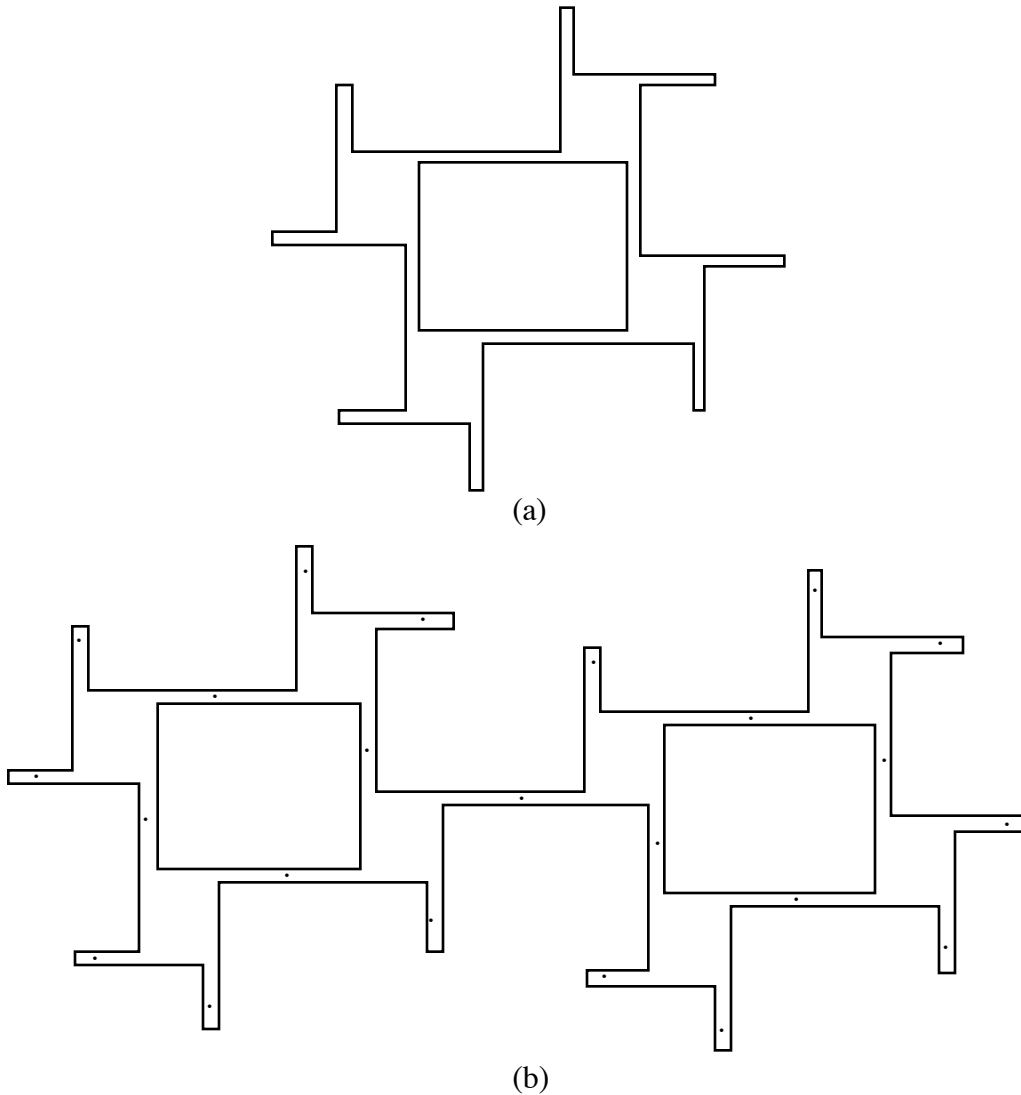


Figura 7

Dividiendo por cuatro nuestra cota superior queda probada. Para mostrar la necesidad de este número de reflectores, consideremos el polígono  $P_{32}$  de la Figura 7(a). Éste contiene 32 vértices, un agujero y requiere 12 reflectores. Evaluando nuestra fórmula  $\lfloor \frac{3n + 4(h - 1)}{8} \rfloor$  para  $n = 32$  y  $h = 1$  nos da 12. Para valores mayores de  $h$  pegamos nuevamente copias de  $P_{32}$  a lo largo de una arista vertical como en la Figura 7(b). Repitiendo este proceso  $h$  veces produce polígonos con  $32 + 28h$  vértices que requieren  $12 + 11h$  reflectores lo cual prueba nuestro resultado.

### 3.2 Polígonos Ortogonales con Reflectores Ortogonales Sobre Aristas

Si nos permitimos colocar nuestros reflectores sobre las aristas de  $P$  las cotas probadas en la sección 3.1 pueden ser mejoradas. En esta sección probaremos que todo

polígono ortogonal con  $n$  vértices y  $h$  agujeros puede ser iluminado con  $\lfloor \frac{n+2h}{4} \rfloor$  reflectores ortogonales en caso de que éstos puedan ser colocados en medio de aristas. Primero probaremos nuestro resultado para polígonos ortogonales sin agujeros, y después probaremos el caso general.

Un corte horizontal  $h$  de un polígono ortogonal, es la extensión de una arista horizontal de  $P$  desde un vertice cóncavo  $v$  de dicha arista. Un corte horizontal elimina un vértice cóncavo desde el punto de vista que dicho vértice no es vértice cóncavo de ninguno de los dos polígonos ortogonales en los que  $h$  divide a  $P$ .

Un corte horizontal  $h$  lo llamaremos corte impar si alguna de las componentes resultantes al cortar  $P$  a lo largo de  $h$  tiene un número impar de vértices cóncavos.

Sea  $P$  un polígono ortogonal sin agujeros. Una partición de  $P$  en  $m$  polígonos  $P_1, \dots, P_m$  se llamará noble si dicha partición de  $P$  se obtiene al cortar  $P$  a lo largo de

- a) Todos los cortes horizontales impares de  $P$ .
- b) Todas las horizontales que unen parejas de vértices cóncavos de  $P$  unidos por un segmento horizontal abierto contenido en el interior de  $P$

**Lema 1:** Cada polígono  $P_i$  de una partición noble de  $P$  puede ser iluminado con  $\lfloor \frac{r_i}{4} \rfloor + 1$  reflectores ortogonales donde  $r_i$  es el número de vértices convexos de  $P_i$ .

**Prueba:** Cada  $P_i$  de una partición noble de  $P$  es un polígono sin cortes horizontales impares, y por tanto consiste de dos histogramas unidos en sus bases [O'Rourke].

Un vértice cóncavo de  $P_i$  lo llamaremos aislado si el otro vértice de la arista horizontal de  $P_i$  que lo contiene es convexo. Es fácil ver que  $P_i$  contiene exactamente un vértice cóncavo aislado. Una arista horizontal  $e$  de  $P_i$  se llamará una h-arista si los dos vértices de  $e$  son cóncavos. Procedamos ahora a dividir cada subpolígono  $P_i$  de  $P$  de la siguiente manera: Extendamos todas las h-aristas de  $P_i$  en ambos extremos hasta que toquen el exterior de  $P_i$ . La H-gráfica de  $P_i$  es la gráfica de adyacencia de las regiones de la partición inducida en  $P_i$  por todas sus h-aristas orientada de la siguiente manera: Si dos regiones  $A$  y  $B$  de la partición son adyacentes, y están separadas por la extensión de una h-arista en la frontera de  $A$  orientemos la arista que las une de  $A$  hacia  $B$ . Figura 8. Es fácil ver que la H-gráfica



Es ahora fácil ver, siguiendo los mismos argumentos que en [O'Rourke, página 68] que esto prueba:

**Teorema 5**[ECU]: Todo polígono ortogonal  $P$  con  $n$  vértices puede iluminarse con a lo más  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  reflectores sobre la frontera de  $P$ . Dichos reflectores pueden ser localizados en tiempo lineal.

Como una consecuencia ahora podemos probar:

**Teorema 6**[AECSU]: Todo polígono ortogonal con  $h$  agujeros puede ser iluminado con a lo más  $\lfloor \frac{n+2h}{4} \rfloor$  reflectores ortogonales colocados sobre su frontera.

**Prueba:** Consideremos un polígono ortogonal con  $n$  vértices, y  $v$ , un vértice cóncavo de  $P$  que pertenece a un agujero de  $P$ . Cortemos  $P$  a lo largo de un segmento horizontal que une un punto en la frontera de  $P$  con  $v$  de tal manera que el interior de dicho segmento no intersecta la frontera de  $P$ . Esto crea dos nuevos vértices en  $P$ , y reduce el número de agujeros de  $P$  por uno. Sigamos cortando el polígono resultante hasta que hayamos eliminado todos los agujeros de  $P$ , ésto resulta en un polígono ortogonal  $P'$  con  $n+2h$  vértices. Por el Teorema 5 podemos iluminar  $P'$  con  $\lfloor \frac{n+2h}{4} \rfloor$  reflectores ortogonales colocados sobre las aristas verticales de  $P'$ . Nótese que como los cortes hechos a  $P$  siempre fueron horizontales, dichos reflectores están sobre la frontera de  $P$ . Es fácil ver ahora que estos reflectores iluminan  $P$  y que no hay dos de ellos sobre el mismo punto. Esto prueba que  $\lfloor \frac{n+2h}{4} \rfloor$  reflectores son siempre suficientes. Para probar que algunas veces  $\lfloor \frac{n+2h}{4} \rfloor$  son necesarios, consideremos el polígono de la Figura 11. Éste tiene  $m$  agujeros,  $10m$  vértices y necesita  $3m$  reflectores, lo cual prueba nuestro resultado.

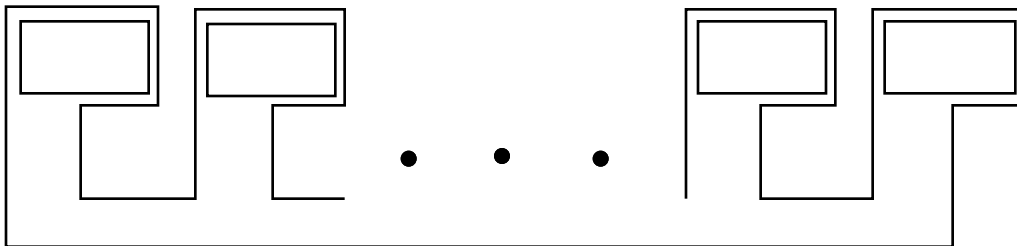


Figura 11

Para terminar este trabajo probaremos el siguiente resultado:

**Teorema 7**[AECSU]: Para toda  $\varepsilon > 0$  existe un polígono ortogonal que no se puede iluminar con reflectores de tamaño  $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$  en cada vértice.

**Prueba:** Consideremos un segmento de línea  $\lambda$  con extremos  $a$  y  $b$  y centro en el origen. Supongamos que la pendiente de  $\lambda$  es  $\delta < \varepsilon$  y que  $\theta = \frac{\pi}{2} - \delta$ . Sea  $\lambda'$  el segmento ortogonal a  $\lambda$  de la misma longitud, con centro en el origen y con extremos  $c$  y  $d$ . Construyamos una hélice ortogonal  $P$  con doce vértices tal que los cuatro vértices cóncavos de  $P$  son precisamente  $a, b, c$  y  $d$  tal como se muestra en la Figura 12. Si las hélices de  $P$  son lo suficientemente largas, el segmento de recta por  $u$  que forma un ángulo  $\theta$  con la horizontal uniendo  $u$  a  $v$  intersecta la arista  $cv$  en un punto  $p$  suficientemente lejos de  $c$ , Figura 12.

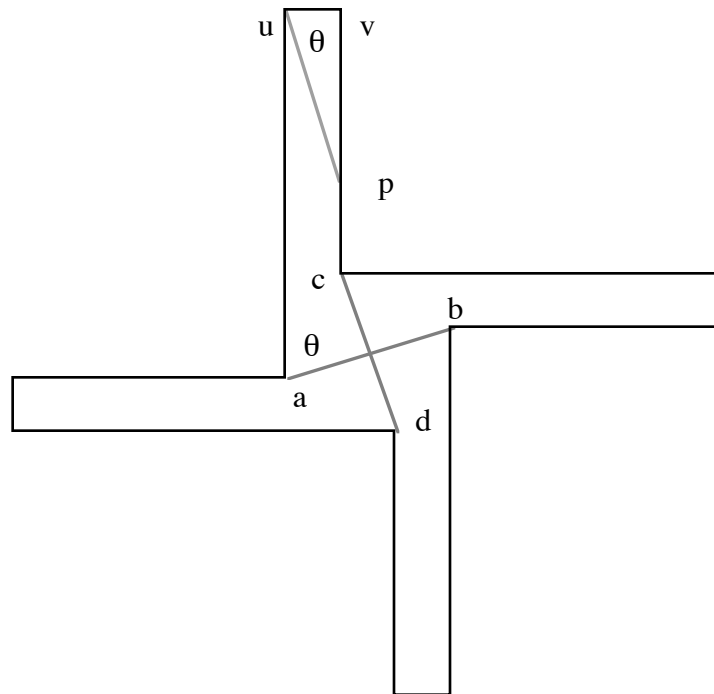


Figura 12

Ahora probaremos que es imposible iluminar  $P$  utilizando un reflector de tamaño  $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$  en cada vértice. Dos casos deben ser considerados.

- a) Los reflectores en  $u$  y  $v$  iluminan todos los puntos de  $P$  en el entorno de la arista  $u, v$ . Para iluminar cualquier punto  $q$  de  $P$  ligeramente debajo de  $p$ , debemos usar un reflector en  $c$  o el reflector en  $a$ . Nótese que en ambos casos, dichos reflectores no pueden iluminar el origen.

b) Existe algún punto en el entorno de la arista  $uv$  que no está iluminado por los reflectores en  $u$  y  $v$ . Nuevamente necesitamos usar el reflector en  $a$  o en  $b$  que como en el caso anterior no puede iluminar el origen.

Es inmediato ahora que si queremos iluminar las cuatro aspas de  $P$ , no podemos iluminar el origen. Esto prueba nuestro resultado.

## Referencias

- [AECSU] J. Abello, V. Estivill-Castro, T. Shermer and J. Urrutia, Personal communication, Enero 1995.
- [BBCUZ] P. Belleville, P. Bose, J. Czyzowicz, J. Urrutia and J. Zaks, "K-Guarding polygons on the plane" *Proc. 6th. Canadian Conference on Computational Geometry, Saskatoon, Sask. Canada*, 381-386, 1994.
- [BGLOSU] P. Bose, L. Guibas, A. Lubiw, M. Overmars, D. Souvaine and J. Urrutia, "The floodlight illumination Problem". To appear in *Int. J. on Computational Geometry*.
- [O'R] J. O'Rourke. *Art Gallery Theorems and Algorithms*. Oxford University Press, 1987.
- [CRCU] J. Czyzowicz, E. Rivera-Campo and J. Urrutia, "Optimal floodlight illumination of stages, *Proc. 5th Canadian Conference on Computational Geometry, Waterloo, Ont. Canada*, 393-398, 1993.
- [ECU] V. Estivill-Castro and J. Urrutia, "Optimal floodlight illumination of orthogonal art galleries", *Proc. 6th. Canadian Conference on Computational Geometry, Saskatoon, Sask. Canada*, 81-86, 1994.
- [KKK] J. Kahn, M. Klawe and D. Kleitman, "Traditional galleries require fewer watchmen" *SIAM J. Algebraic and Discrete Methods*, 4, 194-206, 1980.
- [O'RX] J. O'Rourke and D. Xu, "Illumination of polygons with  $90^\circ$  vertex lights", in *Snapshots in Comp. Geometry*, Univ. Saskatchewan, Aug. 1994. Technical Report TR #034, Department of Computer Science, Smith College, July 1994.

[ECO'RXU] V. Estivill-Castro, J. O'Rourke, J. Urrutia and D. Xu, "Illumination of polygons with vertex floodlights" Technical Report (TR#037) Department of Computer Science, Smith College, Northampton, MA 01063, Aug. 1994.

[SS] W. Steiger and I. Streinu, "Positive and negative results on the floodlight problem", *Proc. 6th. Canadian Conference on Computational Geometry, Saskatoon, Sask. Canada, 87-92, 1994.*