

# Algunos Problemas Abiertos

Jorge Urrutia \*

## 1. Introducción

En este artículo presentamos una colección de problemas abiertos en geometría combinatoria y discreta que han desafiado solución por varios años. Espero que al presentarlos aquí, algunos de los lectores tomen interés en ellos, y puedan contribuir a sus soluciones.

### 1.1. Puntos y círculos

En 1985, junto con V. Neuman-Lara, probamos el siguiente resultado: Dada cualquier colección  $P_n$  de  $n$  puntos en el plano hay dos elementos  $p, q \in P_n$  tales que cualquier círculo que los contenga contiene al menos  $\frac{n-2}{60}$  elementos de  $P_n$ . Este resultado fue sucesivamente mejorado, primero a  $\frac{n}{30}$  [4], después a  $\lfloor \frac{n}{27} \rfloor + 2$  [10], a  $\lceil \frac{5(n-3)}{84} \rceil$  [11], y a aproximadamente  $\frac{n}{4.7}$  [8]. Nuestra primer conjetura es la siguiente:

**Conjetura 1** *Cualquier colección  $P_n$  de  $n$  puntos contiene dos elementos tales que cualquier círculo que los contiene contiene al menos  $\frac{n}{4} \pm c$  elementos de  $P_n$*

Existe un ejemplo presentado por Hayward, Rappaport y Wenger [10] con  $4n$  puntos tal que para toda pareja de elementos de este conjunto, cualquier círculo que los contenga contiene a lo más  $n - 1$  puntos de la colección, ver la Figura 1.

Este resultado ha sido estudiado para colecciones de puntos en posición convexa, i.e. cuando los puntos son los vértices de un polígono convexo, para dimensiones mayores a dos, y para colecciones de conjuntos convexos, [1, 3, 4]. Cuando los puntos están en posición convexa, la cota exacta de  $\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$  fue probada por Hayward, Rappaport y Wenger [10].

---

\*Instituto de Matemáticas Universidad Nacional Autónoma de México, México D.F. México

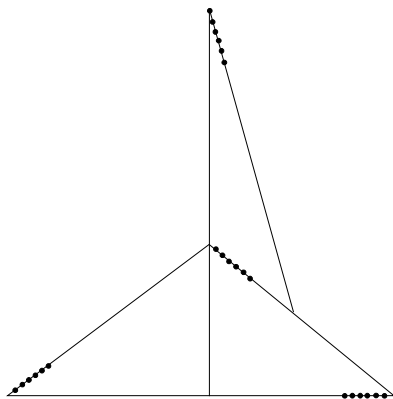


Figura 1: Una colección  $P_{4n}$  con  $4n$  puntos tal que para cualquier pareja de puntos  $p, q$  de  $P_{4n}$  existe un círculo que los contiene, y no contiene a más de  $n - 1$  puntos extra de  $P_{4n}$ .

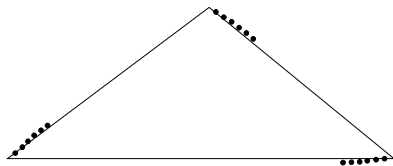


Figura 2: Una colección  $P_{3n}$  con  $3n$  puntos en posición convexa tal que para cualquier pareja de puntos de ella existe un círculo que los contiene, y no contiene a más de  $n - 1$  puntos extra de  $P_{3n}$ .

## 1.2. Particiones convexas del cierre convexo de una familia de puntos.

El siguiente problema surgió durante una sesión de trabajo en Madrid hace varios años entre M. Abellanas, G. Hernandez, y P. Ramos y yo. En esa ocasión discutíamos un problema sobre cuadrangulaciones de colecciones de puntos. Dada una colección  $P_n$  de  $n$  puntos en posición general, una familia de polígonos convexos  $\mathcal{F} = \{Q_1, \dots, Q_m\}$  con interiores ajenos es llamada una decomposición convexa del cierre convexo  $Conv(P_n)$  de  $P_n$  si:

1. La unión de los elementos de  $\mathcal{F}$  es  $Conv(P_n)$
2. Ningún elemento de  $\mathcal{F}$  contiene un punto de  $P_n$  en su interior.

Si los elementos de  $\mathcal{F}$  son cuadriláteros,  $\mathcal{F}$  se llama una cuadrilaterización de  $P_n$ . Es bien sabido que no toda colección de puntos admite una cuadrilaterización. Si embargo, hay un fenómeno que no puedo entender claramente, y es que si  $P_n$  no es cuadrilaterizable, siempre podemos encontrar subconjuntos de puntos de  $P_n$ , con más de cuatro elementos, que son los conjuntos de vértices de polígonos convexos que no contienen más puntos de  $P_n$  en su interior. De esto surge la siguiente conjetura:

**Conjetura 2** *Para toda colección  $P_n$  de  $n$  puntos en posición general, existe una descomposición convexa de  $\text{Conv}(P_n)$  con a lo más  $n + 1$  elementos. Esta cota es justa.*

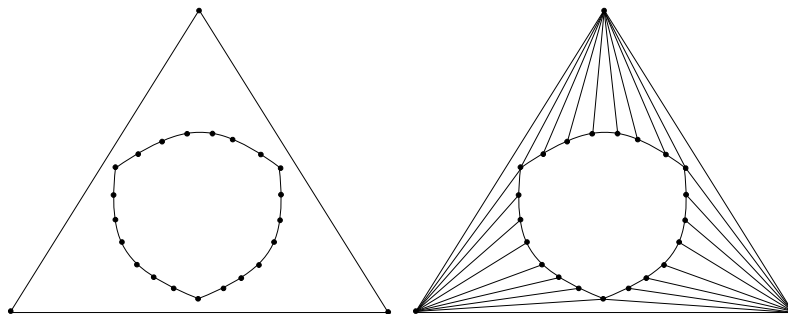


Figura 3: Una colección con  $3n$  puntos tal que cualquier partición convexa de su cierre convexo requiere  $3n + 1$  polígonos.

La mejor cota probada para este problema es de  $\lceil \frac{3n-2k}{2} \rceil$  donde  $k$  es el número de vértices del cierre convexo de  $P_n$  [18]. Una partición convexa de  $\text{Conv}(P_n)$  con tal número de elementos puede obtenerse de la siguiente forma: primero triangulemos  $\text{Conv}(P_n)$ , i.e. obtengamos una partición convexa  $\mathcal{F}$  de  $\text{Conv}(P_n)$  en la que todos elementos de  $\mathcal{F}$  sean triángulos. Después quitemos aristas de esta triangulación, una a una, teniendo cuidado de no crear polígonos no convexos contenidos en  $\text{Conv}(P_n)$ . En [18] se prueba que una vez que no podemos remover mas aristas, se obtiene una partición convexa de  $\text{Conv}(P_n)$  con a lo más  $\lceil \frac{3n-2k}{2} \rceil$  elementos.

### 1.3. Problemas sobre familias de segmentos

El siguiente problema tiene al menos 10 años.

Sea  $\mathcal{F} = \{l_1, \dots, l_n\}$  una familia de segmentos cerrados ajenos. Una trayectoria alternante de  $\mathcal{F}$  es una poligonal simple con  $2k + 1$  segmentos  $l_i$ ,  $i = 1, \dots, 2k + 1$  tales que  $l_{2i+1}$  es un elemento de  $\mathcal{F}$ . Los segmentos  $l_{2i}$  no pueden intersectar a otros elementos de  $\mathcal{F}$ ,  $i = 0, \dots, k$ .

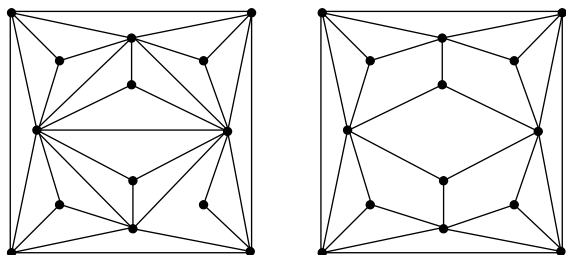


Figura 4: Comenzando con la triangulación a la izquierda solo podemos remover 5 aristas y obtener una partición con  $\lceil \frac{3(14)-2*4}{2} \rceil = 14$  elementos.

**Conjetura 3** *Toda colección de  $n$  segmentos cerrados ajenos admite una trayectoria alternante con  $O(\ln n)$  elementos.*

Una familia de segmentos donde la cota de nuestra conjetura se alcanza se muestra en la figura 5. Dicha familia tiene  $2^n - 1$  elementos colocados sobre un semicírculo tales que  $l_{2i}$  es visible solo desde  $\{l_j : j = i, 2i + 1, 4i, 4i + 1\}$ ,  $i = 1, \dots, 2^{n-1} - 1$ . Además  $l_{2i+1}$  es visible solo desde  $\{l_j : j = i, 2i + 2, 4i + 2, 4i + 3\}$ ,  $i = 0, \dots, 2^{n-1} - 1$ .

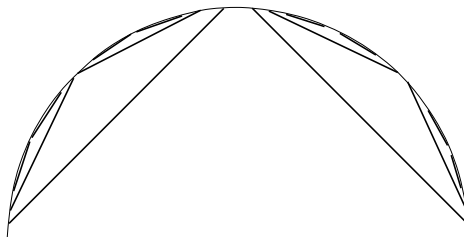


Figura 5: Cualquier trayectoria alternante de esta colección de segmentos tiene a lo más  $O(\ln n)$  elementos.

Otro problema relacionado a éste, es el de dada cualquier colección  $\mathcal{F}$  de  $n$  segmentos, encontrar un subconjunto de ésta que admite una trayectoria simple alternante. Para este caso no es difícil demostrar que toda familia con  $n$  segmentos contiene un subconjunto con al menos  $n^{\frac{1}{5}}$  elementos que admiten una trayectoria alternante. Esto puede demostrarse con técnicas similares a las presentadas en [16]. Observemos que si tenemos  $n^{\frac{1}{5}}$  elementos de  $\mathcal{F}$  cuyas proyecciones sobre el eje  $x$  son ajenas, estos admiten una trayectoria alternante. Por tanto existe una línea vertical  $l$  que intersecta al menos a  $k \geq n^{\frac{4}{5}}$  segmentos  $\mathcal{F}$ . Sea  $\mathcal{S}$  la sucesión de pendientes  $m_1, \dots, m_k$  de los segmentos de  $\mathcal{F}$  que intersectan  $l$ , en el orden en que estos intersectan  $l$ . Por tanto existe una subsucesión  $\mathcal{S}'$  de  $\mathcal{S}$  con  $n^{\frac{2}{5}}$  de elementos

cuyos elementos son crecientes o decrecientes. Supongamos sin pérdida de generalidad que los elementos de  $\mathcal{S}'$  son crecientes. Sea  $\mathcal{F}'$  el subconjunto de segmentos de  $\mathcal{F}$  correspondiente a los elementos de  $\mathcal{S}'$ . Sea  $\mathcal{Y}$  la sucesión de las segundas coordenadas de los extremos izquierdos de los elementos de  $\mathcal{F}'$ . Nuevamente existe una subsucesión con al menos  $n^{\frac{1}{5}}$  elementos de esta sucesión cuyos elementos son crecientes o decrecientes. Es fácil ver que estos elementos definen un subconjunto de  $\mathcal{F}$  que admite una trayectoria alternante. Esta cota sin embargo está lejos de ser la óptima. Creo que el valor correcto para nuestro problema es de  $O(n^{\frac{1}{2}})$ . Un problema abierto es el de determinar una buena cota para este problema. Existen colecciones con  $n^2$  segmentos tales que cualquier trayectoria alternante tiene a lo más  $2n$  segmentos de nuestra colección.

En la figura 6 mostramos la construcción de dicha familia de segmentos para  $n = 5$ . Esta construcción puede generalizarse fácilmente para cualquier valor de  $n \geq 3$ .

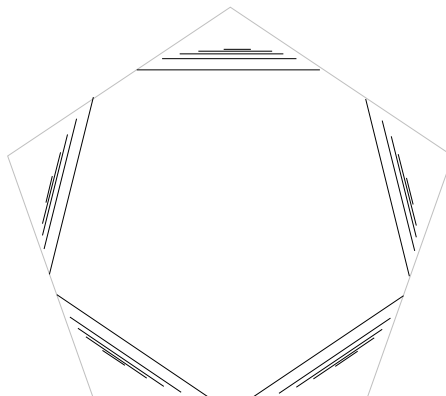


Figura 6: Una colección de  $5^2 = 25$  segmentos tal que cualquier subconjunto de ella que admite una trayectoria alternante tiene a lo más  $2 \times 5 = 10$  elementos.

## 1.4. Separabilidad

Dados dos conjuntos convexos ajenos, decimos que una línea  $l$  los separa si los convexos están contenidos uno en cada uno de los semiplanos definidos por  $l$ . H. Tverberg [22] inició el estudio del siguiente problema: Sea  $K_d(r, s) = k$  el mínimo entero  $k$  tal que dados cualesquiera  $k$  conjuntos convexos  $C_1, \dots, C_k$  con interiores ajenos, existe un semiplano cerrado que contiene al menos  $r$  de los convexos, y el complemento contiene al menos  $s$ . Tverberg probó que  $K_2(r, 1)$  siempre existe. Ejemplos encontrados por K. Villanger muestran ¡que  $K_2(2, 2)$  no existe! Ver la figura 7.

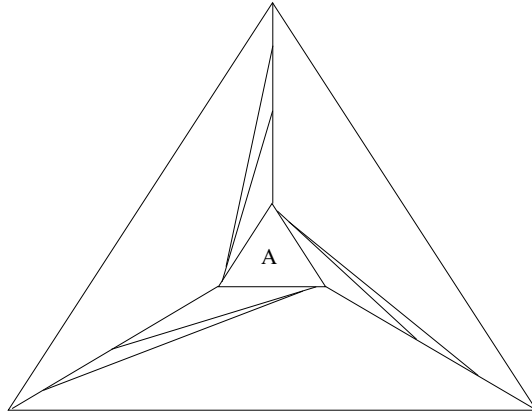


Figura 7: Una colección de 9 convexos con interiores ajenos tales que no podemos separarlos de dos. Los convexos son los polígonos convexos contenidos en el triángulo mostrado menos el que está etiquetado con A.

Se sabe que  $K_2(r, 1) \leq 12(r - 1)$ , ver [12, 6]. Para segmentos de rectas, existen colecciones  $\mathcal{F}$  con  $3m$  elementos tales que ningún segmento de  $\mathcal{F}$  puede separarse de más de  $m + 1$  elementos de  $\mathcal{F}$  [6, 7].

**Conjetura 4** *Dada cualquier familia  $\mathcal{F}$  de  $n$  convexos ajenos y cerrados existe uno que puede separarse con una sola línea de al menos  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor \pm c$  elementos de  $\mathcal{F}$ .*

Se sabe [2] que dada cualquier familia  $\mathcal{C}$  de discos congruentes con  $O(m^2 \ln m)$  elementos siempre existe una dirección  $\alpha$  tal que cualquier línea con dirección  $\alpha$  interseca a lo más a  $m$  discos de  $\mathcal{C}$ . Por tanto existe una línea que separa a  $\frac{(m^2 \ln m) - m}{2}$  elementos de  $\frac{(m^2 \ln m) - m}{2}$  de  $\mathcal{C}$ .

Para familias de círculos ajenos, so probó [5] que siempre existe una línea que separa un círculo de al menos  $\frac{n-c}{2}$  círculos.

## 1.5. Iluminación

Una de las áreas en las que mas he trabajado, es en problemas de iluminación. El siguiente es uno de los problemas que más me interesan que sigue abierto. Otros ya han sido resueltos, como el de la iluminación de estrados, o el de probar que todo polígono puede iluminarse con a lo más  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$   $\pi$ -reflectores. El primero de ellos es *NP-completo* [14], y el segundo es cierto [21].

**Conjetura 5** *Todo polígono simple con  $n$  vértices puede iluminarse con  $\lceil \frac{3n}{5} \rceil - 1$   $\pi$ -reflectores cuyos ápices están colocados sobre algunos vértices del polígono. En cada vértice colocamos a lo más un reflector.*

Un ejemplo en el que se necesitan  $\lceil \frac{3n}{5} \rceil - 1$   $\pi$ -reflectores fue obtenido por F. Santos, ver figura 8.

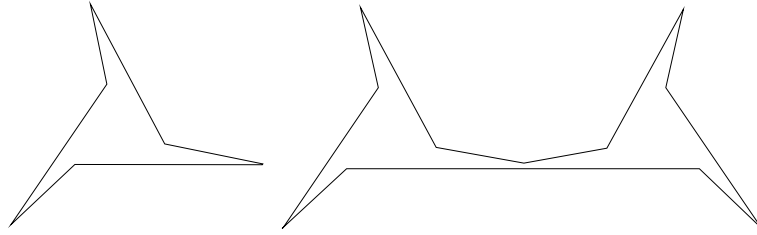


Figura 8: Un polígono con  $5n + 1$  vértices para el cual se necesitan  $3n$   $\pi$ -reflectores colocados sobre vértices del polígono puede obtenerse ‘pegando’  $n$  copias de la estrella mostrada en esta figura. El proceso es ilustrado para la unión de dos de estas estrellas.

Cerramos esta sección con dos conjeturas abiertas sobre iluminación de polígonos. La primera es de T. Shermer:

**Conjetura 6** *Todo polígono con  $n$  vértices y  $h$  agujeros puede iluminarse con  $\lfloor \frac{n+h}{3} \rfloor$  guardias colocados sobre vértices del polígono.*

La segunda conjetura se debe a G. Toussaint, y data de 1981:

**Conjetura 7** *Existe una  $n_0$  tal que todo polígono  $\mathcal{P}$  con  $n \geq n_0$  vértices puede iluminarse con  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  guardias arista. Esto es, todo polígono  $\mathcal{P}$  con  $n \geq n_0$  vértices tiene un subconjunto de  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  aristas tal que todo punto de  $\mathcal{P}$  es visible desde alguna de estas aristas.*

Para el lector interesado en este tipo de problemas, se recomiendan dos artículos que dan una panorámica general sobre iluminación [20, 23] y un libro de O’Rourke [19] que contienen una excelente exposición de los resultados sobre iluminación hasta 1987.

## 1.6. Triangulaciones

Para terminar, presentaremos dos problemas sobre triangulaciones de colecciones de puntos en el plano, y de gráficas etiquetadas planas maximales i.e. triangulaciones combinatorias con  $n$  vértices y  $3n - 6$  aristas.

Principiaremos con el problema sobre gráficas planas maximales. Sea  $G$  una gráfica plana con  $3n - 6$  aristas cuyos vértices están etiquetados con los enteros  $1, \dots, n$ . Toda inmersión de  $G$  en el plano induce una partición de éste en regiones conexas llamadas las caras de  $G$ , tal que todas las caras de  $G$  incluyendo la externa, están acotadas por tres aristas. Dichas gráficas son llamadas comunmente *triangulaciones del plano*. Además, cada arista de  $G$  pertenece a la frontera de dos de estas caras. Dada una arista  $i - j$  de  $G$ , sean  $k$  y  $l$  las etiquetas de los vértices de  $G$  tales que las caras que contienen a  $i - j$  contienen en sus fronteras a los vértices  $\{i, j, k\}$ , y  $\{i, j, l\}$  respectivamente. Observemos que  $k$  y  $l$  no son necesariamente distintos. En caso de serlo decimos que  $i - j$  es una arista girable de  $G$ , ya que otra triangulación del plano puede obtenerse reemplazando la arista  $i - j$  por la arista  $k - l$ .

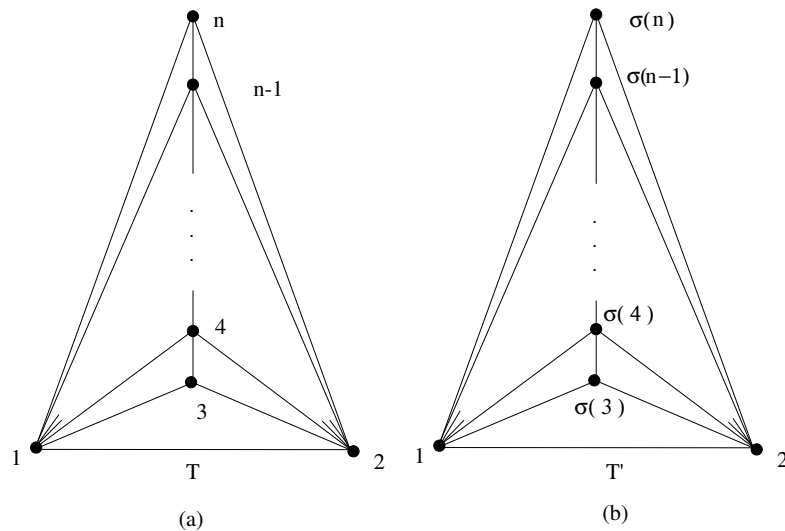


Figura 9: Cuantos giros se requieren para transformar  $T$  en  $T'$ ?

Un viejo resultado de Wagner [24], establece que dadas cualesquiera dos triangulaciones del plano *sin etiquetar* con  $n$  vértices, siempre podemos transformar la una en la otra mediante una sucesión de giros de aristas. El número de giros requeridos es lineal [15]. Recalcamos aquí, que este resultado es válido para triangulaciones sin etiquetas. Para triangulaciones con etiquetas, se sabe que con a lo más  $O(n \ln n)$  giros podemos transformar cualquier *triangulación etiquetada* en cualquier otra [9].

**Problema: 1** *Determinar el mínimo número de giros requeridos para transformar cualquier*



triangulación etiquetada con  $n$  vértices en cualquier otra.

Conjeturamos que  $O(n \ln n)$  giros son en algunos casos requeridos. El problema se reduce al siguiente: Sea  $T$  la triangulación con  $n$  vértices etiquetados mostrada en la figura 9(a), y sea  $\pi = \{\sigma(3), \dots, \sigma(n)\}$  cualquier permutación de  $\{3, \dots, n\}$ , sea  $T_\pi$  la triangulación en la figura 9(b). Probar que en algunos casos, dependiendo de  $\pi$  se requieren  $O(n \ln n)$  giros para transformar  $T$  en  $T'$ .

Nuestro último problema es sobre triangulaciones de puntos. Sobre este problema no se ha trabajado mucho tiempo. Sea  $P_n$  una colección de puntos en el plano, y  $\mathcal{T}$  una triangulación de  $P_n$ , como se definió en la sección 1.2. Una arista  $e$  de una triangulación  $T$  de  $P_n$  es girable si está contenida en la frontera de dos triángulos de  $T$  tales que su unión es un cuadrilátero convexo  $C$ . Por girar  $e$  entendemos el reemplazar  $e$  por la segunda diagonal de  $C$ . Existen triangulaciones de conjuntos de  $n$  puntos tales que para ir de una a otra se requiere un número cuadrático de giros [13], ver figura 10.

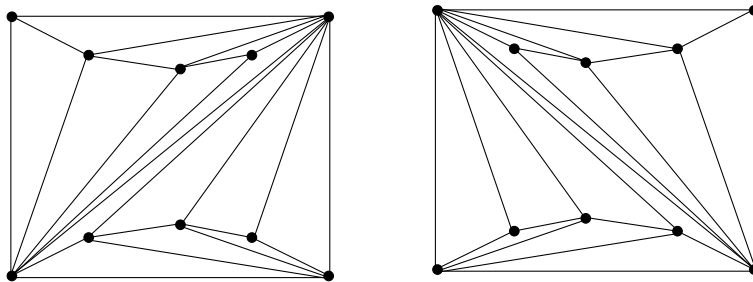


Figura 10: Dos triangulaciones tales que para ir de una a otra se requiere un número cuadrático de giros.

Sin embargo, si añadimos un punto extra y retriangulamos como se muestra en la figura 11 podemos ir de la primera a la segunda triangulación con un número lineal de giros.

A continuación presentamos nuestro último problema:

**Problema: 2** Sean  $T_1$  y  $T_2$  dos triangulaciones distintas de una colección  $P_n$  de  $n$  puntos. ¿Será posible que agregando algunos puntos Steiner a  $P_n$  para obtener un nuevo conjunto de puntos  $P'$  y completando las triangulaciones  $T_1$  y  $T_2$  a triangulaciones  $T'_1$  y  $T'_2$  de  $P'$  respectivamente, podamos transformar  $T'_1$  y  $T'_2$  en un número lineal de giros?

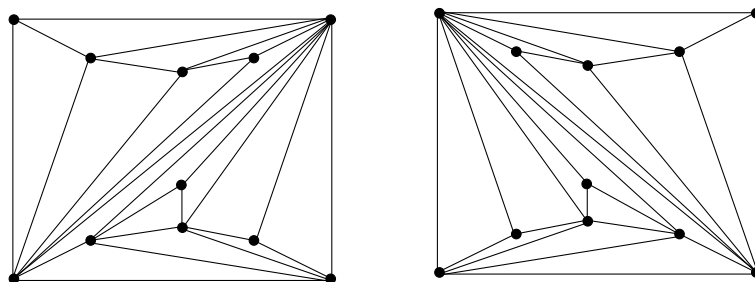


Figura 11: El número de giros requeridos para ir de la primera a la segunda triangulación es ahora lineal!

## Referencias

- [1] M. Abellanas, G. Hernandez, R. Klein, V. Neumann-Lara y J. Urrutia, “A combinatorial property of convex sets”. *Discrete Comput. Geom.* **17** (1997), no. 3, 307–318.
- [2] N. Alon, M. Katchalski y W.R. Pulleyblank, “Cutting disjoint disks by straight lines”, *Discrete and Comp. Geom.* **4**, 239-243, (1989)
- [3] I. Barány y D.G. Larman, “A combinatorial property of points and ellipsoids”, *Discrete Comp. Geometry* **5** (1990) 375-382.
- [4] I. Barány. J.H. Schmerl, S.J. Sidney y J. Urrutia, “A combinatorial result about points and balls in Euclidean space”, *Discrete Comp. Geometry* **4** (1989) 259-262.
- [5] J. Czyzowicz, E. Rivera-Campo y J. Urrutia, “Separation of convex sets”. *Discrete Appl. Math.* **51** (1994), no. 3, 325–328.
- [6] J. Czyzowicz, E. Rivera Campo, J. Urrutia y J. Zaks, “Separating convex sets on the plane”, Proc. 2nd. Canadian Conference on Computational Geometry, University of Ottawa, (1989), pp. 50-54.
- [7] J. Czyzowicz, E. Rivera-Campo, J. Urrutia y J. Zaks, “Separating convex sets in the plane”. *Discrete Comput. Geom.* **7** (1992), no. 2, 189–195.
- [8] H. Edelsbrunner, N. Hasan, R. Seidel y X.J. Shen, “Circles through two points that always enclose many points”, *Geom. Dedicata*, **32** no. 1, 1-12 (1989).
- [9] Z. Gao, J. Urrutia y J. Wand, “Diagonal flips in labelled planar triangulations”, por aparecer en *Graphs and Combinatorics*.

- [10] R. Hayward, D. Rappaport y R. Wenger, “Some extremal results on circles containing points”, *Disc. Comp. Geom.* **4** (1989) 253-258.
- [11] R. Hayward, “A note on the circle containment problem”, *Disc. Comp. Geom.* **4** (1989) 263–264.
- [12] K. Hope y M. Katchalsk, “Separating plane convex sets”, *Math. Scand.* **66** (1990), no. 1, 44–46.
- [13] F. Hurtado, M. Noy y J. Urrutia, “Flipping edges on triangulation”, Proc. 12th ACM Symposium on Computational Geometry, May 24-26 1996, 214–223.
- [14] H. Ito, H. Uehara, y M. Yokoyama, “NP-completeness of stage illumination problems”, Discrete and Computational Geometry, JCDCG’98, pp. 158–165, *Lecture Notes in Computer Science* 1763, Springer-Verlag, (2000).
- [15] H. Komuro, “The diagonal flips of triangulations on the sphere”, *Yokohama Math. J.* **44** (1997), 115–122.
- [16] J. Pach, y E. Rivera-Campo, “On circumscribing polygons for line segments”, *Computational Geometry, Theory and Applications*, **10**, (1998), 121-124.
- [17] V. Neumann-Lara y J. Urrutia, “A combinatorial result on points and circles in the plane”, *Discrete Math.* **69** (1988) 173–178.
- [18] V. Neumann-Lara, E. Rivera-Campo, y J. Urrutia, “Convex partititonings of point sets”, manuscript, 1999.
- [19] J. O’Rourke, *Art Gallery Theorems and Algorithms*, Oxford Univ. Press (1987)
- [20] Sherman, T., “Recent results in art galleries”, Proc. IEEE, (1992)1384-1399.
- [21] Csaba D. Tóth, “Art gallery problem with guards whose range of vision is  $180^\circ$ ”, *Computational Geometry, Theory and Applications*, **17** (2000), 121–134.
- [22] H. Tverberg, “A separation property of plane convex sets”. *Math. Scand.* **45** (1979), no. 2, 255–260.
- [23] J. Urrutia, “Art gallery and illumination problems”, In J.-R. Sack and J. Urrutia, (eds.), *Handbook on Computational Geometry*, North Holland (2000), 973–1127.
- [24] K. Wagner, “Bemerkungem zum Vierfarbenproblem”, *Jber. Deutsch. Math-Verein* **46** (1936), 126–132.