TAREA 1. ÁLGEBRA MODERNA 3

J. CRUZ GARCÍA ZAGAL
GABRIELA ALFARO

1. Sea R un anillo conmutativo con 1, para un R-Módulo M definimos la siguiente operación por la dercha $xr := rx$ para $r \in R$ y $x \in M$. Pruebe que con la operación así definida M es un R-Módulo derecho.
2. Sea R una anillo (sin uno) consideren el conjunto $\mathbb{Z} \times R$, donde $\mathbb{Z}$ es el anillo de los números enteros. Prueben que con las siguientes operaciones:
   a) $(a, x) + (b, y) = (a + b, x + y)$ para $a, b \in \mathbb{Z}$ y $x, y \in R$.
   b) $(a, x)(b, y) = (ab, ay + bx + xy)$ para $a, b \in \mathbb{Z}$ y $x, y \in R$

   El conjunto $\mathbb{Z} \times R$ tiene estructura de anillo con 1, además la función
   $$\phi : R \longrightarrow \mathbb{Z} \times R$$
   dada por $\phi(R) = (1, r)$ es un homomorfismo de anillos.
3. Se dice que un anillo es *buleano* si todo elemento es idempotente (es decir, $aa = a$ para todo $a \in R$). Pruebe que si R es un anollo buleano entonces
   a) R es un anillo conmutativo y que $a = -a$ para todo $a \in R$
   b) Todo subanillo y todo cociente de un anillo buleano es también buleano.
   c) ¿Cómo son los anillos buleanos finitos?
4. Sea M un R-Módulo izquierdo y $m \in M$, definimos el *anulador* de m como:
   $$an(m) = \{r \in R : rm = 0\}$$
   y
   $$An(M) = \{r \in R : rm = 0, \text{ para toda } m \in M\}$$
   Prueben que:
   a) $an(m)$ es un ideal izquierdo de R
   b) $An(M) = \bigcap_{m \in M} an(m)$
   c) Diremos que un R-Módulo izquierdo es *fiel* si $An(M) = \{0\}$. Prueben que si M es un R-Módulo izquierdo fiel, entonces M es un $R/An(M)$-Módulo izquiedo fiel.
5. Si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo de R-Módulos izquierdos, entonces $Im(f)$ y $Nuc(f)$ son submódulos de N y M respectivamente.
6. Pruebe que $Hom_R(R, M)$ tiene estructura de R-Módulo izquiedo con la operación:
   $$rf : R \longrightarrow M, \ rf(x) = f(xr).$$

Date: Marzo de 2007.

7. Prueben que $Hom_R(R, M)$ es isomorfo a M (por supuesto R un anillo y M un R-Módulo izquierdo). Sugerencia: Consideren la función $\gamma : Hom_R(R, M) \longrightarrow M$ dada por $\gamma(f) = f(1)$.
8. Si M es un R-Módulo izquierdo y $N \in Sub_R(M)$. Definimos la siguiente operación en $\cdot : R \times (M/N) \longrightarrow M/N$ como $r\overline{x} = \overline{rx}$, para $r \in R$ y $\overline{x} \in M/N$. Pruebe que con está operación M/N tiene estructura de R-Módulo izquierdo.
9. Sea N un submódulo propio, no cero de un módulo M y sea $x \in M$ tal que $x \notin N$. Pruebe que:
   - M tiene un submódulo K máximo tal que si $N \leq K$ entonces $x \notin K$.
   - Si $M = Rx + N$ entonces M tiene un submódulo máximo K tal que $N \leq K$ y $x \notin K$.
10. Si M es un R-Módulo pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes:
    - $M = \{0\}$
    - Para cada R-Módulo N hay un único morfismo $f : M \longrightarrow N$
    - Para cada R-Módulo N hay un único morfismo $g : N \longrightarrow M$
11. Un módulo M no cero, es *simple* si no tiene submódulos propios. Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes
    - M es simple
    - Todo morfismo no cero $f : M \longrightarrow N$ es un monomorfismo.
    - Todo morfismo no cero $g : N \longrightarrow M$ es un epimorfismo.
12. Si $M = \bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha$ y $P_\alpha : M \longrightarrow M_\alpha$ las proyecciones. Prueben que:
    a) $P_\alpha^2 = P_\alpha$
    b) $P_\alpha P_\beta = 0$
    c) Para cada $m \in M$, $P_\alpha(m) = 0$ para casí todo $\alpha \in I$.
    d) $\sum_{\alpha \in I} P_\alpha = 1_M$.
13. Prueben que si $M \in R - Mod$ entonces el funtor $Hom_R(\ \ , M)$ es un funtor exacto izquierdo.
14. Sea

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta en $R - Mod$. Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes:
    - Existe un morfismo de módulos $h : M'' \longrightarrow M$ tal que $gh = 1_{M''}$
    - Existe un morfismo de módulos $\sigma : M \longrightarrow M'$ tal que $\sigma f = 1_{M'}$
    - En el caso anterior la sucesión

$$0 \longrightarrow M'' \xrightarrow{h} M \xrightarrow{\sigma} M' \longrightarrow 0$$

es exacta.
15. Sea $R = R_1 \times \cdots \times R_n$ el anillo producto de los anillos R_i. Pruebe que un subconjunto I de R es un ideal izquierdo (derecho, bilateral) de R si y solamente

si existen $I_1, \dots I_n$ ideales ($I_J \leq R_J$) izquierdos (derchos, bilaterales) tal que $I = I_1 \times \cdots \times I_n$.

16. Lo anterior es cierto o no si cambiamos a R por un R-Módulo M y en lugar de ideal izquierdo es ahora submódulo. (si es cierto hay que probarlo y si no hay que dar un contraejemplo).
17. Sea $\{M_\alpha\} \subseteq R - Mod$ una familia de R-Módulos y $M \in R - Mod$. Prueben:
    - $Hom_R(\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha, M) \cong \prod_{\alpha \in I} Hom_R(M_\alpha, M)$
    - $Hom_R(M, \prod_{\alpha \in I} M_\alpha) \cong \prod_{\alpha \in I} Hom_R(M, M_\alpha)$
18. Supongamos que $M = \bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha$. Pruebe que si $f : M \longrightarrow N$ es un isomorfismo entonces $N = \bigoplus_{\alpha \in I} f(M_\alpha)$.
19. Prueben las siguientes afirmaciones si son ciertas, si son falsas den un contraejemplo:
    - Sea P es un módulo proyectivo y N es un submódulo no cero de P. Entoces P/N es proyectivo.
    - Sea P un módulo proyectivo y N un submódulo no cero de P. Entonces N es proyevtivo.
20. Pruebe que todo subgrupo finitamente generado de $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{Z}$-Módulo es ciclíco.
21. Sea $\{M_i\}_{i=1}^n$ una familia de $R-$Módulos. Pruebe que $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ es neteriano si y solamente si M_i es neteriano para cada $i = 1, \dots, n$.
22. Considere el siguiente anillo:

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

    Encuentren los ideales izquierdos de R.
23. Den un ejemplo de un Módulo finitamente generado el cual tenga un submódulo que no es finitamente generado.
24. Consideren el siguiente anillo:

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$$

    Prueben que R es artiniano izquierdo y neteriano izquierdo pero no es ni artiniano derecho ni neteriano derecho.
25. Se dice que un Módulo M es *semisimple* si exite $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de submódulos de M, T_α simple para cada $\alpha \in I$, tal que $M = \bigoplus_{\alpha \in I} T_i$. Pruebe que para un anillo buleano R las siguientes condiciones son equivalentes:
    a) R artiniano
    b) R es neteriano
    c) R es finito
    d) R es semisimple

26. Pruebe que si M es un R-Módulo artiniano o neteriano sobre un anillo buleano R, entonces M es semisimple.
27. Sea $\phi : R \longrightarrow S$ un homomorfismo de anillos entonces todo S-Módulo izquierdo M tiene estructura de R-Módulo vía el homomorfismo ϕ. Pruebe que si M visto como S-Módulo es artiniano o neteriano entonces M visto como R-Módulo es artiniano o neteriano.
28. Sea $\{M_i\}_{i=1}^{n}$ una familia de $R-$Módulos. Pruebe que $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ es artiniano si y solamente si M_i es artiniano para cada $i = 1, \ldots, n$.
29. Usando el problema anterior pruebe que R es un anillo artiniano izquierdo si y solamente si todo módulo finitamente generado es artiniano
30. Sea G un grupo abeliano denotamos por:

$$t(G) = \{x \in G \mid o(x) < \infty\}$$

    a) Pruebe que $t(G)$ es un subgrupo de G
    b) $G/t(G)$ no tiene elementos de orden finito. Un grupo abeliano es de *torsión* si $G = t(G)$.
31. Sea G un grupo abeliano y p un número primo definimos:

$$G_p = \{x \in G| \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } p^n x = 0\}$$

    a) Pruebe que G_p es un subgrupo de G, este subgrupo es llamado la parte p-primaria de G.
    b) Pruebe que si G es un grupo abeliano de torsión. Entonces $G = \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} G_p$.
32. Consideremos a $\mathbb{Q}$ (el campo de los números racionales) con la suma como $\mathbb{Z}$-Módulo, $\mathbb{Z}$ es un subrupo de $\mathbb{Q}$. Pruebe que:
    a) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un grupo abeliano de torsión.
    b) Por el ejercicio anterior $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} G_p$ denotaremos por $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ a la parte p-primaria de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Encuentre un conjunto de generadores de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ en terminos del primo p.