

# $L$ -corredor $k$ -cromático

C. Bautista-Santiago\*      J. Cano-Vila†      J. M. Díaz-Báñez‡  
H. González-Aguilar§      D. Lara¶      J. Urrutia||

## Resumen

Sea  $S$  un conjunto  $k$ -coloreado de  $n$  puntos en posición general en el plano,  $k \leq n$ . Decimos que una región en el plano es  $k$ -coloreada, con respecto a  $S$ , si ésta contiene al menos un punto de cada color. Sea  $p = (a, b)$  un punto en el plano, definimos  $C_p^+ = \{(x, y) : a \leq x, b \leq y\}$  y  $C_p^- = \{(x, y) : a < x, b < y\}$ . Un  $L$ -corredor es un conjunto del plano de la forma  $C_p^+ \setminus C_q^-$  tal que  $p = (a, b)$  y  $q = (c, d)$  con  $a < c$  y  $b < d$ .

En este trabajo proponemos un algoritmo con complejidad  $O(n^2 \log k)$  que resuelve el problema de calcular el  $L$ -corredor  $k$ -cromático que minimice  $(c - a)$ , bajo la condición que  $(c - a) = (d - b)$ . Además, damos un algoritmo de complejidad  $O(n^2 k)$  que encuentra el  $L$ -corredor  $k$ -cromático, tal que éste minimiza la suma de  $(c - a) + (d - b)$ . Así también, consideramos el problema donde el  $L$ -corredor  $k$ -cromático no tiene una orientación fija, y proporcionamos un algoritmo con complejidad  $O(n^3 \log n)$  para poder encontrarlo.

## 1 Introducción

Dado un punto  $p = (a, b)$  del plano, sean  $C_p^+ = \{(x, y) : a \leq x, b \leq y\}$  y  $C_p^- = \{(x, y) : a < x, b < y\}$  los cuadrantes cerrado y abierto, respectivamente, definidos por  $p$ . Un  $L$ -corredor del plano es un conjunto de puntos  $\mathcal{C}_{p,q}$  de la forma  $C_p^+ \setminus C_q^-$  tales que si  $p = (a, b)$  y  $q = (c, d)$ , entonces  $a < c$  y  $b < d$ .

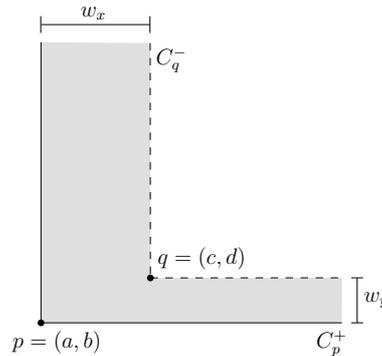


Figura 1: Definición de un  $L$ -corredor.

Dado un  $L$ -corredor  $\mathcal{C}_{p,q}$ , podemos asociarle dos valores:  $w_x = c - a$  y  $w_y = d - b$ . A  $w_x$  y  $w_y$  les llamaremos los *anchos* de los *pasillos* de  $\mathcal{C}_{p,q}$ . Cuando  $w_x = w_y$  diremos que  $w_x$  es el *ancho* de  $\mathcal{C}_{p,q}$ .

\*Posgrado en Ciencia e Ingeniería de la Computación, UNAM, México, [crevel@uxmcc2.iimas.unam.mx](mailto:crevel@uxmcc2.iimas.unam.mx).

†Posgrado en Ciencia e Ingeniería de la Computación, UNAM, México, [j\\_cano@uxmcc2.iimas.unam.mx](mailto:j_cano@uxmcc2.iimas.unam.mx).

‡Departamento de Matemática Aplicada II, Universidad de Sevilla, España, [dbanez@us.es](mailto:dbanez@us.es). Financiado parcialmente por el proyecto MTM2006-03909 del MEC.

§Instituto de Matemáticas, UNAM, México, [hernan@matem.unam.mx](mailto:hernan@matem.unam.mx). Financiado parcialmente por el proyecto CONA-CyT CB-2007/80268.

¶Posgrado en Ciencia e Ingeniería de la Computación, UNAM, México, [dlara@uxmcc2.iimas.unam.mx](mailto:dlara@uxmcc2.iimas.unam.mx).

||Instituto de Matemáticas, UNAM, México, [urrutia@matem.unam.mx](mailto:urrutia@matem.unam.mx). Financiado parcialmente por los proyectos MTM2006-03909 del MEC y CONA-CyT CB-2007/80268.

Problemas sobre  $L$ -corredores han sido estudiados en varios artículos, ver [2, 3, 4, 5]. En algunos de esos trabajos, los  $L$ -corredores tienen cuatro orientaciones distintas rotando los  $L$ -corredores definidos aquí  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  y  $270^\circ$  (corredores isotéticos), o por cualquier ángulo entre  $0$  y  $2\pi$ .

En [2], se estudia el problema de encontrar un  $L$ -corredor de ancho máximo, no necesariamente isotético, cuyo interior no contenga ningún punto de una familia dada de puntos. En [5] se busca encontrar un  $L$ -corredor con las mismas condiciones, pero permitiendo que el ángulo entre sus pasillos sea distinto a  $\pi/2$ .

Sea  $S \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto de  $n$  puntos en posición general, de manera que cada punto  $p \in S$  tiene asociado un color  $c_i$  de entre  $k$  colores, es decir,  $S$  es un conjunto  $k$ -coloreado. Decimos que un  $L$ -corredor  $\mathcal{C}_{p,q}$  está  $k$ -coloreado, con respecto al conjunto de puntos  $S$ , si  $\mathcal{C}_{p,q} \cap S$  contiene al menos un punto de cada color. En tal caso diremos simplemente que  $\mathcal{C}_{p,q}$  está  $k$ -coloreado, o que es  $k$ -cromático.

Existen varios algoritmos que encuentran objetos geométricos  $k$ -coloreados. En [1], por ejemplo, se dan algoritmos para encontrar la *banda*  $k$ -coloreada más angosta en  $O(n^2 \log n + n^2 \alpha(k) \log k)$  tiempo, así como el *rectángulo isotético*  $k$ -coloreado de menor área (o perímetro) en  $O(n(n-k) \log^2 k)$  tiempo. La complejidad de dichos algoritmos fue mejorada en [3], quedando en  $O(n^2 \log n)$  y  $O(n(n-k) \log k)$  respectivamente; además se plantea y resuelve el problema de encontrar el rectángulo  $k$ -coloreado de área mínima con orientación arbitraria, proponiendo un algoritmo de  $O(n^3 \log k)$  tiempo. Por otra parte, en [6] se establece un algoritmo que en  $O(kn \log n)$  tiempo da una solución a los problemas de reportar el *círculo*  $k$ -coloreado de radio mínimo, así como el *cuadrado* isotético  $k$ -coloreado de menor área (o perímetro).

En este trabajo, proponemos algoritmos para el problema de encontrar un  $L$ -corredor  $k$ -coloreado, que minimice  $w_x + w_y$ , así como un  $L$ -corredor de ancho mínimo, esto es, que minimice  $w_x$  dado que  $w_x = w_y$ . También damos un algoritmo para el problema de hallar un  $L$ -corredor  $k$ -coloreado de ancho mínimo, sin que éste tenga una orientación dada.

## 2 Encontrando el $L$ -corredor $k$ -cromático de ancho mínimo

Dado  $S$ , en esta sección presentaremos un algoritmo para encontrar un  $L$ -corredor  $\mathcal{C}_{p,q}$   $k$ -cromático de ancho mínimo, esto es, un  $L$ -corredor, en el cual  $w_x = c - a = d - b = w_y$ .

Para cada punto  $p = (a, b)$  del plano, sea  $\vec{h}_p$  el conjunto de puntos  $(x, b)$  tales que  $x \geq a$ , y  $\vec{v}_p$  el conjunto de puntos  $(a, y)$  con  $y \geq b$ , esto es,  $\vec{h}_p$  y  $\vec{v}_p$  son los rayos horizontal y vertical que parten de  $p$  hacia la derecha y hacia arriba, respectivamente.

Claramente la frontera de un  $L$ -corredor  $\mathcal{C}_{p,q}$  está formada por los cuatro rayos  $\vec{h}_p$ ,  $\vec{v}_p$ ,  $\vec{h}_q$  y  $\vec{v}_q$ , a los que llamaremos los rayos de  $\mathcal{C}_{p,q}$ . Dado un  $L$ -corredor  $\mathcal{C}_{p,q}$ , decimos que un punto  $r$  en su frontera es *esencial*, si no existe otro punto del mismo color que  $r$  en el interior de  $\mathcal{C}_{p,q}$ .

Las siguientes observaciones serán de utilidad:

Supongamos que  $\mathcal{C}_{p,q}$  es un  $L$ -corredor  $k$ -cromático de ancho mínimo. Es fácil ver que al menos tres de los cuatro rayos que forman la frontera de  $\mathcal{C}_{p,q}$  deben contener al menos un elemento de  $S$ . Además podemos suponer que cada uno de los rayos  $\vec{h}_p$ ,  $\vec{v}_p$  contiene al menos un punto de  $S$ , el cual puede ser el mismo para ambos rayos, esto es, que coincidan con  $p$ . Por ejemplo, si  $\vec{h}_p$  no contiene ningún elemento de  $S$ , podemos desplazar a  $p$  y a  $q$  simultáneamente hacia arriba hasta que  $\vec{h}_p$  encuentre un elemento de  $S$ , obteniendo así otra solución a nuestro problema en la que tanto  $\vec{h}_p$  como  $\vec{v}_p$  contengan al menos un elemento de  $S$ . Esto puede resumirse de la siguiente manera:

**Observación 2.1.** Siempre existe un  $L$ -corredor de ancho mínimo  $\mathcal{C}_{p,q}$  tal que cada uno de los rayos  $\vec{h}_p$  y  $\vec{v}_p$  contienen al menos un punto de  $S$ . Además al menos uno de los rayos  $\vec{h}_q$  y  $\vec{v}_q$  contiene un elemento de  $S$ .

**Observación 2.2.** Si  $\mathcal{C}_{p,q}$  es un  $L$ -corredor  $k$ -cromático de ancho mínimo, entonces  $p$  y  $q$  están sobre una recta con pendiente 1.

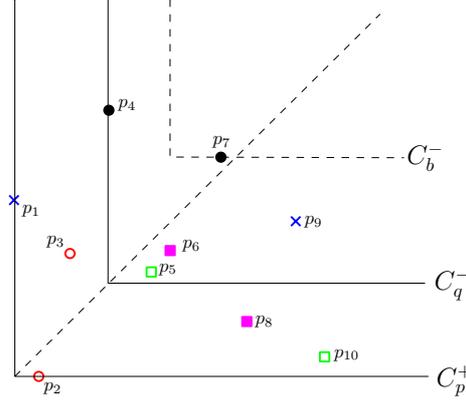


Figura 2: Ilustración de la observación 2.3.

Dado un cuadrante  $C_p^+$ , sea  $H = \{h_1, \dots, h_k\}$ , donde  $h_i$  es el punto de color  $c_i$  en el interior de  $C_p^+$  más cercano a  $\vec{h}_p$ . De manera análoga definimos al conjunto  $V = \{v_1, \dots, v_k\}$ , pero tomando como referencia al rayo vertical  $\vec{v}_p$ . Asociamos a  $C_p^+$  el cuadrante  $C_b^+$  donde  $b$  es el punto de intersección de la horizontal por el elemento  $h_i$  de  $H$  más alejado de  $\vec{h}_p$ , y la vertical por el elemento  $v_j$  de  $V$  más alejado de  $\vec{v}_p$ . La siguiente observación es obvia:

**Observación 2.3.** Si  $C_{p,q}$  es un  $L$ -corredor de ancho mínimo, entonces el punto  $q$  se encuentra en  $C_p^+ \setminus C_b^-$ . Además al menos uno de  $\vec{v}_b$  o  $\vec{h}_b$  contiene un punto de  $S$ . Figura 2.

Dado un cuadrante  $C_p^+$  y  $r$  un punto en  $C_p^+$ , definimos a  $d_p(r)$  como el mínimo entre las distancias de  $r$  a  $\vec{h}_p$  y a  $\vec{v}_p$ . Para cada color  $c_i$ , sea  $m_i$  el punto de  $S$  de color  $c_i$  en  $C_p^+$  que minimiza  $d_p(m_i)$ , y sea  $\mathcal{M} = \{m_1, m_2, \dots, m_k\}$ . La siguiente observación será útil: sea  $C_{p,q}$  el  $L$ -corredor  $k$ -cromático de ancho mínimo, y sea  $m_i$  el elemento de  $\mathcal{M}$  con mayor  $d_p(m_i)$ , entonces  $m_i$  pertenece a  $\vec{v}_q$ , o a  $\vec{h}_q$ , en otras palabras,  $m_i$  determina  $C_q^-$ . Vemos que para cualquier  $m_i$ , tenemos que  $m_i$  está en  $H$  o en  $V$ , por lo que  $\mathcal{M}$  puede ser construido a partir de  $H$  y  $V$  en  $O(k)$ . Observemos que dado un cuadrante  $C_p^+$ , podemos encontrar los conjuntos  $H$  y  $V$  asociados a dicho cuadrante en tiempo lineal, lo cual, junto con la observación 2.3, da lugar inmediatamente a un algoritmo de tiempo  $O(n^3)$ .

Realicemos un barrido de línea, con una horizontal, parándonos en cada punto  $r = (a, b)$  de  $S$  en orden decreciente con respecto al valor de  $b$ , a cada parada de este barrido le llamaremos *parada horizontal*. Por cada parada horizontal, encontraremos el  $C_{p,q}$   $k$ -cromático de ancho mínimo tal que  $r \in \vec{h}_p$ . Para esto visitaremos los puntos  $p_i = (x_i, y_i)$  en  $S$ , tales que  $b \leq y_i$  y  $a \geq x_i$  en orden decreciente con respecto a  $x$ , nos referiremos a este recorrido como el *barrido vertical*. Supongamos sin pérdida de generalidad que estos puntos están etiquetados como  $p_1, \dots, p_t$ , tales que si  $i < j$  entonces  $x_j < x_i$ . Entonces cuando visitemos a  $p_i$ , podremos encontrar el  $C_{p,q}$  solución tal que  $p = (x_i, b)$ , claramente  $r$  estará contenido en  $\vec{h}_p$  y  $p_i$  en  $\vec{v}_p$ , a este tipo de parada le llamaremos *parada vertical*.

Observemos que al pasar de  $p_i$  a  $p_{i+1}$ , cada uno de los conjuntos  $H$  y  $V$  cambiará a lo más en un elemento con respecto a los que se tenían cuando visitamos a  $p_i$ , ya que sólo podrían diferir en  $p_{i+1}$  y un elemento  $e$  de alguno de los  $H$  y  $V$  de la parada anterior, tal que  $e$  tenga el mismo color que  $p_{i+1}$ . Claramente  $V$  siempre cambiará, y  $H$  sólo en algunas ocasiones. De esta forma,  $H$  y  $V$ , pueden ser actualizados en tiempo constante al pasar de  $p_i$  a  $p_{i+1}$ . Nuestro problema ahora es que en cada parada vertical,  $\mathcal{M}$  puede cambiar drásticamente con respecto a la parada anterior, figura 3, y recalcularlo puede tomar  $O(k)$ . Esto induce un algoritmo de tiempo  $O(n^2k)$  que da solución a este problema. Sin embargo, siendo más cuidadosos podemos mejorar esta complejidad.

Como ya se observó anteriormente, los elementos de  $\mathcal{M}$  están en  $V$  o en  $H$ , definimos los conjuntos  $V' = V \cap \mathcal{M}$  y  $H' = H \cap \mathcal{M}$ . Hagamos la siguiente observación con respecto a los elementos de  $V'$ . Consideremos la parada vertical en la que visitamos al punto  $p_i$ , claramente  $p_i$  entrará a  $V'$ . Digamos que  $p_i$  tiene color  $c$ , entonces si en la parada anterior teníamos otro elemento de color  $c$  en  $V'$ , éste tendrá que salir y no volverá a formar parte de  $V'$ . Ahora sea  $p_j$  el elemento de color  $c$  en  $H$  y

supongamos que en las siguientes paradas no habrá otro punto de color  $c$  a visitar. Claramente, dado que  $p_i \in V'$ , tenemos que  $d_p(p_i) \leq d_p(p_j)$ . Sin embargo, conforme continúe nuestro barrido vertical,  $d_p(p_i)$  se irá incrementando hasta que eventualmente  $d_p(p_i) > d_p(p_j)$ , por lo que  $p_i$  no podrá estar en  $V'$  y entonces  $p_j$  formará parte de  $H'$ . Claramente  $p_i$  no podrá volver a ser parte de  $V'$ . Esto lo podemos resumir en la siguiente observación:

**Observación 2.4.** Sea  $p_i$  cualquier elemento de  $S$ . Entonces  $p_i$  entrará y saldrá de  $V'$  a lo más una vez.

Sea  $m \in \mathcal{M}$  tal que  $d_p(m)$  es máxima, esto es, el elemento de  $\mathcal{M}$  que define a  $C_q^-$ . Es fácil ver que  $m$  será el elemento de  $V'$  más alejado de  $\vec{v}_p$  o el elemento de  $H'$  más alejado de  $\vec{h}_p$ . Claramente  $m$  es el único elemento de  $\mathcal{M}$  que nos interesa para nuestra solución, el cual lo podemos decidir a partir de  $H'$  y  $V'$ . Estas observaciones son la clave para nuestro algoritmo.

Para facilitar nuestra exposición, supongamos que  $k$  es potencia de 2. Representemos a  $H'$  como una cola de prioridad en forma de un árbol binario balanceado con  $k$  hojas, donde las hojas serán los elementos de  $H$ , tal que la  $i$ -ésima hoja será el elemento de color  $c_i$  en  $H$ . La llave de cada hoja será su distancia a  $\vec{h}_p$ . Además las hojas podrán ser marcadas como activas o inactivas, donde el estar activa significa que dicho elemento está en  $\mathcal{M}$  y por tanto en  $H'$ . Entonces en cada nodo  $v$  del árbol tendremos la llave de su descendiente activo con llave de mayor tamaño. De esta forma la raíz contendrá al elemento de  $H'$  más alejado de  $\vec{h}_p$ . Se sabe que una estructura de este tipo, se puede actualizar haciendo recorrido desde la hoja modificada a la raíz, lo cual toma  $O(\log k)$ .

Análogamente podemos representar a  $V'$  como una cola de prioridad, sólo que ahora las hojas serán los elementos de  $V$ . Nótese que la distancia de un elemento de  $V$  a  $\vec{v}_p$  aumentará conforme avanza el barrido vertical, sin embargo, lo que nos interesa es tener en la raíz el elemento de  $V'$  más alejado de  $\vec{v}_p$ , el cual será el de coordenada  $x$  mayor, por lo que ahora las llaves de los elementos de  $V'$  serán sus coordenadas  $x$ , ver figura 4. De esta forma, cuando visitemos a  $p_i$  en el barrido vertical,  $p_i$  entrará en  $V'$ , por lo que habrá que actualizar a  $V'$  y posiblemente también a  $H'$ , ya que  $p_i$  podría ser un elemento de  $H$ , que al entrar en  $V'$ , haga salir un elemento de  $H'$ .

Consideremos el momento del barrido vertical en el que nos movemos de  $p_{i-1}$  a  $p_i = (x_i, y_i)$ . Sea  $c_j$  el color de  $p_i$ . Supongamos que el  $\mathcal{M}$  de la parada actual sólo difiere al de la parada anterior en  $p_i$  y otro punto de color  $c_j$ . Sea  $h_j$  el elemento en  $H$  de color  $c_j$  y sea  $d$  la distancia de  $h_j$  a  $\vec{h}_p$ . Como ya se observó anteriormente, si continuamos el barrido vertical y no ha entrado un nuevo elemento de color  $c_j$ , entonces llegará un momento a partir del cual  $p_i$  desaparecerá de  $V'$  y  $h_j$  formará parte de  $H'$ . Ese instante lo podemos reconocer en el momento que entra  $p_i$  a  $V'$ , ya que será cuando la coordenada  $x$  del punto de parada en el barrido vertical sea menor que  $x_i - d$ .

Veremos que podemos actualizar  $H'$  y  $V'$  en el momento adecuado. Construiremos otra cola de prioridad  $E$ , de forma similar a las usadas para  $H'$  y  $V'$ , donde almacenaremos los eventos en los que sale un elemento de  $V'$  y entra uno a  $H'$ . Por cada color  $c_i$ , tendremos un elemento  $v_i = (x_i, y_i)$  de  $V$  y un elemento  $h_i$  en  $H$ , tales que  $v_i$  y  $h_i$  tienen el mismo color. Sea  $d_i$  la distancia de  $h_i$  a  $\vec{h}_p$ . Entonces

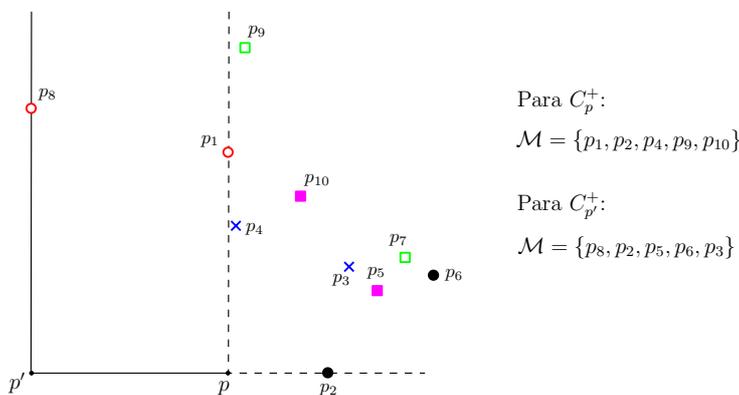


Figura 3: Un caso en el que  $\mathcal{M}$  puede cambiar drásticamente respecto al paso anterior.

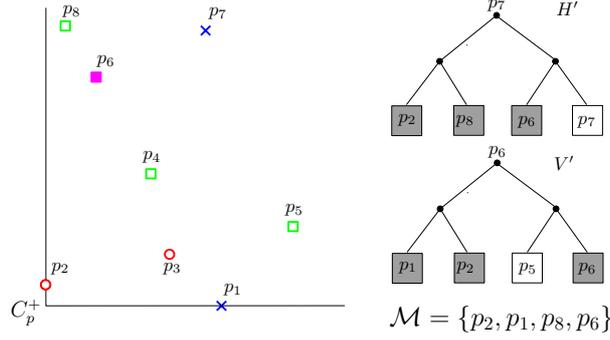


Figura 4: Las colas de prioridad correspondientes a  $H'$  y  $V'$ .

cada hoja representará a uno de los  $k$  colores, y su llave será el valor de  $x_i - d_i$  correspondiente a dicho color y estará activa si  $v_i$  está en  $V'$ , de modo que la raíz contendrá la coordenada  $x$  más próxima en el barrido, a partir de la cual algún  $v_i$  dejará de estar en  $V'$ .

De este modo, antes de avanzar a la siguiente parada del barrido verificaremos si esta parada ocurre antes o después que el elemento máximo de  $E$ , esto es, si el  $p_i$  de la siguiente parada tiene coordenada  $x$  menor o mayor que el valor contenido en la raíz de  $E$ . Si está antes, entonces podemos continuar con la siguiente parada de forma normal, de lo contrario, habrá que sacar algún elemento de  $V'$  y agregar otro a  $H'$ , y posteriormente actualizar  $E$ . Repetimos esto hasta que la coordenada  $x$  de  $p_i$  sea mayor al valor contenido en la raíz de  $E$ . Por las observaciones anteriores, ésto puede suceder a lo más un número lineal de veces al barrer una vertical de  $p_1$  a  $p_t$ .

Entonces reconocemos tres tipos de eventos que nos pueden ocurrir por cada punto en  $S$  durante una parada horizontal. Primero, que dicho punto entre en  $H$ , lo cual implica actualizar  $H'$ ; que dicho punto entre en  $V$ , entonces habría que actualizar  $V'$ ,  $E$  y posiblemente  $H'$ ; y finalmente que dicho punto salga de  $V'$ , por lo que habría que actualizar las tres colas de prioridad. Vemos que estos eventos tienen un costo de  $O(\log k)$  operaciones, y es fácil ver que cada uno de estos eventos ocurre a lo más una vez por punto en cada parada horizontal. De esto se sigue que el costo total de cada parada horizontal es de  $O(n \log k)$ , además de lo que nos toma construir las colas de prioridad al inicio de la parada horizontal. Esto fácilmente puede ser hecho en tiempo  $O(n)$ , por lo que el costo total de cada parada horizontal es de  $O(n \log k)$ . Dado que tenemos un número lineal de paradas horizontales podemos enunciar el siguiente resultado:

**Teorema 2.5.** *Dado un conjunto  $S$  de  $n$  puntos en el plano,  $k$ -coloreado y en posición general, podemos encontrar un  $L$ -corredor  $C_{p,q}$   $k$ -cromático de ancho mínimo en tiempo  $O(n^2 \log k)$ .*

### 3 Encontrando el $L$ -corredor $k$ -cromático que minimiza $w_x + w_y$

En esta sección proponemos un algoritmo para dar solución al siguiente problema: dado  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano, en posición general y  $k$ -coloreado, obtener un  $L$ -corredor  $C_{p,q}$   $k$ -cromático, con respecto a  $S$ , de tal forma que  $w_x + w_y$  sea mínima.

Supongamos que  $C_{p,q}$  es un  $L$ -corredor  $k$ -coloreado, tal que la suma  $w_x + w_y$  es mínima. A diferencia del problema anterior, en este caso podemos observar lo siguiente:

**Observación 3.1.** Cada rayo  $\vec{h}_q$  y  $\vec{v}_q$  de  $C_{p,q}$ , contiene un punto de  $S$ , además, dichos puntos son distintos.

No obstante, es fácil notar que las observaciones acerca de  $C_p^+$  siguen siendo válidas para este problema, por lo que podemos encontrar una solución para este problema usando la misma idea del barrido planteada en la sección anterior.

Para este problema definiremos a  $H$  y  $V$  de forma similar que en el problema anterior, sólo que ahora sus elementos estarán ordenados con respecto a su distancia a  $\vec{h}_p$  y  $\vec{v}_p$ , respectivamente. De

nuevo  $H$  y  $V$  cambiarán, con respecto a la parada anterior en a lo más en un elemento y al manejarlos como listas ordenadas podrán ser actualizadas en tiempo  $O(\log k)$ . Ahora describiremos brevemente como podemos encontrar en tiempo  $O(k)$ , el  $L$ -corredor  $\mathcal{C}_{p,q}$   $k$ -cromático que minimice  $w_x + w_y$ , a partir de  $H$  y  $V$ .

Supongamos entonces que  $\mathcal{C}_{p,q}$  es el  $L$ -corredor que buscamos. Sean  $e$  y  $e'$  puntos por los que pasan  $\vec{h}_q$  y  $\vec{v}_q$  respectivamente, debido a la observación 3.1,  $e \neq e'$ . Claramente  $e \in V$  y  $e' \in H$ , y ningún elemento que esté antes que  $e$  en el orden de  $V$  tiene el mismo color que  $e'$ . De igual forma ningún elemento que esté antes que  $e'$  en el orden de  $H$ , tiene el mismo color que  $e$ . Es fácil ver que si no existen dos puntos con estas propiedades, entonces el  $L$ -corredor buscado no existe, o no minimiza  $w_x + w_y$ . Claramente para cada elemento  $e$  de  $V$  podemos encontrar su correspondiente  $e'$  en tiempo  $O(k)$ . No es difícil ver que si procesamos los elementos de  $V$  en orden, podemos calcular para todos los elementos  $e \in V$  su correspondiente  $e' \in H$  en tiempo amortizado  $O(k)$ .

Por tanto tenemos:

**Teorema 3.2.** *Dado un conjunto  $S$  de  $n$  puntos en el plano,  $k$ -coloreado y en posición general, podemos encontrar un  $L$ -corredor  $\mathcal{C}_{p,q}$   $k$ -cromático que minimice  $w_x + w_y$  en tiempo  $O(n^2k)$ .*

## 4 $L$ -Corredor $k$ -cromático no orientado

En esta sección, damos un procedimiento para resolver el problema de minimizar la anchura de un  $L$ -corredor  $k$ -coloreado cuando la orientación es una variable libre.

Al igual que en el caso orientado, es fácil ver que siempre existe un corredor óptimo que contiene un punto en cada semirecta de la frontera exterior ( $\vec{h}_p$  y  $\vec{v}_p$  en las secciones anteriores), o bien un punto  $p$  en la intersección de las dos semirectas, al que llamamos ápice. Aquí explicamos, sin entrar en detalle, un algoritmo eficiente para encontrar el corredor no orientado óptimo que contiene un punto en cada semirecta exterior. El segundo caso es, de hecho, un caso degenerado y más simple que éste.

Sean  $\vec{x}$  y  $\vec{y}$  dos rectas ortogonales y orientadas. Definimos el cuadrante como la intersección del semiplano izquierdo de  $\vec{x}$  (digamos  $H_x$ ) y de  $\vec{y}$  ( $H_y$ ). Observemos que si la frontera exterior del cuadrante pasa por dos puntos  $p$  y  $q$ , su ápice puede estar en cualquier punto del semicírculo con extremos en  $p$  y  $q$ , ver Figura 5.

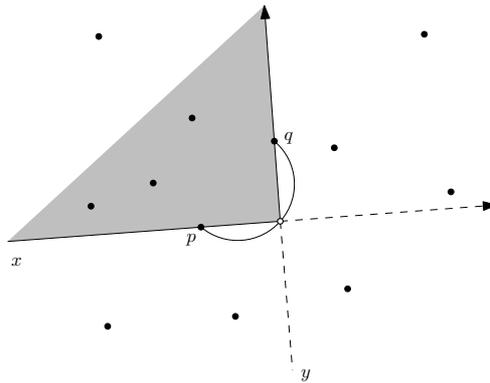


Figure 5: Cuadrantes con dos puntos fijos en la frontera.

Básicamente, lo que nos interesa hacer es un barrido con un cuadrante anclado en  $p$  y  $q$ , lo cual es equivalente a mover el ápice sobre el semicírculo desde  $p$  hasta  $q$ . Lo que necesitamos saber, en cada instante y para cada uno de los colores, es el punto en el interior del cuadrante más cercano a la frontera exterior de éste. Conocido ésto, la solución estará dada por el color que minimice la distancia al color más lejano en todo el recorrido.

A continuación indicamos, brevemente, cómo podemos resolver este problema usando la dualidad geométrica punto-recta.

Dado un punto  $p$  y una recta  $\ell$ , denotamos como  $p^*$  y  $\ell^*$  sus duales correspondientes. Dado el arreglo de rectas del espacio dual, mover el ápice del cuadrante sobre el semicírculo es igual a barrer el espacio dual con dos rayos verticales, los cuales parten de  $\vec{x}^*$  y  $\vec{y}^*$  y cuya distancia horizontal es exactamente  $\pi/2$ .

La idea clave para dar un algoritmo eficiente es que, en lugar de hacer un barrido con dos líneas verticales en el dual, usaremos una subestructura, que no es más que una envolvente inferior de un arreglo de semirectas que contiene la información que nos interesa, es decir, cuál es el punto más cercano de cada color en todo el intervalo de barrido.

Claramente un punto  $s \in S$  entra y sale del cuadrante una única vez. Entonces, podemos construir un arreglo de semirectas  $A_i^x$ , para cada color  $i$ , de la siguiente forma. Para cada  $s$ , tomaremos el rayo de  $s^*$  compuesto por los puntos de la forma  $(a, b)$ , tales que cuando  $\vec{x}$  tiene pendiente  $a$ ,  $s$  está dentro del cuadrante. Claramente nuestro arreglo contendrá  $O(n)$  rayos y el punto en el interior del cuadrante, cuando  $\vec{x}$  tiene pendiente  $a$ , tal que su distancia a  $\vec{x}$  es mínima, está dado por la envolvente inferior de tal arreglo. Análogamente podemos construir el arreglo  $A_i^y$ . Nuestro objetivo es superponer los dos subarreglos  $A_i^x$  y  $A_i^y$ , de forma que la envolvente inferior del arreglo resultante nos proporcione el punto más cercano a la frontera exterior del cuadrante en cada instante del barrido. Para ello, hay que hacer con cuidado una transformación, obteniendo los espacios duales con  $p$  y  $q$  en el origen de coordenadas de forma independiente y sobreponer los arreglos correspondientes, dando lugar a un nuevo arreglo asociado a la frontera del cuadrante, que denotamos como  $A_i$ . De esta forma, para una orientación  $a$  de  $\vec{x}$ , si  $s$  es el punto de color  $i$  más cercano a la frontera del cuadrante, entonces, el punto de  $s^*$  con abscisa  $a$ , será parte de la envolvente inferior de  $A_i$ .

Es fácil ver que la envolvente inferior de cada arreglo  $A_i$ ,  $L(A_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , tiene complejidad lineal y ésta puede calcularse en tiempo  $O(n \log n)$  [7]. De esta forma, considerando el arreglo  $\mathcal{A}$ , compuesto por las envolventes inferiores  $L(A_i)$  para todos los colores  $i = 1, \dots, k$ , podemos obtener la solución a nuestro problema al determinar su envolvente superior.

El arreglo  $\mathcal{A}$  puede verse como un arreglo con un número lineal de segmentos y puede calcularse en tiempo  $O(n \log n)$ . Por tanto, ejecutando el algoritmo anterior para cada pareja de puntos en  $S$ , podemos establecer el siguiente resultado:

**Teorema 4.1.** *Dado un conjunto  $S$  de  $n$  puntos en el plano,  $k$ -coloreado y en posición general, podemos calcular el  $L$ -corredor  $k$ -cromático no orientado con menor ancho en tiempo  $O(n^3 \log n)$ .*

## Referencias

- [1] M. Abellanas, F. Hurtado, C. Icking, R. Klein, E. Langetepe, L. Ma, B. Palop y V. Sacristán. *Smallest Color-Spanning Object*. Lecture Notes in Computer Science, 2161:278-289, 2001.
- [2] S. W. Cheng. *Widest empty L-shaped corridor*. Information Processing Letters, 58:277-283, 1996.
- [3] S. Das, P. P. Goswami y S. C. Nandy. *Recognition of Minimum Width Color-Spanning Corridor and Minimum Area Color-Spanning Rectangle*. Lecture Notes in Computer Science, 3480:827-837, 2005.
- [4] G. K. Das, D. Mukhopadhyay y S. C. Nandy. *Improved Algorithm for a Widest 1-Corner Corridor*. Lecture Notes in Computer Science, WALCOM '09: Proceedings of the 3rd International Workshop on Algorithms and Computation, 5431:83-92, 2009.
- [5] J.M. Díaz-Bañez, M. A. López y J. A. Sellarès. *On finding a widest 1-corner corridor*. Information Processing Letters, 98:199-205, 2006.
- [6] D. P. Huttenlochar, K. Kadem y M. Sharir. *The upper envelope of Voronoi surfaces and its application*. Discrete and Computational Geometry, 8:267-291, 1993.
- [7] M. Sharir and P.K. Agarwal *Davenport-Shinzel Sequences and Their Geometric Applications*. Cambridge University Press, 1995.