

# Problemas de cobertura circular<sup>1</sup>

J. Urrutia y P. Valencia

{urrutia, valencia}@matem.unam.mx

Universidad Nacional Autónoma de México

Instituto de Matemáticas

Ciudad Universitaria, México 04510, D F, México

## Resumen

En toda colección de  $n$  puntos en posición general en el plano, existen dos con la propiedad de que todo círculo que pasa por ellos contiene una fracción lineal del total de los puntos. En este trabajo, demostraremos que cualquier colección de  $2n$  puntos,  $n$  rojos y  $n$  azules, tiene una pareja de puntos de colores diferentes para los que cualquier círculo que pase por ellos contiene al menos  $\frac{n}{36}$  elementos de la colección. También estudiaremos una generalización para conjuntos convexos de área uno. Probaremos que en tales conjuntos existen parejas de puntos tales que cualquier círculo que los contenga contiene un subconjunto de área  $\frac{1}{4.7}$ . Para casos en los que el conjunto sea un triángulo o un conjunto con centro de simetría, el área contenida es al menos la mitad. Algunos problemas adicionales serán estudiados.

*Palabras Clave:* puntos, círculos, convexidad, cobertura circular.

## 1. **Introducción**

En 1985 V. Neumann-Lara y J. Urrutia [8] demostraron el siguiente resultado:

**Teorema 1** *Dada cualquier colección  $P_n$  de  $n$  puntos en el plano, hay dos elementos  $p, q \in P_n$  tales que todo círculo que pase por ellos, contiene al menos  $\frac{n-2}{60}$  elementos de  $P_n$ .*

---

<sup>1</sup>Trabajo parcialmente financiado por CONACYT, México, proyecto no. 37540 A

**Definición 1** Si  $u, v$  son dos puntos en el plano, el número,

$$cc(u, v) = \min\{|\mathcal{C}_{u,v} \cap P_n| : \mathcal{C}_{u,v} \text{ círculo por } u, v\}$$

es la **cobertura circular** de  $P_n$  por  $u, v$ .

En estos términos, el teorema 1 afirma que toda colección de  $n$  puntos, contiene una pareja  $p, q$  de puntos tal que  $cc(p, q) \geq \frac{n-2}{60}$ . Esta cota fue posteriormente mejorada primero a  $\frac{n}{30}$ , después a  $\lfloor \frac{n}{27} \rfloor + 2$ , a  $\lceil \frac{5(n-2)}{84} \rceil$  y finalmente a  $\frac{n}{4.7}$  ([4],[6],[5],[7]). El propósito entonces, ha sido el de encontrar parejas que maximicen la cobertura circular en colecciones de puntos. Los resultados que se han obtenido, dieron lugar a la siguiente,

**Conjetura 1** *Cualquier colección  $P_n$  de  $n$  puntos, contiene dos elementos cuya cobertura circular es al menos  $\frac{n}{4} \pm c$ .*

En [6], se presenta un ejemplo con  $4n$  puntos en el que para todo par de puntos hay un círculo que pasa por ellos y no cubre más de  $n + 1$  puntos de la colección (figura 1). Ahí mismo, se demuestra que en el caso convexo, hay un par de puntos de cobertura circular al menos un tercio y esta cota es exacta. Este resultado fue obtenido independientemente en [2].

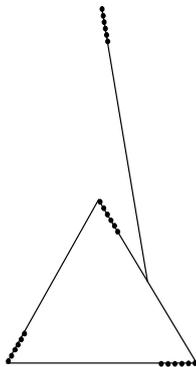


Figura 1: Todo círculo por cualquier par de puntos, contiene a lo más  $\lceil \frac{n}{4} \rceil + 1$  puntos de la colección.

Este problema también se ha estudiado en dimensiones mayores a dos [4] y existe una generalización muy interesante usando colecciones de puntos y elipsoides en espacios euclidianos [3]. Un resultado más general es el que se presenta en [1]: Si  $\Phi$  es una familia de  $n$  conjuntos compactos ajenos en el plano y  $S$  un conjunto compacto cualquiera, entonces existen dos elementos  $S_i, S_j \in \Phi$  tales que cualquier conjunto  $S'$  que los contenga y sea homotético a  $S$ , contiene al menos  $\frac{n-2}{30}$  elementos de  $\Phi$ .

Iniciaremos con un replanteamiento del problema original para colecciones de puntos a los que se han asignado dos colores de manera uniforme. Siguiendo un razonamiento similar al usado en [8],



$I(P_{2n})$  al número de pares de segmentos que se cruzan.

**Lema 2**  $I(P_{2n}) \geq \left( \frac{\binom{n}{3}}{\binom{n-2}{3}} \right)^2$

**Demostración.** El Teorema de Kuratowski para gráficas bipartitas planares asegura que en cualquier dibujo de  $K_{3,3}$  hay al menos un cruce de aristas. Por cada tres puntos rojos y tres puntos azules de  $P_{2n}$ , tenemos una de estas gráficas. Hay  $\binom{n}{3}^2$  de tales gráficas pero, cada cruce pertenece exactamente a  $(n-2)^2$  subgráficas  $K_{3,3}$ , una por cada segmento restante. Dividiendo por este número eliminamos las repeticiones y obtenemos el resultado. ■

**Teorema 2** Hay un par bicolor de puntos  $p, q \in P_{2n}$  tal que  $cc(p, q) \geq \frac{n-1}{36}$ .

**Demostración.** Consideremos la gráfica de intersección de  $P_{2n}$ , en la que cada vértice representa un segmento entre un punto azul y uno rojo de la colección, y dos vértices son adyacentes si los segmentos correspondientes se cruzan. Ahora la orientamos, si  $e_1 e_2$  es una arista de la gráfica, pondremos la flecha de  $e_1$  hacia  $e_2$ , si cada círculo que pasa por los extremos de  $e_1$ , contiene alguno de los extremos de  $e_2$ . En caso de que los extremos de las aristas formen un conjunto cíclico, elegimos arbitrariamente una orientación. La digráfica así obtenida, tiene  $I(P_{2n})$  aristas y  $n^2$  vértices por lo que existe un vértice con exgrado al menos  $\frac{I(P_{2n})}{n^2}$ . Aplicando el lema anterior, tenemos

$$\frac{I(P_{2n})}{n^2} \geq \left( \frac{n-1}{6} \right)^2$$

Es decir, hay dos puntos en la colección, uno de cada color, tales que el segmento que los une, cruza al menos otros  $\left(\frac{n-1}{6}\right)^2$  segmentos. Como cada punto es extremo de a lo más  $n-1$  segmentos, entonces, todo círculo por este par de puntos contiene al menos  $\left(\frac{n-1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{n-1}\right) = \frac{n-1}{36}$ , puntos de la colección. ■

No es difícil construir ejemplos en los que para cualquier par bicolor de puntos haya un círculo por ellos que contenga puntos del mismo color.

### 3. Cobertura circular en convexos

Inicialmente cuantificamos la cobertura circular utilizando como medida el área del conjunto. En la primera sección, para un par de puntos  $p, q$  consideramos la familia de conjuntos que induce

la intersección de una colección de puntos con los círculos que pasan por  $p$  y  $q$ . Definíamos la cobertura circular de  $p, q$  como el mínimo de las cardinalidades de esos conjuntos. Ahora, extendemos este concepto cambiando cardinalidad por área. Esto es, dado un conjunto convexo  $S$  y un par de puntos  $p, q$ , consideramos la familia de conjuntos que induce la intersección de  $S$  con los círculos que pasan por  $p$  y  $q$ , y definimos la cobertura circular de  $S$  por  $p, q$  como el mínimo de las áreas de tales conjuntos. Análogamente podemos definir la cobertura en términos del perímetro y en general en términos de cualquier medida definida en el conjunto que estemos trabajando.

Nuevamente nuestro objetivo es encontrar un par de puntos que maximice la cobertura circular. Iniciamos con los triángulos.

**Teorema 3** *En cualquier triángulo existen dos puntos con cobertura circular del área mayor o igual que la mitad.*

**Demostración.** Sea  $T$  el triángulo de vértices  $a, b, c$  y supongamos que el ángulo incidente a  $b$  es el de menor magnitud. Sean  $m$  el punto medio del lado  $ac$  y  $\mathcal{C}$  un círculo que pasa por  $b$  y  $m$ . Sabemos que este par de puntos determina un segmento que divide a  $T$  en dos nuevos triángulos de la misma área. Así, si  $\mathcal{C}$  contiene alguno de los otros dos vértices terminamos, pues  $\text{área}(\Delta abm) = \text{área}(\Delta mbc) = 1/2 \text{área}(T)$ .

Supongamos entonces que éste no es el caso. Sean  $k$  y  $l$  los puntos medios de los lados  $ab$  y  $bc$  respectivamente. Consideremos el cuadrilátero formado por los puntos  $k, b, l, m$  y notemos que ahí los ángulos incidentes a  $b$  y  $m$  son iguales, y como  $\angle b$  es mínimo, entonces la suma es menor que  $180^\circ$  (figura 2). El lema 1 garantiza que  $\mathcal{C}$ , contiene a  $k$  ó  $l$ . Si contiene ambos puntos, entonces

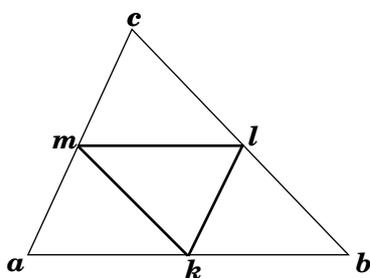


Figura 2:

contiene al cuadrilátero  $kblm$ , cuya área es igual a la mitad del área de  $T$  y terminamos. Si sólo contiene a uno de ellos, digamos a  $l$  pero no a  $k$ , consideramos el cuadrilátero formado por los puntos  $b, c, m, k$  en donde la suma de los ángulos que inciden en  $b$  y  $m$  es

$$\angle b + 180^\circ - \angle c = \angle a + 2\angle b < 180^\circ$$

Otra vez por el lema 1 sabemos que  $\mathcal{C}$ , contiene a  $k$  ó  $c$ , pero la suposición obliga a que el punto en el círculo sea  $c$  y que por lo tanto  $\mathcal{C}$  cubra la mitad del área de  $T$ . Un razonamiento similar funciona si  $\mathcal{C}$  contiene a  $k$  y no a  $l$ . ■

Este resultado también es cierto para conjuntos centralmente simétricos, aún si no son convexos.

**Definición 2** Sea  $S$  un conjunto compacto en el plano, con interior no vacío. Una cuerda área-bisectora (perímetro-bisectora) de  $S$ , es una cuerda que lo divide en dos conjuntos  $S_1, S_2$  de igual área (perímetro).

Recordemos que en los conjuntos centralmente simétricos, cualquier cuerda que pase por el centro de simetría, es área-bisectora y perímetro-bisectora.

**Observación 1** Si  $a$  y  $b$  son dos puntos en el plano,  $\mathcal{D}$  el círculo que contiene al segmento  $ab$  como diámetro y  $\mathcal{C}$  un círculo cualquiera que pasa por  $a$  y  $b$ , entonces  $\mathcal{C}$  contiene alguno de los dos semicírculos de  $\mathcal{D}$  determinados por  $ab$ .

**Teorema 4** Si  $S$  es un conjunto centralmente simétrico,  $S$  contiene un par de puntos con cobertura circular del área y del perímetro mayor o igual que la mitad.

**Demostración.** Sean  $a, b$  dos puntos que realicen el diámetro de  $S$ . No es difícil demostrar que el segmento  $ab$  pasa por el centro de simetría de  $S$  y por tanto lo divide en dos subconjuntos de igual área y perímetro. Si  $\mathcal{D}$  es el círculo que tiene a  $ab$  como diámetro,  $\mathcal{D}$  contiene a todo  $S$ , pues de otro modo habría puntos en  $S$  a distancia mayor que  $d(a, b)$ . Así, cada uno de los semicírculos de  $\mathcal{D}$  determinados por el segmento  $ab$ , contiene a uno de los subconjuntos determinados por  $ab$  en  $S$ , cubriendo la mitad del área y la mitad del perímetro de  $S$ . Finalmente, por la observación 1, cualquier otro círculo que pase por  $a$  y  $b$  contiene alguno de estos semicírculos y por tanto cubre al menos la mitad del área y perímetro de  $S$ . ■

Como vimos, estos puntos son extremos de cuerdas área-bisectoras y perímetro-bisectoras de longitud máxima. De igual manera los puntos considerados en un triángulo, son extremos de cuerdas área-bisectoras que, como veremos, también son de longitud máxima.

Sea  $p = (x, y)$  un punto en el plano tal que  $x, y > 0$ . Sean  $\mathcal{L}$  el rayo que parte del origen y pasa por  $p$ , y  $\alpha$  el ángulo que  $\mathcal{L}$  forma con el eje  $x$ . Dado  $A > 0$  un valor real fijo,  $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}(A)$  es la familia de todos los triángulos de área  $A$ , con vértices  $\bar{o}$ , el origen,  $a$ , en la parte positiva del eje  $x$  y  $b \in \mathcal{L}$ .

**Lema 3** Si  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $A > 0$ , en  $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}(A)$ , el triángulo cuyo lado opuesto a  $\alpha$  es de longitud mínima es el isósceles de lados  $\bar{o}a = \bar{o}b$ .

**Demostración.** Si denotamos  $s = d(\bar{o}, a)$  y  $t = d(\bar{o}, b)$ , entonces las coordenadas de los puntos  $a$  y  $b$  son:  $a = (s, 0)$ ,  $b = (t \cos \alpha, t \sin \alpha)$ . En estos términos  $A = \frac{1}{2}st \sin \alpha$ . La longitud del segmento  $ab$  está dada por la expresión

$$d(a, b) = \sqrt{(s - t \cos \alpha)^2 + t^2 \sin^2 \alpha}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow d(a, b)^2 &= (s - t \cos \alpha)^2 + t^2 \sin^2 \alpha \\
&= s^2 - 2st \cos \alpha + t^2 \cos^2 \alpha + t^2 \sin^2 \alpha \\
&= s^2 - 2st \cos \alpha + t^2
\end{aligned}$$

Notemos que  $t = \frac{2A}{s \sin \alpha}$  por lo que al sustituir, tenemos

$$d(a, b)^2 = s^2 - 2\left(\frac{2A}{\sin \alpha} \cos \alpha\right) + \left(\frac{2A}{s \sin \alpha}\right)^2$$

Consideremos la función  $f(s) = d(a, b)^2$  y observemos que  $\frac{dt}{ds} = \frac{-2A}{s^2 \sin \alpha}$ . De donde,  $f'(s) = 2s - 2\left(\frac{4A^2}{s^3 \sin^2 \alpha}\right)$ . Igualando a cero,

$$\begin{aligned}
f'(s) &= 0 \Leftrightarrow s^4 \sin^2 \alpha - 4A^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow s^4 = \frac{4A^2}{\sin^2 \alpha} \\
&\Leftrightarrow s = \sqrt{\frac{2A}{\sin \alpha}}
\end{aligned}$$

Como en este contexto,  $s > 0$ , entonces  $f$  tiene un único punto crítico.  $f''(s) = 2 + \frac{24A^2}{s^4 \sin^2 \alpha} > 0$  y por tanto es un mínimo. Así, si  $s = \sqrt{\frac{2A}{\sin \alpha}} \Rightarrow t = \frac{1}{s} \frac{2A}{\sin \alpha} = \frac{s^2}{s} = s$ . Por lo que este mínimo se alcanza cuando  $s = t$  es decir, cuando tenemos un triángulo isoscéles con lados  $\bar{oa} = \bar{ob}$ . ■

**Corolario 1** Sea  $P$  un polígono convexo en el plano y  $a, b$ , los extremos de una cuerda área-bisectora de longitud máxima, entonces al menos uno de estos puntos es vértice de  $P$ .

**Demostración.** Supongamos que esto no es cierto, es decir, que ambos son puntos interiores de dos aristas de  $P$ . Si ambas aristas son paralelas, acabamos pues podemos formar un paralelogramo con esquinas en al menos dos de los extremos de las aristas (tomando lados paralelos a  $ab$ ) y al menos una de las diagonales tiene extremo en uno de los vértices, longitud mayor que la de  $ab$  y cumple con la propiedad de dividir a  $P$  en dos polígonos de la misma área.

Si las aristas no son paralelas, entonces las rectas que las contienen se cruzan en un punto  $c$  y forma un triángulo con  $ab$ . Moviendo continuamente  $ab$  manteniendo la propiedad de bisección de área, se obtiene una familia infinita de triángulos de la misma área y todos con el mismo ángulo incidente en  $c$ . Por el lema anterior sabemos que hay un único mínimo para la longitud del segmento  $ab$ . Así, existe al menos una dirección hacia la cual podemos mover  $ab$  para obtener una cuerda área-bisectora de mayor longitud. En cualquier dirección elegida, eventualmente se llega a un vértice de  $P$  y se obtiene una cuerda área-bisectora más larga, contradiciendo la hipótesis. ■

De aquí es inmediato que una cuerda área-bisectoras de longitud máxima en un triángulos, es precisamente la mediana más larga. Evidentemente cualquier mediana es cuerda área-bisectora, pero ¿cuándo es *suficientemente larga*?. Quisieramos saber de que longitud debe ser una mediana para

afirmar que sus extremos tienen una gran cobertura circular del área. Nuestro siguiente objetivo será responder a esta pregunta.

Demostraremos que en un triángulo, las medianas que miden al menos la mitad del diámetro (esto es, la longitud del lado más grande), son cuerdas con extremos de cobertura circular mayor o igual que la mitad. Para esto, es de gran utilidad el lema que sigue.

**Lema 4** Sean  $x, y$  dos puntos,  $C_1, C_2$  dos círculos por ellos y  $l_x, l_y$ , un par de rectas paralelas que pasan respectivamente por  $x$  y  $y$  y no son ortogonales al segmento  $xy$ . Entonces, existen dos trapecios isósceles de igual área y con diagonal  $xy$ , inscritos uno en  $C_1$  y otro en  $C_2$ .

**Demostración.** Supongamos que ninguna de las rectas es tangente a alguno de los círculos. Entonces, cada recta cruza en dos puntos a cada uno de los círculos. Sean  $x_1, x_2$  los puntos de intersección, distintos de  $x$ , de la recta  $l_x$  con  $C_1$  y  $C_2$  respectivamente. Análogamente  $y_1, y_2$  son los puntos que corresponden a  $l_y$  (figura 3).

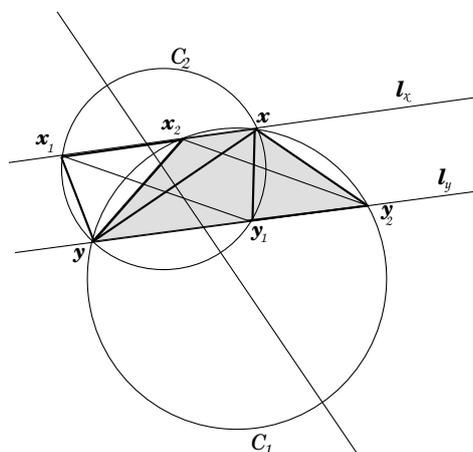


Figura 3:

Observemos que el cuadrilátero  $T_1 = xx_1yy_1$  es un trapecio isósceles, ya que los lados  $xx_1$  y  $yy_1$  son paralelos y por tanto los ángulos  $\angle yx_1x$  y  $\angle x_1xy_1$  son iguales. Entonces, las diagonales de este trapecio, segmentos  $xy$  y  $x_1y_1$ , tienen la misma longitud. Con el mismo argumento en el círculo  $C_2$ , identificamos otro trapecio isósceles:  $T_2 = xx_2yy_2$ , que también tiene como una de sus diagonales al segmento  $xy$ . Por transitividad, los segmentos  $x_1y_1$  y  $x_2y_2$  tienen la misma longitud. Así, estos segmentos son paralelos y entonces, las longitudes de  $x_1x_2$  y  $y_1y_2$  también coinciden. Además  $x_1y$ ,  $xy_1$  y  $xy_2$ ,  $yx_2$  son los pares de lados iguales de los trapecios, de donde los triángulos  $\triangle xy_1y_2$  y  $\triangle yx_2x_1$  son congruentes y por tanto tienen la misma área. El cuadrilátero  $K = xx_2yy_1$  es la intersección de los trapecios. Sólo basta observar que  $T_1 = K \cup \triangle yx_2x_1$  y  $T_2 = K \cup \triangle xy_1y_2$  para concluir que tienen igual área. ■

Si consideramos la familia de círculos coaxiales cuyo eje radical es el segmento  $xy$ , lo que tenemos

es una familia infinita de trapezios de la misma área y todos con una diagonal en  $xy$ . Los casos límite se dan precisamente en los círculos tangentes a las rectas. Cuando esto sucede,  $x = x_1$  ó  $y = y_1$  ó  $x = x_2$  ó  $y = y_2$ , y uno de los trapezios degenera en triángulo, pero también tiene la misma área (es un triángulo isósceles con lados iguales a  $xy$ ).

**Observación 2** Si el ángulo en que incide una mediana mide a lo más  $\frac{\pi}{2}$ , entonces la mediana mide al menos la mitad de la longitud del lado en que incide (el opuesto a éste ángulo).

**Teorema 5** En un triángulo de diámetro  $d$ , los extremos de una mediana de longitud  $\geq \frac{d}{2}$ , tienen cobertura circular del área mayor o igual que la mitad.

**Demostración.** Sean  $T$  un triángulo de vértices  $a, b, c$  y  $k, l, m$  los puntos medios de  $ab, bc$  y  $ca$  respectivamente. Si el diámetro  $d$ , es la longitud del lado  $ab$ , entonces,  $\gamma = \angle acb$ , el ángulo opuesto a este lado, es el mayor de  $T$  y por tanto  $\gamma \geq \frac{\pi}{3}$ . En  $\gamma$  incide la mediana más corta del triángulo,  $ck$  (figura 4 (A)). Haremos la demostración para ésta, aunque evidentemente es análoga para cualquier mediana que cumpla la hipótesis. Supongamos que  $ck$  mide al menos  $\frac{d}{2}$ , y entonces también  $\gamma \leq \frac{\pi}{2}$  (indicado en la figura con el semicírculo de diámetro  $ab$ ). Veremos que todo círculo que pasa por  $c$

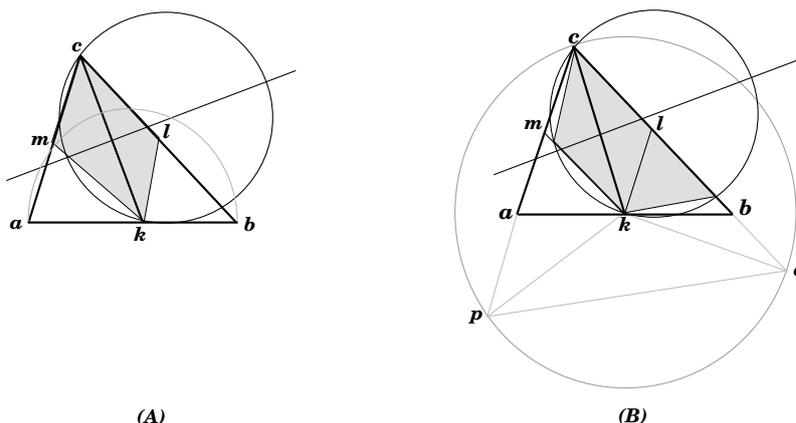


Figura 4:

y  $k$  cubre al menos la mitad del área de  $T$ . Estamos considerando la familia de círculos coaxiales cuyo eje radical es la mediana  $ck$ . Esta familia es cruzada por dos pares de rectas paralelas: el formado por la recta que contiene a  $cb$  y la que contiene a  $km$ ; y el que forman la recta por  $ac$  y la recta por  $kl$ . Por el lema 4, sabemos que esta familia de círculos determina con cada uno de estos pares, una colección infinita de trapezios isósceles de la misma área. Tal área coincide con la de un triángulo isósceles con lados iguales de la misma longitud que  $ck$ . En la figura 4 (B) es alguno de los triángulos  $\triangle qck$  ó  $\triangle pkc$ . Como  $\gamma \leq \frac{\pi}{2}$ , esta área es mayor o igual que  $1/2(\text{área}(T))$ , porque  $ck$  mide al menos  $\frac{d}{2}$ , (obs. 2) y por tanto,  $\triangle qck \supseteq \triangle bck$  y  $\triangle pkc \supseteq \triangle akc$  que tienen área igual a  $1/2(\text{área}(T))$ . Para los círculos que contienen a alguno de los puntos  $a$  ó  $b$  o a los puntos medios  $m$  y  $l$  es inmediato que cubren más de la mitad del área (área  $(klcm) = 1/2 \text{área}(T)$ ). ■

Hay una colección infinita de trapezios isósceles de la misma área contenidos en un triángulo por cada mediana que tenga longitud al menos igual a la mitad de su diámetro. Notemos que por la observación 2, es inmediato que en los triángulos acutángulos todas las medianas son suficientemente largas.

---

## Referencias

- [1] Abellanas, M., Hernández G., Klein R., Neumann-Lara V., Urrutia J., "A combinatorial property of convex sets", *Discrete & Computational Geometry*, **17**, 1997, pp. 307-318.
- [2] Akiyama J., Ishigami Y., Urabe M., Urrutia J., "On circles containing the maximum number of points", *Discrete Mathematics*, **151**, **1-3**, 1996, pp. 15- 18.
- [3] Barany I., Larman D.G., "A combinatorial property of points and ellipsoids", *Discrete & Computational Geometry*, **5 n. 4**, 1990, pp. 375-382.
- [4] Barany I., Schmerl J.H., Sidney S.J., Urrutia J., "A combinatorial result about points and balls in Euclidean space", *Discrete & Computational Geometry*, **4 n. 3**, 1989, pp. 259-262.
- [5] Hayward R., "A note on the circle containment problem", *Discrete & Computational Geometry* **4 n. 3**, 1989, pp. 263-264.
- [6] Hayward R., Rappaport D., Wenger R., "Some extremal results on circles containing points", *Discrete & Computational Geometry* **4 n. 3**, 1989, pp. 253-258.
- [7] Edelsbrunner H., Hasan N., Seidel R., Shen X.J., "Circles through two points that always enclose many points", T.R. UIUCDCS-R-88-1400 Univ. of Illinois at Urbana-Champaign, 1988.
- [8] Neumann-Lara V., Urrutia J., "A combinatorial result on points and circles on the plane", *Discrete Mathematics* **69**, 1988, pp.173-178.