

Coloraciones, tetraedralizaciones, y tetraedros vacíos en coloraciones de conjuntos de puntos en \mathbb{R}^3

J. Urrutia^{†1}

† urrutia@matem.unam.mx
Universidad Nacional Autónoma de México
Instituto de Matemáticas
Ciudad Universitaria, México D.F. México

Resumen

En este artículo estudiaremos el siguiente problema: Dada una colección de puntos P_n en \mathbb{R}^3 en posición general encontrar tetraedralizaciones del cierre convexo $\text{Conv}(P_n)$ con muchos tetraedros. Probaremos que si los elementos de P_n son los vértices de un poliedro convexo en \mathbb{R}^3 entonces siempre podemos encontrar una tetraedralización de P_n con al menos $4.75n - c$ tetraedros. Para puntos en posición general, probamos que existen siempre tetraedralizaciones con al menos $3n$ tetraedros. Como consecuencia de esto probamos que para n suficientemente grande, en cualquier 4-coloración de los elementos de P_n siempre existe un tetraedro monocromático vacío.

Palabras Clave: Conjuntos de puntos, coloraciones, tetraedralizaciones, triangulaciones.

1. Introducción

Sea P_n una colección de puntos en \mathbb{R}^3 en *posición general*. Una tetraedralización de P_n es una colección de tetraedros con vértices en P_n tal que:

¹Trabajo financiado parcialmente por el CONACYT de México PROYECTO 37540-A.

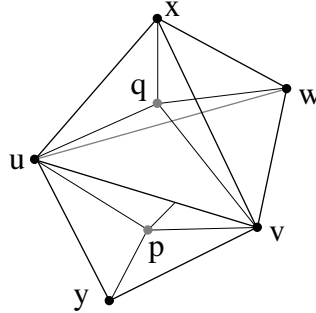


Figura 1: Una tetraedralización del conjunto $P_7 = \{u, v, w, x, y, p, q\}$ con 8 tetraedros. Los elementos $\{u, v, w, x, y\}$ pertenecen a $\text{Conv}(P_7)$. El triángulo con vértices u, v, w pertenece a los tetraedros con vértices $\{u, v, w, p\}$ y $\{u, v, w, q\}$.

1. Los interiores de los tetraedros son ajenos.
2. Ningún elemento de P_n pertenece al interior de algún tetraedro.
3. Cualesquiera dos tetraedros se intersectan en un punto de P_n , una arista, o una de sus caras.
4. La unión de nuestros tetraedros es el cierre convexo $\text{Conv}(P_n)$ de P_n . Ver la Figura 1.

El estudio de tetraedralizaciones de conjuntos de puntos en \mathbb{R}^3 es un problema muy interesante. Para empezar, no es cierto que cualesquiera dos tetraedralizaciones de una familia de puntos siempre tengan el mismo número de tetraedros. Es fácil ver que cualquier colección de seis puntos, con cinco en su cierre convexo, tienen al menos dos tetraedralizaciones con números distintos de tetraedros. Se sabe que hay colecciones de puntos que admiten tetraedralizaciones con un número cuadrático de tetraedros, y que toda colección de puntos en \mathbb{R}^3 admite una tetraedralización con un número lineal de elementos, ver [1, 6]. Un ejemplo bien conocido de una familia de puntos que admite tetraedralizaciones con un número cuadrático de tetraedros se obtiene de la siguiente forma: Sea $P_n = \{P_i = \{(i, i^2, i^3) | i = 1, \dots, n\}$. Entonces el conjunto de todos los tetraedros que son el cierre convexo de $\{p_i, p_{i+1}, p_j, p_{j+1}\}$, $i \neq j$, forman una tetraedralización de $\text{Conv}(P_n)$ [10]. Algoritmos para tetraedralizar familias de puntos en \mathbb{R}^3 con pocos tetraedros se conocen desde hace varios años; ver [1, 6]. En este artículo estudiaremos el siguiente problema: Dada cualquier colección P_n de n puntos en \mathbb{R}^3 encontrar una tetraedralización con muchos tetraedros. Hasta donde sabemos,

este problema no ha sido estudiado específicamente en esta dirección. Es fácil ver por que este problema no ha sido estudiado: en general para fines de aplicaciones, nos interesa obtener tetraedralizaciones con *pocos* tetraedros, ya que esto reduce la complejidad de muchas aplicaciones que utilizan tetraedralizaciones de familias de puntos. El lector puede consultar [5] para estudiar diversos aspectos de este problema.

Nuestro interés en estudiar tetraedralizaciones con muchos tetraedros, surge de nuestro interés en generalizar el siguiente resultado de Devillers, Hurtado, Károly, and Seara [4] para familias de puntos en el plano a familias de puntos en \mathbb{R}^3 . Sea P_n cualquier colección de n puntos en el plano con al menos nueve puntos. Entonces en cualquier 2-coloración de los elementos de P_n siempre se genera un triángulo monocromático vacío, es decir un triángulo cuyos vértices sean elementos de P_n coloreados con el mismo color y tal que no contenga en su interior ningún elemento de P_n . En este artículo probaremos: Sea P_n cualquier colección de n puntos en \mathbb{R}^3 , n suficientemente grande. Entonces en cualquier cuatro coloración de P_n siempre podemos encontrar un tetraedro monocromático vacío. Para probar este resultado probaremos primero que toda colección de puntos P_n en posición convexa en \mathbb{R}^3 admite una tetraedralización con más de $4.75n$ tetraedros. Utilizando esto, probamos que cualquier colección de puntos en posición general siempre admite una tetraedralización con más de $3n$ tetraedros. Creemos que esta cota puede ser mejorada, y que P_n siempre admite una tetraedralización con al menos $4n$ tetraedros.

2. _____ **Tetraedralizaciones de conjuntos de puntos**

2.1. Puntos en posición convexa.— Decimos que una familia de puntos está en posición convexa, si sus elementos son los vértices de un poliedro convexo. En el resto de esta sub-sección supondremos que todos nuestros conjuntos de puntos están en posición convexa. Ahora procederemos a describir un método para obtener tetraedralizaciones de conjuntos de puntos P_n con $4.75n$ tetraedros. Recordaremos algunos resultados bien conocidos de teoría de gráficas.

Teorema 1 *Toda gráfica plana G contiene a lo más $3n - 6$ aristas. La cota se alcanza cuando G es una triangulación del plano. Si G es una triangulación con más de 12 vértices, entonces tiene un vértice de grado al menos 6.*

Es fácil ver que cualquier conjunto de puntos P_n en posición convexa tiene una tetraedralización con a lo más $2n - 9$ tetraedros, $n > 6$. (Observemos que el 1-esqueleto de $Conv(P_n)$ es una gráfica plana, que denotaremos por $G(P_n)$, con $3n - 6$ aristas, y que por tanto tiene un vértice v de grado a lo más 5. Este vértice junto con las caras (que son triángulos) de $Conv(P_n)$ que no contienen a v definen una tetraedralización de P_n (cuyos tetraedros tienen como vértices v y los tres vértices de cada cara) con al menos $(2n - 4) - 5 = 2n - 9$ tetraedros.)

Utilizando el teorema 1 podemos generar una tetraedralización de P_n con al menos $4.75n$ tetraedros de la siguiente forma:

Primero mostraremos como obtener una tetraedralización con $4n - c$ tetraedros, y después veremos como con cuidado esta construcción puede ser mejorada a $4.75n$. Como $G(P_n)$ es una triangulación, si P_n tiene más de 12 puntos, $G(P_n)$ contiene un vértice de grado al menos 6. Usando este hecho podemos probar que para toda n , P_n admite una tetraedralización con $4n - c$ elementos por inducción de la siguiente forma: Para valores chicos de n , i.e. $n \leq 12$, el resultado es cierto. Sea P_n una colección de puntos con más de 12 elementos. Por tanto $G(P_n)$ contiene un vértice v de grado $gr(v)$ al menos 6. Si eliminamos v de P_n , entonces $G(P_n - v)$ se obtiene de $G(P_n)$ de la siguiente forma:

- Primero quitemos v de $G(P_n)$. Los vecinos de v en $G(P_n)$ forman un ciclo C en $G(P_n - v)$.
- En $G(P_n - v)$ existen $gr(v) - 3$ diagonales que *triangulan* C . Las aristas de C junto con las $gr(v) - 3$ diagonales forman $T_1, \dots, T_{gr(v)-2}$ triángulos.
- Por inducción existe una tetraedralización \mathcal{T} de $P_n - v$ con $4(n - 1) - c$ tetraedros.
- \mathcal{T} puede ser extendida a una tetraedralización de P_n agregando los tetraedros $H_1, \dots, H_{gr(v)-2}$, obteniendo una tetraedralización de P_n con al menos $4(n - 1) - c + gr(v) - 2 \geq 4n - c$ tetraedros. Ver la Figura 2.

De la discusión anterior podemos obtener el siguiente resultado:

Lema 1 *Sea P_n un conjunto de puntos en posición convexa tal que $G(P_n)$ tiene un vértice de grado $gr(v)$. Entonces cualquier tetraedralización de $P_n - v$ con m tetraedros puede extenderse a una tetraedralización de P_n con $m + gr(v) - 2$ tetraedros.*

Ahora probaremos que existe una etiquetación v_1, \dots, v_n de los elementos de P_n tal que si definimos $P(1) = P_n$ y $P(i) = P_n - \{v_1, \dots, v_i\}$, $n - 3 \geq i \geq 2$, y denotamos por $gr_i(v)$ al grado de cada elemento de $P(i)$ en $G(P(1))$, entonces

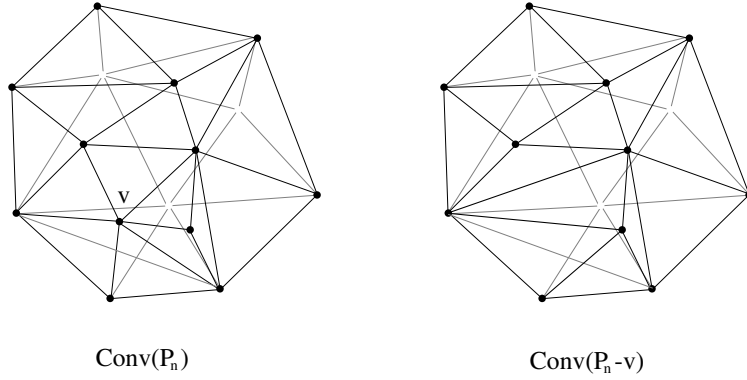


Figura 2:

$gr_i(v_i)$ es al menos 6, $1 \leq i \leq n - 12$. Dicha etiquetación es de interés ya que utilizando el lema anterior para $P(1), \dots, P(n - 3)$ obtenemos una tetraedralización de P_n con al menos $4(n - 12) + c$ tetraedros (cada uno de v_1, \dots, v_{n-12} contribuye al menos 4 tetraedros).

Esto es fácil de obtener, ya que si $P(i)$ tiene más de 12 elementos, $G(P(i))$ tiene por el teorema 1 un vértice de grado al menos 6. Cualquiera de esos vértices ¡es etiquetado v_i !

Ahora procederemos a probar que podemos etiquetar los elementos de P_n $\{v_1, \dots, v_n\}$ de tal forma que al menos las tres cuartas partes de los elementos de P_n son tales que $gr_i(v_i)$ es al menos 7. El siguiente lema será útil.

Lema 2 *Supongamos que v es tal que $gr_i(v) = 6$, y todos los vértices de $G(i)$ adyacentes a él también tienen grado 6. Entonces en $G(i + 1)$ al menos dos de los vecinos de v en $G(i)$ tienen grado 7.*

Demostración: Si $G(P_n)$ contiene un vértice de grado mayor o igual a 7 éste será v_1 . De forma análoga si $G(P(i))$ contiene algún vértice de grado mayor o igual a 7, éste será v_i . Supongamos entonces que para alguna $i \leq 4$, $G(P(i))$ no contiene tal vértice. Supongamos, sin pérdida de generalidad que $G(P(1))$ no tiene vértices de grado mayor o igual a 7. Como $G(P_n)$ es una triangulación, contiene exactamente $3n - 6$ aristas, y por tanto a lo más 12 de sus vértices son de grado menor o igual a 5, los otros vértices son de grado 6.

Si n es suficientemente grande, existe algún vértice de $G(P_n)$ tal que todos sus vecinos, y los vecinos de sus vecinos también tienen grado 6. Sea v_1 uno de dichos vértices, y $P(1) = P_n - v_1$. Entonces $G(P(1))$ se obtiene a partir de $G(P_n)$ quitando v_1 y agregando tres aristas adyacentes a los vecinos de v_1 en $G(P_n)$. Si alguno de los vecinos de v_1 es de grado 8, sea v_2 dicho vértice, y $P(2) =$

$P(1) - v_2$. Por inducción $G(P(2))$ admite una tetraedralización con al menos $4.75(n-2) - c$ tetraedros, que puede ser extendida a una tetraedralización de P_n con $4.75(n-2) - c + (6+8) - 4 = 4.75n + 10 - c > 4.75n - c$ tetraedros. Supongamos entonces que ningún vecino de v_1 en $G(P_n)$ tiene grado 8 en $G(P(2))$. Es fácil ver que entonces exactamente dos de estos vértices tienen grado 7 en $G(P(2))$, dos más son de grado 6, y los dos restantes son de grado 5. No es muy difícil ver ahora que si v_2 y v_3 son los vecinos de v_1 de grado 7 en $G(P(2))$, entonces en $G(P_n - \{v_1, v_2, v_3\})$ también existe un vértice de grado 7, sea éste v_4 . Más aun, existen ejemplos en los que es posible que $G(P_n - \{v_1, \dots, v_4\})$ no contenga vértices de grado 7. Por tanto como por inducción existe una tetraedralización de $P_n - \{v_1, \dots, v_4\}$ con $4.75(n-4) - c$ tetraedros: ésta puede ser extendida, por el lema 2 a una tetraedralización de P_n con $4.75n - c$ tetraedros.

Por tanto hemos probado:

Teorema 2 *Para n suficientemente grande, cualquier colección P_n de n puntos en posición convexa admite una tetraedralización con al menos $4.75n - c$ tetraedros.*

2.2. Conjuntos de puntos en posición general.— En esta sección probaremos el siguiente resultado:

Teorema 3 *Para n suficientemente grande cualquier colección P_n de n en posición general admite una tetraedralización con más de $3n$ tetraedros.*

Algunos resultados preliminares serán necesarios antes de probar nuestro teorema. El siguiente resultado es una consecuencia inmediata de un resultado similar y bien conocido en el plano.

Lema 3 *Sea P_n una colección de puntos en posición general en \mathbb{R}^3 . Entonces P_n contiene un subconjunto con al menos $\ln n$ elementos en posición convexa.*

Supongamos que Q_m es una colección de puntos tales que $Q_m = Q_r \cup Q_s$ tales que tanto Q_r como Q_s están en posición convexa, y los vértices de $\text{Conv}(Q_m)$ son precisamente los elementos de Q_r , esto es $\text{Conv}(Q_s)$ es un poliedro convexo contenido en el interior del poliedro $\text{Conv}(Q_r)$. Sea $\Psi = \text{Conv}(Q_r) - \text{Conv}(Q_s)$ el espacio entre $\text{Conv}(Q_r)$ y $\text{Conv}(Q_s)$.

Lema 4 *Ψ puede ser tetraedralizado con al menos $2r + s - 6$ tetraedros.*

Demostración: Primero mostraremos que Ψ puede tetraedralizarse, es decir que existe una familia de tetraedros tal que sus vértices son elementos de $Q_r \cup Q_s$ tales que su unión es Ψ , y sus interiores son vacíos. Supongamos que los vértices de Q_s están etiquetados $\{v_1, \dots, v_r\}$. Sea $P_0 = Q_s \cap Q_r \cup \{v_1, \dots, v_i\}$. Claramente

v_j no pertenece a $Conv(P_i)$, $j > i$. Para cada i sean $T(i) = \{T_{i,1}, \dots, T_{i,k(i)}\}$ los triángulos del cierre convexo de P_{i-1} visibles desde v_i , y $\nabla(i)$ el conjunto cuyos elementos son los tetraedros ∇_j cuyos vértices son los vértices de $T_{i,j}$ y v_i , $j = 1, \dots, k(i)$.

Claramente $\nabla(1) \cup \dots \cup \nabla(r)$ definen una tetraedralización de Ψ . Ahora probaremos que cualquier tetraedralización de Ψ contiene al menos $2s + r - 6$ tetraedros. Para comenzar observemos que cada triángulo de $Conv(Q_s)$ pertenece a un tetraedro deferente de cualquier tetraedralización de Ψ . Por otra parte cualquier tetraedro de una tetraedralización de Ψ contiene a lo más dos triángulos de $Conv(Q_r)$, como $Conv(Q_s)$ y $Conv(Q_s)$ contienen exactamente $2r - 4$, y $2s - 4$ triángulos respectivamente se sigue que cualquier tetraedralización de Ψ contiene al menos $2r + s - 6$ tetraedros. ■

Con anterioridad ya se sabía que Ψ puede ser tetraedralizado y con un número lineal de tetraedros[11, 2]. Los métodos usados en esos artículos son más complejos que el nuestro; sin embargo en [11, 2] el énfasis es en tetraedralizar Ψ con pocos, no con muchos tetraedros. No es difícil construir ejemplos en los que nuestro método produce un número cuadrático de tetraedros.

Ahora estamos listos para probar nuestro resultado principal de esta sección, el Teorema 3: **Demostración:** Sea P_n una colección de n puntos en posición general. Si $Conv(P_n)$ contiene r vértices, para r suficientemente grande, entonces existe una tetraedralización \mathcal{T} de $Conv(P_n)$ con al menos $4.75r - c$ tetraedros. Supongamos que los puntos de P_n en el interior de $Conv(P_n)$ están etiquetados v_1, \dots, v_{n-r} . Agreguemos ellos uno por uno de tal forma que cuando el punto v_i es considerado, éste pertenece a algún tetraedro de una tetraedralización de los puntos en $Conv(P_n)$ junto con los puntos v_1, \dots, v_{i-1} . Al agregar v_i podemos partir el tetraedro que lo contiene en cuatro tetraedros, incrementando el número de tetraedros en tres. Por tanto obtenemos una tetraedralización de P_n con $4.75r - c + 3(n - r)$ tetraedros, que es mayor que $3n$.

Supongamos entonces que $Conv(P_n)$ tiene pocos puntos, es decir que r está acotado por una constante fija. Sea S el conjunto de vértices de $Conv(P_n)$. Por el lema 3 $P_n - S$ contiene un subconjunto S' con $\ln(n - r)$ puntos en posición convexa. Por el lema 4, el espacio entre $Conv(S)$ y $Conv(S')$ admite una tetraedralización con al menos $2 \ln(n - r) + r - 6$ tetraedros. Además por el lema 2 S puede ser tetraedralizado con $4.75 \ln(n - r)$ tetraedros. Esta tetraedralización de $Conv(S)$ junto con la del espacio entre $Conv(S)$ y $Conv(S')$ producen una tetraedralización con al menos $4.75 \ln(n - r) - c + 2 \ln(n - r) + r - 6$ que es mayor que $4(r + \ln(n - r))$. Agregando el resto de los puntos de P_n uno por uno, como en el caso anterior, obtenemos una tetraedralización de P_n con al menos $3n$ tetraedros. ■

3. *Tetraedros vacíos en cuatro coloraciones de familias de puntos*

Finalmente podemos probar el resultado que nos motivó a estudiar tetraedralizaciones de conjuntos de puntos. Ahora probamos:

Teorema 4 *Sea P_n una familia de n puntos en posición general, n suficientemente grande. Entonces en cualquier 4-coloración de los elementos de P_n siempre existe un tetraedro vacío.*

Demostración: Tomemos cualquier 4-coloración de los elementos de P_n . Sean C_1, \dots, C_4 las clases cromáticas de nuestra coloración. Supongamos que $|C_1| \leq |C_2| \leq |C_3| \leq |C_4|$. Por el teorema 3 existe una tetraedralización de C_4 con más de $3|C_4|$ tetraedros. Si ninguno de ellos fuera vacío, entonces $|C_1| + |C_2| + |C_3| \geq 3|C_4|$ lo que implicaría que alguna de las C_i tiene más elementos que C_4 , ¡lo cual es una contradicción! ■

4. _____ *Conclusiones*

En este artículo estudiamos dos problemas, el primero concerniente a tetraedralizaciones de familias de puntos en \mathfrak{R}^3 . Probamos que para familias de puntos en posición convexa siempre existe una tetraedralización con al menos $4.75n - c$ tetraedros. Para puntos en posición general, encontramos tetraedralizaciones con más de $3n$ tetraedros, n suficientemente grande. Surgen varias preguntas interesantes; en particular para familias de puntos en posición convexa.

Problema abierto 1 *¿Será cierto que si P_n esta en posición convexa, siempre admite una tetraedralización con un número superlineal de tetraedros?*

Para puntos en posición general no es claro que la pregunta anterior sea cierta. Existe un ejemplo muy interesante (aunque no en posición general) de J. Erickson [8] en el cual los elementos de P_{n^3} son los puntos con coordenadas enteras $(i, j, k) : 1 \leq i, j, k \leq n$. Erickson observa que si cualquier tetraedralización de P_{n^3} utiliza solamente tetraedros de volumen estrictamente mayor que 0, entonces dicha tetraedralización contiene a lo más $6n^3$ tetraedros. Esto se sigue del hecho

de que cualquier tetraedro con volumen mayor que 0 y con coordenadas enteras tiene volumen al menos $\frac{1}{6}$.

Nuestra motivación inicial para estudiar este tipo de problemas, viene de la generalización de un resultado de Hurtado, que afirma que en cualquier 2-coloración de una familia de puntos P_n en posición general en el plano siempre existe un (de hecho muchos) triángulos monocromáticos vacíos. Probamos que en \mathbb{R}^3 en cualquier 4-coloración de una familia de n puntos en posición general, siempre existe un tetraedro monocromático vacío, n suficientemente grande.

Observemos que si, para n suficientemente grande, cualquier P_n admite una tetraedralización con kn tetraedros, entonces el resultado sobre 4-coloraciones puede ser extendido a $k + 1$ -coloraciones de P_n . Conjeturamos que este resultado es válido para al menos las 5-coloraciones de P_n . Esto se basa en el hecho de que creemos que la forma de agregar los puntos en el interior de $Conv(P_n)$ durante la prueba del teorema 3 no es muy eficiente. Creemos que esto puede hacerse de tal forma que en general, cada punto contribuya con cuatro tetraedros a nuestras tetraedralizaciones. Hasta este momento, sin embargo, no hemos logrado alcanzar este objetivo. Sabemos que utilizando herramientas como intercambios de aristas bi-estelares [3] podemos mejorar las cotas probadas aquí. Sin embargo, no alcanzamos la cota deseada de $4n$ tetraedros. Esperamos poder alcanzar este objetivo pronto.

Referencias

- [1] D. Avis y H. El Gindy, “Triangulating point sets in space”. *Disc. and Comp. Geometry* **2** (1987) 99–111.
- [2] M. Bern, “Compatible tetrahedralizations”. *Fundamenta Informaticae* **2** (1994) 371–384.
- [3] J.A. De Loera, F. Santos, y J. Urrutia, “The number of geometric bistellar neighbors of a triangulation”, *Disc. Comp. Geometry* **21** (1999) 131–142.
- [4] O. Devillers, F. Hurtado, G. Károlyi y C. Seara, “Chromatic variants of the Erdős-Szekeres Theorem”. Por aparecer en *Computational Geometry Theory and Applications*.
- [5] H. Edelsbrunner, “Triangulations and meshes in computational geometry”, *Acta Numerica* (2000) 1–81, Editorial Cambridge Univ. Press 2000.

- [6] H. Edelsbrunner, F. Preparata y D. West, “Tetrahedralizing point sets in three dimensions”, *Journal of Symbolic Computation* **10** (1990) 335–347.
- [7] J. Erickson, “Nice point sets can have nasty Delaunay triangulations”, *Proceedings of the 17th Annual ACM Symposium on Computational Geometry*, 96–105, 2001.
- [8] J. Erickson, “Dense point sets have sparse Delaunay triangulations”, *Proceedings of the 13th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, 125–134, 2002.
- [9] J.E. Goodman y J. Pach, “Cell decomposition of polytopes by bending”. *Israel J. Math.* **64**, no. 2, (1988) 129–138.
- [10] B. Grünbaum, *Convex Polytopes*, 1967, John Wiley and Sons, Londres, Nueva York, Sydney.
- [11] L. Palios, “Optimal tetrahedralization of the 3d region between a convex polyhedron and a convex polygon”, *Comput. Geom. Theory Appl* **6** (1996) 263–276.
- [12] B.L. Rotschild y E.G. Straus, “On triangulations of the convex hull of n points”, *Combinatorica* **5** (1985) 167–179.